

제한된 범위의 역산란 포텐셜을 갖는 Gel'fand-Levitan-Marchenko 적분방정식의 해와 유전율 분포 합성에의 응용

⁰장완규 · 정현수 · 박의준
^{*}금오공과대학교 전자공학부

Solution of Gel'fand-Levitan-Marchenko Integral Equation with Restricted Inverse Scattering Potential and Its Applications to Synthesis of Dielectric Constant Distribution

Wan Gyu Jang · Hyun Soo Jung · Eui Joon Park
School of Electronic Engineering, Kumoh National Institute of Technology

Abstract

In this study, the solution of Gel'fand-Levitan-Marchenko integral equation in the inverse scattering problem is efficiently solved for arbitrarily specified spectra pattern which are reflected from the restricted potential. The procedure is based on the successive approach without iterations. This method lessens the truncation errors which plague conventional design schemes using specific windows for reflection coefficients. It is shown that the method is adequate for the synthesis of the continuously varying one-dimensional potential of the nonuniformly distributed dielectric constants.

Key Words : Dielectric Constant, Inverse Scattering, Gel'fand-Levitan-Marchenko Integral Equation

I. 서론

일차원적이고 연속적인 포텐셜 분포를 갖는 유전체 매질의 역산란 패턴은 Schrödinger 미분방정식으로 표현될 수 있으며 그해는 일반적으로 두가지의 적분방정식으로 표현될 수 있다. 즉 Gel'fand-Levitan-Marchenko(GLM)형과 Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB)형이다^[1]. 유전체 매질의 일차원적 포텐셜이 완만하게 변화하면 WKB 적분방정식으로부터 직접 포텐셜을 계산할 수 있으나, 급격히 변화하면 Schrödinger 미분방정식의 해는 WKB 적분방

정식을 사용한 급수해로 표현되어 복잡한 단점을 가진다. 한편 GLM형 적분방정식의 해로부터 포텐셜을 계산할 때 임의의 통과대역 반사계수를 특정한 윈도우형으로 설정할 경우 합성된 포텐셜 범위는 매우 커질 수 있으므로 허용 범위를 설정해야 한다. 본 연구에서는 연속적으로 분포된 유전율의 변화 합성을 위한 대표적인 예로서 전송선로가 제한된 범위의 포텐셜을 가질 수 있도록 입력 반사계수 목표치를 최적화 기법을 사용하여 산출한다. 또한 제한된 범위의 포텐셜로부터 합성된 특성임피던스 프로파일의 길이는 상대적으로 짧아지며, 계산 과정에서 truncation 오차를 줄일 수 있음을 보인다.

II. GLM 적분방정식과 포텐셜 합성

설계주파수 f_0 에서 무손실 전송선로는 다음과 같은 Zakharov-Shabat(ZS) 결합모드 방정식으로 표현될 수 있다.^[2]

$$v_1'(x, u) + ju v_1(x, u) = q(x, f_0) v_2(x, u) \quad (1)$$

$$v_2'(x, u) - ju v_2(x, u) = q(x, f_0) v_1(x, u) \quad (2)$$

식(1)와 (2)의 v_1 과 v_2 는 각각 x 영역에서 반사 및 전송모드를 나타내며 $x < 0$ 에서의 반사계수를 $r(u)$ 로 두면 x 영역과의 푸리에 변환관계는 다음과 같다.

$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(u) e^{-iux} du \quad (3)$$

식(1)과 (2)로 표현된 ZS시스템에서 포텐셜함수 q 를 합성하기 위한 방법으로서는 잘 알려진 다음의 GLM 적분방정식을 풀므로써 가능하다.^[3]

$$A_1(x, y) + \int_{-y}^x dx' A_2(x, x') R(x' + y) = 0 \quad (4)$$

$$-A_2(x, y) + R(x + y) + \int_{-y}^x dx' A_1(x, x') R(x' + y) = 0 \quad (5)$$

이때 $x \leq |y|$ 이며 q 는 다음 식과 같이 들 수 있다.

$$q(x, f_0) = -2 A_2(x, x) \quad (6)$$

$q(x, f_0)$ 와 특성임피던스 $Z(x, f_0)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$Z(x, f_0) = Z(0) \exp\left(-2 \int_0^x q(x', f_0) dx'\right) \quad (7)$$

$r(u)$ 가 설정되면 식(3)로부터 $R(x)$ 가 계산되고 GLM 적분방정식의 해로부터 q 가 계산된다. 식(7)로부터 특성임피던스가 x 영역에서 합성되며, 이때 실제 길이 L 은 합성된 특성임피던스로부터 계산된 입력반사계수의 적절한 주파수센터링에 의해 계산된다. $r(u)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.^[4]

$$r(u) = \sum_{n=-N}^N r(n) \frac{\sin \pi(u-n)}{\pi(u-n)} \quad (8)$$

$r(n)$ 은 $u = n$ 일 때 $r(u)$ 의 샘플링 값이며 $r(n) = 2\pi R_n$ 의 관계가 있다. 여기서 R_n 은 이산적인 푸리에 급수의 계수이다. 만약 $r(u)$ 가 우함수이고 R_n 이 실수라면 다음과 같다.

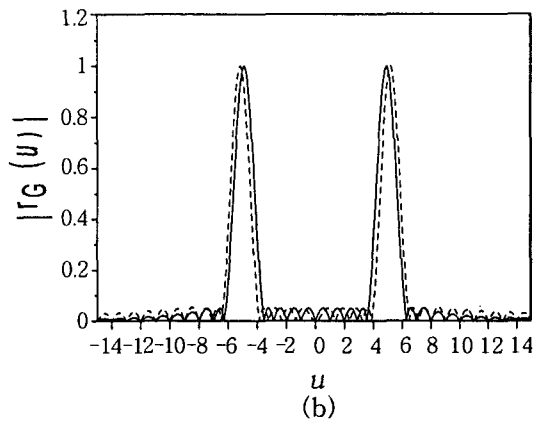
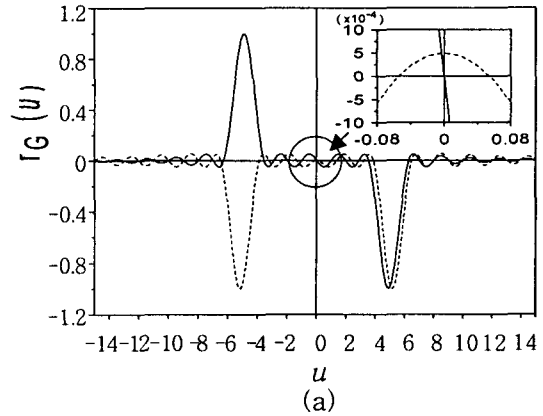


그림 1. 제어된 반사계수 패턴

$$R(x) = R_e(x) = 2 \sum_{n=0}^N R_n \cos(nx) \quad (9)$$

여기서 목표로 하는 임의의 우함수 반사계수 패턴 $r(u) = r_e(u)$ 를 합성하기 위해 식 (8)을 변형시킨 Taylor 패턴^[5]을 도입하면 다음과 같다.

$$r(u) = C \frac{\sin \pi u}{\pi u} \prod_{n=1}^N \left(\frac{n^2}{n^2 - u^2} \right) \left(1 - \left(\frac{u}{u_n} \right)^2 \right) \quad (10)$$

위 식에서 계수 C 는 $u \rightarrow 0$ 일 때 $r(u)$ 의 값이다. $u = 0$ 일 때는 $C = 0$ 가 되어야 하며 이는 전송선로에서 입출력 임피던스가 동일한 경우에 해당한다. 따라서 동일한 입출력 임피던스를 가지기 위해서는 $u = 0$ 일 때 $r(u)$ 가 u 영역에서 0을 통과하도록 $r(u)$ 는 기함수로 표현되어야 한다. 식(10)을 기함수로 나타내면 다음과 같다.

$$r_o(u) = |r_e(u) - r_e(u)|_{n=0} - 2 \sum_{n=1}^N r(n) \frac{\sin(u+n)}{(u+n)} \quad (11)$$

$r(u)$ 가 기함수가 되면 R_n 은 순허수 $j R_n'$ 가 되며

$R_n = -R_{-n}$ 의 관계가 성립한다. 따라서 식(9)는 다음과 같이 표현된다.

$$R(x) = R_o(x) = 2 \sum_{n=1}^N R_n' \sin(nx) \quad (12)$$

임의 반사계수 패턴 합성을 위해 $r_e(u)$ 및 $r_o(u)$ 의 크기를 일반화된 기호 $r_G(u)$ 로 두고 $r_G^p(u)$ 를 p 차 lobe 피크치로 정의한다. 그리고 p 차 lobe 목표치를 S^p 로 두고 오차함수를 정의하면 다음과 같다.

$$E(U) = \sum_{p=1}^N (r_G^p(u) - S^p)^2 \quad (13)$$

여기서 $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ 을 의미하며 이 U 의 값을 초기치로부터 update 시키므로서 E 를 최소화시킨다. 본 연구에서는 $E < \epsilon = 10^{-6}$ 을 수렴조건으로 두었다. 예로 제어할 lobe 개수를 $N=7$ 로 하고 $S^p = [0.05, 0.05, 0.05, 0.999, 0.05, 0.05]$ 로 두자. 식(10)에서 $C=0.0005$ 로 두고 식(13)를 사용하여 U 를 최적화시킨다. 이 때 초기치는 $U = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ 로 두었다. 최적화된 $r_e(u)$ 를 그림 1(a)에 점선으로 보였다. $u \rightarrow 0$ 일 때 반사계수가 0.0005가 되는 우함수 패턴을 만족시킴을 알 수 있다. 식(14)을 사용하여 계산된 $r_o(u)$ 를 목표치에 부합되도록 최적화 할 수 있고 그 결과를 그림 1에 실선으로 보였다.

III. 연쇄법을 사용한 GLM 방정식의 해

식(4),(5)를 계산하기 위해 다음의 1차 편미분방정식^[5]을 도입하여 mesh를 사용한 연쇄법을 적용시켰다.

$$\frac{\partial A_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial A_1(x, y)}{\partial y} = q(x, f_0)A_2(x, y) \quad (14)$$

$$\frac{\partial A_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_2(x, y)}{\partial y} = q(x, f_0)A_1(x, y) \quad (15)$$

식(4)과 (5)로부터 다음의 경계조건이 만족한다.

$$A_1(x, -x) = 0 \quad (16)$$

$$A_2(x, -x) = R(0) \quad (17)$$

식(4),(5) 및 식(14),(15)로부터 A_1 과 A_2 를 효율적으로 계산하기 위해 $\xi = (x+y)/2$, $\eta = (x-y)/2$ 와 같이 좌표를 변환시키고 이산적인 변수로 표현하면 $\xi_i = i(\Delta\xi)$, $\eta_j = j(\Delta\eta)$ 로 둘 수 있고 식(4)과 (5)는 $\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta\xi$, $\eta_{j+1} = \eta_j + \Delta\eta$ 로부터 다음과 같이 표현된다.

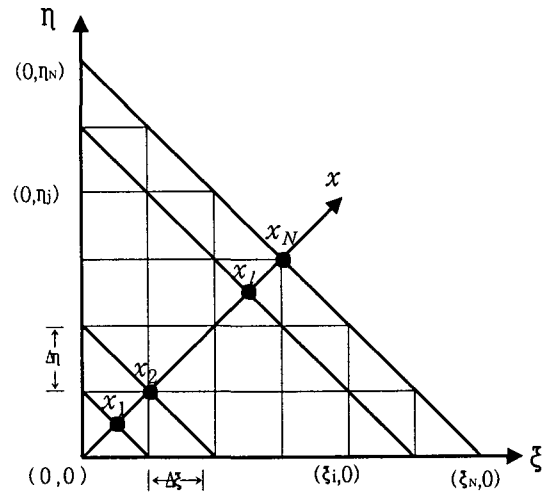


그림 2. $\xi - \eta$ 평면상의 grid

$$A_1(\xi_i, \eta_j) = -2\Delta\xi \sum_{k=0}^{i-1} A_2(\xi_k + \eta_j, \xi_i - \eta_k)R(2\xi_k) \quad (18)$$

$$A_2(\xi_i, \eta_j) = R(2\xi_i) + 2\Delta\xi \sum_{k=0}^{i-1} A_1(\xi_k + \eta_j, \xi_i - \eta_k)R(2\xi_k) \quad (19)$$

이때 초기조건은 식(16)와 (17) 및 식(6)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_1(0, \eta_j) = 0 \quad (20)$$

$$A_2(0, \eta_j) = -R(0) \quad (21)$$

$$q(\xi_i + \eta_j) = 2A_2(\xi_i + \eta_j, 0) \quad (22)$$

식(14)과 (15)는 편도함수의 정의에 의해 다음과 같이 이산적으로 표현될 수 있다.

$$A_1(\xi_{i+1}, \eta_j) = A_1(\xi_i, \eta_j) + \Delta\xi \cdot q(\xi_i + \eta_j - 1)A_2(\xi_i, \eta_j) \quad (23)$$

$$A_2(\xi_i, \eta_{j+1}) = A_2(\xi_i, \eta_j) + \Delta\eta \cdot q(\xi_i + \eta_j - 1)A_1(\xi_i, \eta_j) \quad (24)$$

식(20)와 (21)로부터 그림 2의 η 축 상의 grid 점 $(0, \eta_j)$ 들의 A_1 과 A_2 가 초기 조건에 의해 결정되고 식(18)~(24)를 사용하여 q 의 값을 계산할 수 있다.

IV. 연속적으로 분포된 포텐셜 합성

예로서 $N=23$, $\alpha=0$ 인 경우 Kaiser 윈도우에 의한

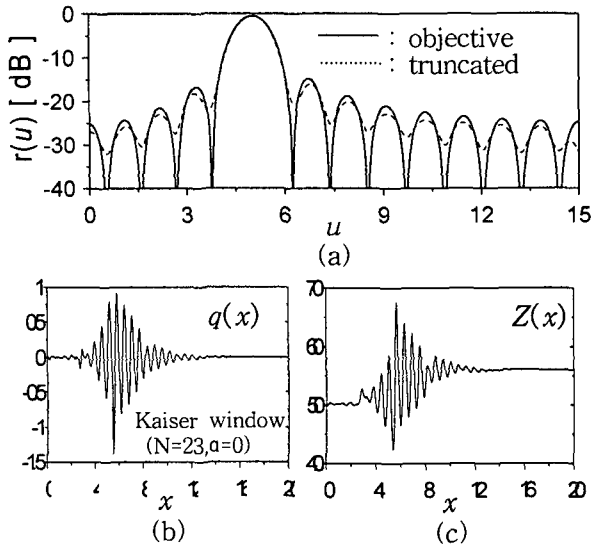


그림 3. (a) Kaiser 윈도우형(N=23,a=0) 패턴과 제한된 범위의 q로부터 계산된 패턴. (b) 계산된 q. (c) 임피던스 프로파일.

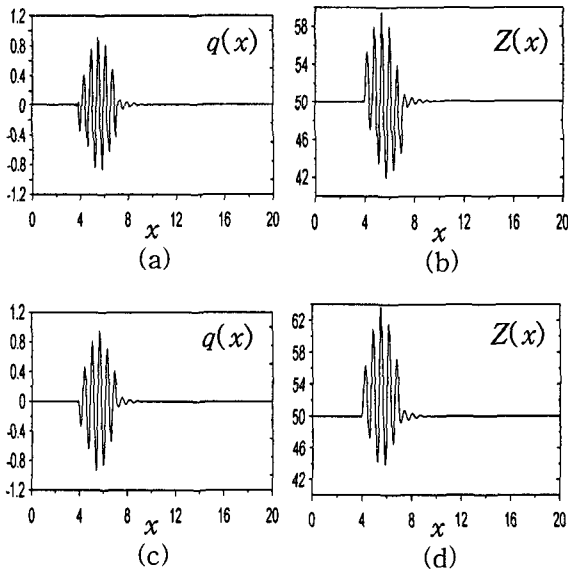


그림 4. 제한된 임펄스응답으로부터 합성된 q와 해당 임피던스 프로파일. (a),(b): $r_e(u)$ 의 경우. (c),(d): $r_o(u)$ 의 경우

$r(u)$ 값을 그림 3(a)에 도시하였으며 여기서 $Z(0)$ 는 50 [Ω]으로 두었다. 그림 3(b)에 대해 $2 \leq x \leq 8$ 로 제한된 q를 이용하여 역으로 계산한 $r(u)$ 를 목표치와 비교하여 그림 3(a)에 점선으로 동시에 보였다. 그림 3(c)

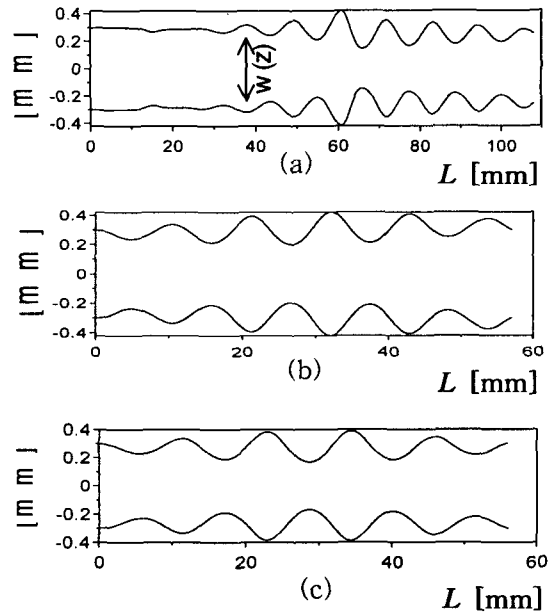


그림 5. 계산된 스트립폭과 선로 길이. (a) Kaiser window의 경우. (b) $r_e(u)$ 의 경우. (c) $r_o(u)$ 의 경우

는 특성임피던스 프로파일들을 보인 그림이다. 그림 3(a)의 경우 $u \rightarrow 0$ 일 때 반사계수 크기는 -25.2[dB], 즉 0.055의 크기를 가지므로 출력임피던스가 $Z(0) \cdot (1+r(0))/(1-r(0))$ 의 관계로부터 약 56[Ω]에 수렴함을 확인할 수 있다. 그림 4(a), (c)는 그림 1에서의 $r_e(u)$ 및 $r_o(u)$ 를 만족하는 프로파일 $q(x, f_0)$ 를 계산한 결과이며, 그림 4(b), (d)는 각각의 합성된 임피던스 프로파일을 나타낸 그림이다. 이 그림들로부터 x범위가 거의 π 로 제한됨을 알 수 있다.

한편 실제 길이 계산을 위해서 비유전율 10.2, 기판높이 0.635[mm]인 마이크로스트립으로 $2 \leq x \leq 8$ 로 제한된 그림 3(c)와 각각 $4 \leq x \leq 7.09$, $4 \leq x \leq 7.17$ 로 제한된 그림 4(b), (d)를 이용하여 스트립 폭을 계산하면 그림 5(a)~(c)에 대응하는 스트립 폭을 갖는다. 여기서 입출력 임피던스는 50[Ω]으로 하였다. 계산된 스트립 폭은 400개의 균일 선로로 조각화하여 Kirschning과 Jansen의 근사식^[6]을 사용하여 최적화 시킨 후 2-포트 해석하였고 길이 L은 초기값을 선정하여 우선 계산하고 주파수 센터링이 이루어 질 때까지 약간의 반복을 시행하므로서 계산하였다. 그림 5(a)~(c)를 사용하여 2-포트 해석한 입력반사계수 패턴을 그림 6에 보였으

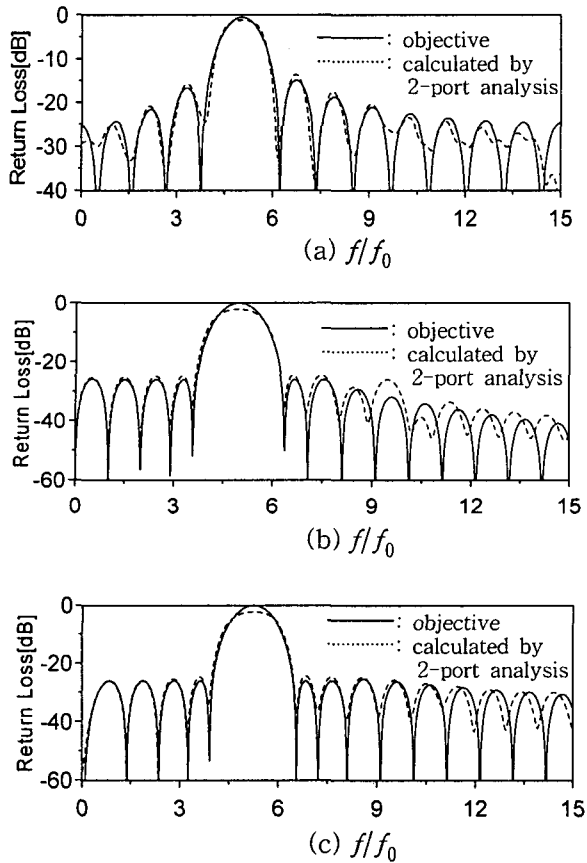


그림 6. 2-포트 해석한 결과 패턴 ($f_0=1$ [GHz]).
 (a) Kaiser window의 경우. (b) $r_e(u)$ 의 경우.
 (c) $r_o(u)$ 의 경우

며, 목표치와 거의 일치함을 확인할 수 있다. 이 결과 들로부터 제한된 임펄스 응답을 사용한 방법으로 도출된 포텐셜로부터 합성된 선로의 실제 길이는 반사계수를 특정한 윈도우형으로 설정한 경우 보다 매우 짧아 짐을 알 수 있다.

V. 결론

본 연구에서는 임의의 역산란 패턴을 만족시키는 연속적으로 분포된 유전율 합성 문제에서 GLM 적분방정식의 해를 효율적으로 계산하는 방법을 제안하였다. 즉 특정한 윈도우 기법을 사용한 역산란 패턴을 목표치로 설정하는 대신 제한된 범위의 포텐셜을 갖는 패턴을 합성하여 목표치로 설정하고, 포텐셜 계산 시 연쇄법을 사용하여 계산과정을 간단히 하였다. 연속적으로

분포된 유전율의 변화에 대응하는 불균일 전송선로 합성에 적용한 결과 계산과정에서의 truncation 오차를 줄일 수 있었고, 선로의 길이를 큰 오차 없이 단축시킬 수 있음을 보였다. 이 결과는 유전체 slab의 폭을 줄이는 데 유용하게 사용될 수 있으리라 생각된다.

참고 문헌

- [1] W. C. Chew, *Waves and fields in inhomogeneous media*. IEEE Press, 1996.
- [2] M. Jault, "The inverse scattering problem for LCRG transmission lines," *J. Math. Phys.*, vol. 23, no. 12, pp. 2286-2290, Dec. 1982
- [3] G. L. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, New York:Wiley 1980.
- [4] S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing*. Prentice Hall, 1996.
- [5] T.T. Taylor, "Design of line source Antennas for narrow beam width and low side lobes," *I.R.E Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. AP-7, pp. 16-28, Jan. 1956.
- [6] R. K. Hoffmann, *Handbook of microwave intergrated circuits*, Artech House, 1987.