

깊은 직선 홈 시일의 윤활 성능해석

이안성† · 김준호*

한국기계연구원 회전체그룹

*한국씰마스타(주) 기술연구소

Lubrication Performance Analysis of Deep Straight Groove Seal

An Sung Lee† and Jun Ho Kim*

Rotordynamics Group, Korea Institute of Machinery and Materials

*R&D Center, Korea Seal Master Co.

Abstract - In this study a general Galerkin FE formulation of the incompressible Reynolds equation is derived for lubrication analyses of noncontacting mechanical face seals. Then, the formulation is applied to analyze the flexibly mounted stator-type reactor coolant pump seals of local nuclear power plants, which have deep straight grooves or plane coning on their primary seal ring faces. Their various lubrication performances have been predicted. Results show that the analyzed deep straight groove seal should have a net coning of less than $0.6 \mu\text{m}$ to satisfy the leakage limit. And for the same amount of equilibrium opening force the plane coning seal requires to have a 3 times higher dimensionless coning than the deep straight groove seal.

Key words - deep straight groove seal, plane coning seal, lubrication performance, Galerkin FE formulation, reynolds equation, mechanical face seal.

1. 서 론

미캐니컬 페이스 시일(또는 간단히 미캐니컬 시일)은 하우징 또는 압력용기를 통과하는 회전축에서 유체의 정밀 누설제어를 필요로 하는 영역에 적용되는 기계 윤활요소(tribo-element)이다. Fig. 1은 주-시일 링(primary seal ring)이 비회전하는 소위 유연-설치-스테이터(FMS, flexibly mounted stator)형 시일의 기본 시스템 구성을 보여주고 있다. 혼히 카본 그라파이트로(carbon graphite) 만들어지는 주-시일 링은 스프링과 2차 시일(elastomer secondary seal)을 통해 하우징에 유연하게 설치되며, anti-rotation lock에 의해 회전이 방지된다. 주-시일 링과 짹을 이루어 실링 댐(sealing dam)을 형성하는 메이팅 링(mating ring)은 혼히 텅스텐 카바이드(tungsten carbide) 또는 실리콘 카바이드(silicon carbide)로 만들어지며, 축에 고정되어 축과 함께 회전한다. 여기서, 메이팅 링 면의

런-아웃 혼들림(run-out wobbling)에 대한 주-시일 링 면의 최소 상대틈새 추적능력(tracking ability with the minimum relative clearance)이 시일의 누설 및 마열성능을 좌우한다.

전통의 접촉식 미캐니컬 시일은 제로 누설 성능을 제공할 수 있으나, 마열에 매우 취약하기 때문에 낮은 PV(시일 면의 압력과 선속도의 곱) 값의 운전조건으로 그 적용이 제한된다. 반면, 비접촉식 미캐니컬 시일은 비접촉 상태에서 또는 거의 접촉 없이 운전되기 때문에 라비린스 시일에서 얻을 수 있는 고압·고속성능을 제공한다. 또한, 운전틈새가 매우 작기 때문에 상대적으로 누설량이 매우 큰 라비린스 시일(labyrinth seal)은 물론 접촉시일에도 비교되는 우수한 저 누설성능을 동시에 제공한다[1]. 이러한 비접촉 미캐니컬 시일은 정압 또는 동압의 자기부상 기하형상(hydrostatic or hydrodynamic self-lifting geometry)의 부가적 특징을 제외하면 전통의 접촉 시일과 유사하다. 정압 부상 기하형상으로는 반경 방향 코닝(radial coning)이 그리고 동압 부상 기하형상으로는 나선형 홈(spiral groove)을 비롯한 다양한 형태의 hydro-pad가 적용된다. 고압에서 또는 운전시

† 주저자 · 책임저자: aslee@kimm.re.kr

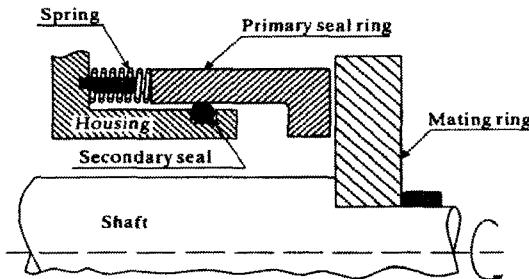


Fig. 1. Schematic of a flexibly mounted stator (FMS) mechanical face seal.

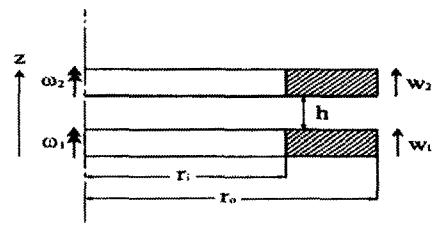


Fig. 2. Cylindrical coordinate system for two seal ring faces.

$2 \sim 10 \mu\text{m}$
유지하며 분리된다. 이때 시일틈새에서 발생하는 유체력은 회전축의 축 방향으로 작용하기 때문에, 비접촉 미캐니컬 시일은 라비린스 시일과 달리 고속에서 전체 회전시스템의 로터다이나믹 불안정화에 관여하지 않는 장점이 있다.

시일의 실제 유한 차원을 고려한 2차원 윤활해석에는 유한요소법 또는 유한차분법과 같은 수치해석기법이 적용된다. 유한요소법은 정식화 과정이 다소 복잡하나 다양한 기하형상과 경계조건, 그리고 임의의 물성을 갖는 문제에 체계적으로 적용될 수 있어, 점차적으로 윤활해석에 그 적용 범도가 높아지고 있다. 유한요소 윤활해석 정식화에는 원래 보존계의 구조해석에서 유래한 변분원리 (variational principle, strong formulation) [2-4]와 함께 유체나 열전달 문제와 같은 비보존계의 모델 정식화에도 일반적 제약 없이 강력히(weak formulation) 적용될 수 있는 Galerkin 유한요소법[5-10]이 사용될 수 있으며, 현재 후자가 보다 널리 사용되고 있다.

본 연구에서는 비접촉 미캐니컬 시일의 비압축성 윤활해석에 적용될 수 있는 일반화된 Reynolds 방정식의 Galerkin 유한요소 윤활정식화를 유도하고, 이를 적용하여 깊은 직

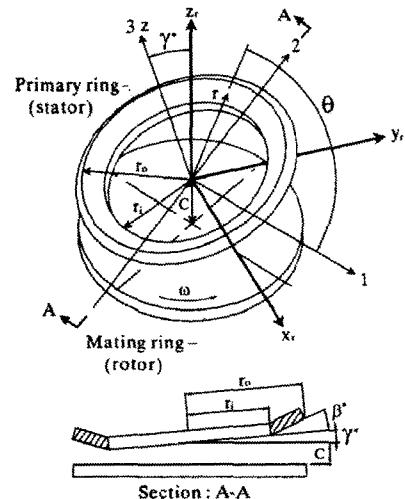


Fig. 3. Relative position between two seal ring faces in a FMS seal and its sectional film geometry.

선 홈(deep straight groove, ABB-CE design)과 단순 코닝(plane coning, WH design)을 주-시일 링 면에 채택하고 있는 국내 원자력 발전소의 원자로 냉각재 펌프(RCP, reactor coolant pump)용 FMS형 시일의 윤활성능을 해석하고자 한다. 한편, 단순 코닝 시일의 일반적 성능특성은 최병렬 등[10]의 연구에 보고되어 있다.

2. Reynolds 방정식의 유한요소 정식화

Fig. 2는 수 μm 의 유체막(fluid film) 틈새를 유지하면서 상대운동을 하고 있는 두 시일 링 면에 대한 원통 좌표계를 나타낸다. FMS 미캐니컬 페이스 시일에 대한 무차원화된 Reynolds 방정식은

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(RH^3 \frac{\partial P}{\partial R} \right) = \frac{A}{R} \frac{\partial (RH)}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial H}{\partial r} \quad (1)$$

일반적으로 미스얼라인먼트와 코닝이 함께 존재하는 두 시일 링 사이의 상대 위치와 유막(fluid film)의 단면 형상이 Fig. 3에 나타나 있다. 이 상대 위치를 나타내기 위한 123-좌표계는 주-시일 링의 평면 내에서 자유로이 회전할 수 있어, 주-시일 링의 상대 미스얼라인먼트가 발생하는 1축은 항상 메이팅 링의 평면에 평행하며 2축은 항상 최대

유막 두께 지점을 가리킨다. 이제 1축으로부터 시일 면의 위치에서의 무차원 유막 두께는

$$H = 1 + \gamma R \sin \theta + \beta(R - R_i) \quad (2)$$

여기서, $\gamma (= \gamma^* r_o / C)$ 는 두 시일 링 면사이의 상대 미스얼라인먼트, $\beta (= \beta^* r_o / C)$ 는 정압 부상 미케니즘으로 작용하는 시일 면의 내·외경에 걸친 코닝 또는 경사각을 나타낸다. 한편, 평형상태 중심선 시일 틈새, C , 와 상대 미스얼라인먼트, γ_0 ,로부터 유막 두께의 미소 섭동된 축방향 변위, Z , 와 미스얼라인먼트, γ ,를 고려하면,

$$\begin{aligned} H &= 1 + Z + (\gamma_0 + \gamma)R \sin \theta + \beta(R - R_i) \\ &= H_0 + Z + \gamma R \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $H_0 (= 1 + \gamma_0 R \sin \theta + \beta(R - R_i))$ 는 평형상태의 시일 틈새를 나타낸다. 따라서, 유막 두께의 시간 편미분은

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = Z \quad (4)$$

한 압력의 1차수 전개는

$$P = P_0 + P_z Z + P_\gamma \gamma + P_z \quad (5)$$

(3-5) (1)
의 2차수 이상 항을 무시하여 정리하면, 섭동된 Reynolds 방정식이 얻어진다.

$$\left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R H_0^3 \frac{\partial}{\partial R} \right) \right] \begin{cases} P_0 \\ P_z \\ P_\gamma \\ P_z \end{cases} = \begin{cases} \Lambda \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \\ - \frac{3\Lambda}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{3}{H_0} \right) \frac{H_0^3}{R^2} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{3}{H_0} \right) H_0^3 \frac{\partial P_0}{\partial R} \\ \Lambda R \cos \theta - \frac{3\Lambda R \sin \theta}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{3 \sin \theta}{H_0} \right) \frac{H_0^3}{R} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{3R \sin \theta}{H_0} \right) H_0^3 \frac{\partial P_0}{\partial R} \\ \frac{R}{R \sin \theta} \end{cases} \quad (6)$$

Reynolds 방정식의 Galerkin 유한요소 정식화는 식 (6)의 각 섭동된 방정식에 개개 요소에 대한 다음의 가중 잔여오차 적분(weighted residual integral)을 적용하고 부분적분 전개를 통해 수행된다.

$$\int \int [N]^T R dA = 0 \quad (7)$$

여기서, $[N]$ 는 요소의 형상함수로 정의되는 가중치이며, 잔여오차 합수, R ,는 식 (6)에서 좌·우변의 차이다. 최종적으로 얻어지는, Reynolds 방정식의 유한요소 행렬방정식은

$$[K^e] \begin{cases} P_0^e \\ P_z^e \\ P_\gamma^e \\ P_z \end{cases} = \begin{cases} P_0^e \\ P_z^e \\ P_\gamma^e \\ P_z \end{cases} \quad (8)$$

$$K_{ii}^e = \int \int H_0^3 \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial R} \frac{\partial N_i}{\partial R} \right) dA \quad (8.a)$$

$$\begin{aligned} r_{0,i}^e &= \Lambda \int \int \frac{\partial N_i}{\partial \theta} H_0 dA \\ &+ \int N_i H_0^3 \frac{\partial P_0}{\partial R} dS + \int N_i \left(\frac{H_0^3}{R} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} - \Lambda R H_0 \right) m dS \end{aligned} \quad (8.b)$$

$$\begin{aligned} r_{z,i}^e &= - \int \int \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{3 H_0^2}{R^2} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right. \\ &\left. + \frac{\partial N_i}{\partial R} 3 H_0^2 \frac{\partial P_0}{\partial R} \right) dA + B.L.I. Terms \end{aligned} \quad (8.c)$$

$$\begin{aligned} r_{\gamma,i}^e &= - \int \int N_i \Lambda R \cos \theta dA \\ &- \int \int \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{3 H_0^2 \sin \theta}{R} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right. \\ &\left. - \frac{\partial N_i}{\partial R} 3 R H_0^2 \sin \theta \frac{\partial P_0}{\partial R} \right) dA + B.L.I. Terms \end{aligned} \quad (8.d)$$

r_z

(8.e)

r_y

(8.f)

(8.c-f) *B.L.I. Terms*는 요소 경계에서의 선적분으로 경계에 부가된 유량조건을 나타낸다. 식 (8)로 표현된 개개 요소에 대한 각 행렬방정식은 요소의 연결 공통 절점에서 압력은 같고 유량은 더해진다는 원칙에 따라 식 (9)의 전체방정식으로 조립되며, 여기에 경계조건을 부가하여 압력과 압력의 미분들이 구해진다.

$$[K] \begin{pmatrix} P_0 \\ P_z \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \quad (9)$$

,
 F , 과 미스얼라인먼트에 대한 복원모멘트,
 M , 그리고 내·외경 경계에서의 누설, Q ,
 은 구하여진 평형상태 압력, P_0 , 으로부터
 계산된다.

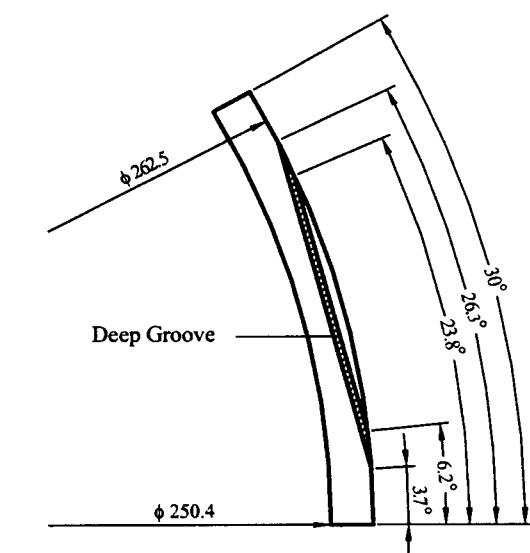


Fig. 4. Plane geometry of a deep straight groove introduced to the ABB-CE primary seal ring face.

$$K_{rr} = - \int \int P_r R \sin \theta \, dA \quad (15)$$

$$D_{rr} = - \int \int P_r \, dA \quad (16)$$

,

$$F = \int \int P_0 \, dA \quad (10)$$

$$M = \int \int P_0 R \sin \theta \, dA \quad (11)$$

$$Q = \sum_i r_{0i} \quad (12)$$

여기서, 식 (12)의 아래첨자 i 는 내경 또는 외경 경계를 따른 누설경로 상의 절점 전부를 나타낸다. 그리고 시일 유막의 축방향 및 각방향 강성과 감쇠계수는 구하여진 압력의 미분들(P_z , P_y)을 갖는다.

$$K_{zz} = - \int \int P_z \, dA \quad (13)$$

$$D_{zz} = - \int \int P_z \, dA \quad (14)$$

$$W = \int \int \frac{R^2}{H} \, dA \quad (17)$$

3. 윤활성능 해석결과

3.1 깊은 직선 홈 시일

ABB-CE (Combustion Engineering)의 냉각재 펌프용 비접촉 미캐니컬 시일 설계는 평면 시일 면의 내·외경에 걸쳐 누설방향으로 적절한 양(positive)의 코닝(coning)과 함께 주시일 링(스테이터) 시일 면의 고압 외경 축에 등 간격으로 동일하게 배열된 12개의 깊은 직선 홈(폭: 1 mm, 깊이: 1.2 mm)을 갖고 있다. Fig. 4는 깊은 직선 홈의 평면 형상을 보여준다. 윤활해석을 위해 시일의 1/4에 대해 생성된 유한요소 메쉬가 Fig. 5에 보여져 있다. 시일의 윤전조건은 Table 1에 정리되어 있다. 주-시일 링의 평형상태는 63,502 N의

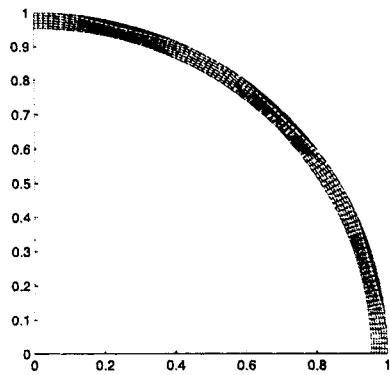


Fig. 5. 1/4 FE mesh of the ABB-CE primary seal ring face.

Table 1. Operating conditions of the RCP seal

Lubricant : hard water

$$\begin{aligned}\mu &= 5.0 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s} \text{ at } 60^\circ\text{C} \\ \omega &= 1,190 \text{ rpm} \\ p_i &= 8.998 \times 10^6 \text{ Pa} \\ p_o &= 1.551 \times 10^7 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Table 2. One set of lubrication performance analysis results of the ABB-CE deep straight groove mechanical face seal

Starting seal clearance (m) = 2.5e-006
Starting normalized coning = 5
Iteration number = 4
Deflection over radii (mm) = 0.000572519
Opening axial force (N) = 63500.9
Closing axial force (N) = 63502
Seal clearance at force equilibrium (m) = 2.17588e-006
Normalized coning at equilibrium seal clearance = 5.7448
Leakage (m^3/s) = 2.5021e-006
Total fluid film heat generation (W) = 249.909
Average fluid film nodal heat generation (W) = 0.0603646
Axial fluid film stiffness (N/m) = 5.059e+008
Axial fluid film damping (N-s/m) = 3.512e+006
Angular fluid film stiffness (N-m/rad) = 3.294e+006
Angular fluid film damping (N-m-s/rad) = 2.858e+004

폐쇄력(closing force)과 평형을 이루는 개방력(opening force)을 발생시키는 C와 β 를 Newton-Raphson으로 구하여 결정되었다. 평형상태에서의 코닝은 $\beta = 5.745$ 이며, 코닝

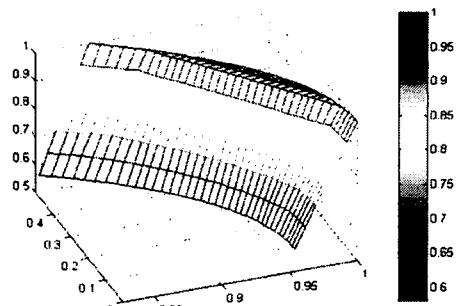


Fig. 6. Magnified P_o distribution at $\beta = 0$ for the ABB-CE seal.

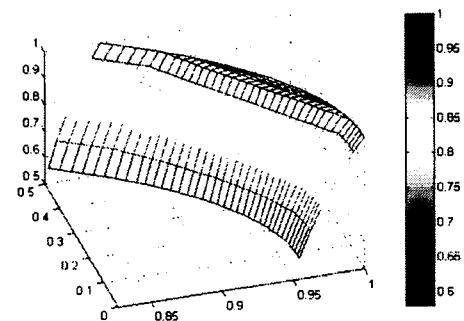


Fig. 7. Magnified P_o distribution at $\beta = 5.745$ for the ABB-CE seal.

의 효과를 보기 위해 $\beta = 0$ 와 $\beta = 5.745$ 에서의 압력분포가 각각 Fig. 6과 7에 나타나 있다. $\beta = 0$ 에서는 시일내·외경을 걸쳐 압력분포가 시일틈새에 관계없이 일직선을 이루는 반면, $\beta = 5.745$ 에서는 압력분포가 불록한 형태를 이루어 결과적으로 개방력이 $\beta = 0$ 때보다 크게 발생한다. 한편, β 는 C에 역 비례하기 때문에, C의 감소는 β 의 증가를 결과적으로는 개방력의 증가를 초래하여, 최종적으로 C를 평형상태로 증가시킨다. 마찬가지로, C의 증가는 β 의 감소를 결과적으로는 개방력의 감소를 초래하여, 최종적으로 C를 평형상태로 감소시킨다.

Table 2에는 초기 $C = 2.5 \mu\text{m}$ 와 $\beta = 5$ 에서 출발하여, 평형상태에 도달하였을 때 시일의 종합 윤활성능 해석결과가 나타나 있으며, 이때의 압력 분포는 Fig. 8에 보여져 있다. Table 2의 해석에서, 5번의 반복 계산을 통해 도달한 평형상태의 시일틈새

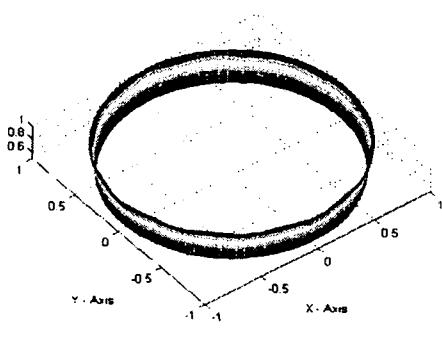


Fig. 8. P_o distribution for the ABB-CE seal.

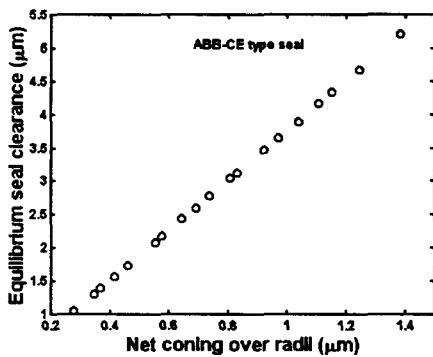


Fig. 9. Equilibrium centerline seal clearance versus net coning for the ABB-CE seal.

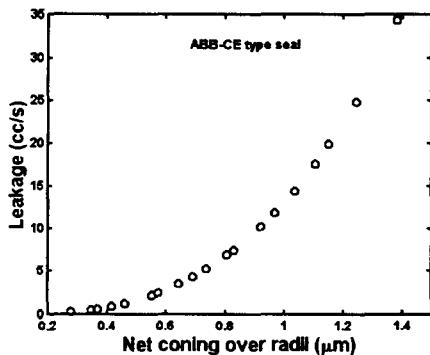


Fig. 10. Leakage versus net coning for the ABB-CE seal.

축방향 및 각방향 강성은 $Q^* = 2.502 \text{ cc/s}$, 그리고 $k_{xx} = 5.059 \times 10^8 \text{ N/m}$ 와 $k_{rr} = 3.294 \times 10^6 \text{ N \cdot m/rad}$ 이다. 이로써,

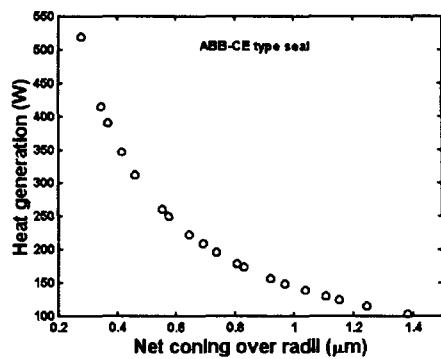


Fig. 11. Heat generation versus net coning for the ABB-CE seal.

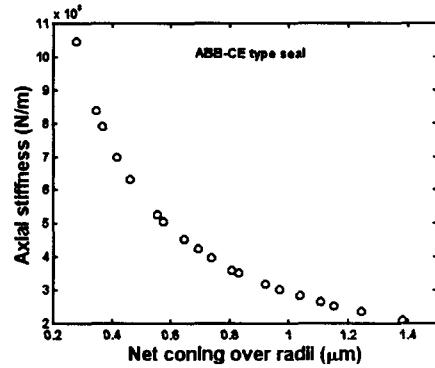


Fig. 12. Axial stiffness versus net coning for the ABB-CE seal.

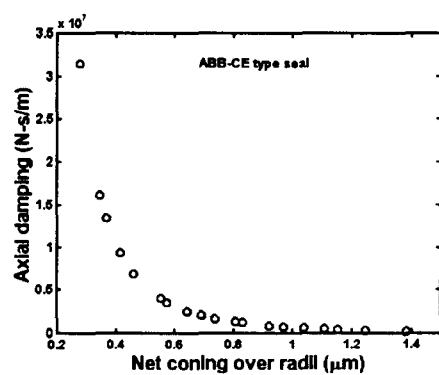


Fig. 13. Axial damping versus net coning for the ABB-CE seal.

RCP 시일에 베어링에 버금가는 매우 큰 축방향 강성이 작용함을 알 수 있다.

시일의 평형상태에서 내·외경에 걸친 총코닝(net coning)의 변화에 따른 시일틈새, 누설량, 발열량, 축방향 강성과 감쇠, 그리고

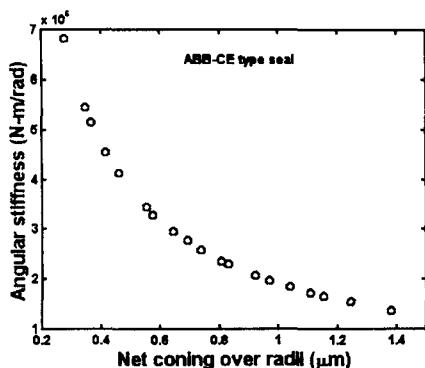


Fig. 14. Angular stiffness versus net coning for the ABB-CE seal.

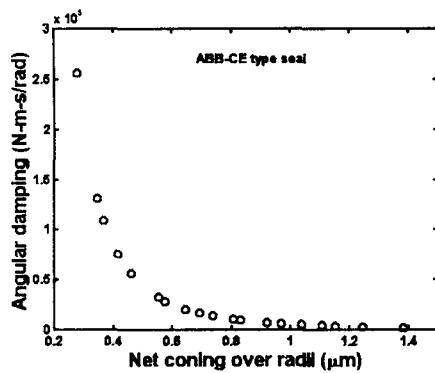


Fig. 15. Angular damping versus net coning for the ABB-CE seal.

Figs. 9-15

있다. 코닝이 증가함에 따라 시일틈새(Fig. 9)는 선형적으로 증가하며, 따라서 누설량(Fig. 10)은 증가하고 발열량(Fig. 11)은 감소하는 것을 볼 수 있다. 또한, 코닝이 증가함에 따라 축방향 강성(Fig. 12)과 감쇠(Fig. 13), 그리고 각방향 강성(Fig. 14)과 감쇠(Fig. 15) 모두 감소하는 것을 볼 수 있으며, 이 역시 코닝의 증가에 따른 시일틈새의 증가에 기인한다. 한편, Fig. 10으로부터 누설량 제한치(2.66 cc/s)를 만족하기 위해서는 총 코닝이 $\beta^* = 0.6 \mu\text{m}$ 으로 관리되어야 함을 알 수 있다. 실제 운전시의 코닝은 기계적 부하 및 열부하에 의한 시일 면의 변형에 의해 결정된다.

3.2 단순 코닝 시일

WH(Westinghouse)의 냉각재 펌프용 미케니컬 시일 설계는 기본적으로 평면 시일 면의 내·외경에 걸쳐 누설방향으로 적절한 양(positive)의 코닝을 갖는 상대적으로 단순한

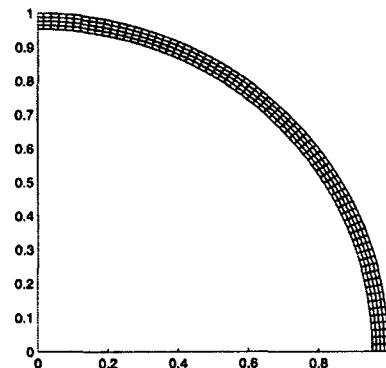


Fig. 16. 1/4 FE mesh of the WH primary seal ring face.

Table 3. One set of lubrication performance analysis results of the WH plane coning mechanical face seal

Starting seal clearance (m) = 2.5e-006
Starting normalized coning = 13
Iteration number = 5
Deflection over radii (mm) = 0.0014981
Opening axial force (N) = 63500.94
Closing axial force (N) = 63502
Seal clearance at force equilibrium (m) = 1.85182e-006
Normalized coning at equilibrium seal clearance = 17.5503
Leakage (m^3/s) = 2.1746e-006
Total fluid film heat generation (W) = 241.705
Average fluid film nodal heat generation (W) = 0.168436
Axial fluid film stiffness (N/m) = 1.523e+009
Axial fluid film damping (N·s/m) = 4.694e+006
Angular fluid film stiffness (N·m/rad) = 1.142e+007
Angular fluid film damping (N·m·s/rad) = 3.830e+004

표면형상을 갖고 있다. Fig. 16은 윤활해석을 위해 시일의 1/4에 대해 생성된 유한요소 메쉬를 보여준다. 시일의 운전조건은 Table 1과 동일하다. 주-시일 링의 평형상태는 ABB-CE 시일과 마찬가지로 63,502 N의 폐쇄력과 평형을 이루는 개방력을 발생시키는 C와 β 를 Newton-Raphson으로 구하여 결정되었다. 평형상태에서 얻어진 코닝은 $\beta = 17.550$ 으로 ABB-CE 시일에 비해 약 3배 증가한 값이며, 이는 WH 시일에서 힘의 평형을 위해 보다 심한 정도의 불록한 압력분포가 요구되기 때문이다(ABB-CE 시일에서는 깊은 흄에 외경 압력 p_o 가 작용하기 때문에 동일한 코닝에서 원천적으로 개방력이 보다 크게 발생한다).

Table 3에는 초기 $C = 2.5 \mu m$ 와 $\beta = 13$ 에서 출발하여, 평형상태에 도달하였을 때 시일의 종합 윤활성능 해석결과가 나타나 있다. Table 3의 해석에서, 5번의 반복 계산을 통해 도달한 평형상태의 시일틈새는 $C = 1.852 \mu m$, 누설량은 $Q^* = 2.175 cc/s$, 그리고 축방향 및 각방향 강성은 $k_{xx} = 1.523 \times 10^9 N/m$ 와 $k_{rr} = 1.142 \times 10^7 N \cdot m/rad$ 이다. ABB-CE 시일에 비해 두 강성 값이 보다 크게 나타난 것은 WH 시일의 평형상태 시일틈새가 보다 작은 것으로 설명된다.

4. 결 론

본 연구에서는 비접촉 미캐니컬 시일의 비압축성 윤활해석을 위해 Galerkin 유한요소 윤활해석 기술을 개발하였으며, 이를 적용하여 깊은 직선 홈(deep straight groove, ABB-CE design)과 단순 코닝(plane coning, WH design)을 주-시일 링 면에 채택하고 있는 국내 원자력 발전소의 원자로 냉각재 펌프용 시일의 윤활성능 해석을 수행하였다. 주요 해석결과는 다음과 같다.

- ABB-CE 깊은 직선 홈 시일은 시일의 주요 고장모드인 누설량 제한 만족을 위해 시일의 기계적 변형 및 열변형을 고려한 총 코닝이 $\beta^* = 0.6 \mu m$ 이하로 설계되어야 하는 것으로 분석된다.
- 패쇄력과 평형을 이루는 동일한 개방력을 얻기위해, WH 단순 코닝 시일은 ABB-CE 깊은 홈 시일에 비해 3배 정도 큰 무차원 코닝을 요구한다.

후 기

본 연구는 부분적으로 과학기술부 민군겸용기술사업 “과제번호: M1-0209-00-0004”의 지원으로 수행되었습니다. 연구를 지원해주신 관계자 여러분께 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Ludwig, L. P. and Lynwander, P., “Mainshaft Seals for Small Gas Turbine Engines ,” ASLE Trans., Vol. 10, No. 1, pp. 33-47, 1975.
2. Reddi, M. M, “Finite-Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem,” ASME Trans. Journal of Lubrication Technology, pp. 524-533, 1969.
3. Reddi, M. M. and Chu, T. Y., “Finite Element Solution of the Steady-State Compressible Lubrication Problem,” ASME Trans. Journal of Lubrication Technology, pp. 495-503, 1970.
4. Booker, J. F. and Huebner, K. H., “Application of Finite Element Methods to Lubrication: An Engineering Approach,” ASME Trans. Journal of Lubrication Technology, pp. 313-323, 1972.
5. Cheng, H. S. and Pan, C. H. T., “Stability Analysis of Gas-Lubricated Self-Acting, Plain, Cylindrical, Journal Bearings of Finite Length, Using Galerkin's Method,” ASME Journal of Basic Engineering, 1965.
6. Zuk J., “Compressible Seal Flow Analysis Using the Finite Element Method with Galerkin Solution Technique,” ASLE Trans., Vol. 19, No. 1, pp. 61-71, 1975.
7. Cook, R. B., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1989.
8. Burnett, D. S., Finite Element Analysis from Concepts to Applications, Addison-Wesley Publishing Co., 1988.
9. 최병렬, 이안성, 최동훈, “미캐니컬 페이스 실의 윤활 최적설계,” 대한기계학회 논문집 A권, 제24권, 제12호, pp. 2989-2994, 2000.
10. 최병렬, 이안성, 최동훈, “갤러킨 유한요소해석법을 이용한 미캐니컬 페이스 실의 윤활성능해석,” 대한기계학회논문집 A권, 제25권, 제6호, pp. 916-922, 2001.