퍼지-베이지안 방법에 대한 연구[1)]

계태화[2)], 손중권[3)]

요약

퍼지-베이즈 의사 결정시에 사전 분포 함수와 멤버십 함수에 따라서 퍼지-베이즈 의사 결정이 얼마나 민감하게 반응하는지 알기 위하여 연구를 진행하였다. 두 가지 퍼지 조건과 행동에서 θ 의 사전 분포가 정규분포와 균등분포인 경우와 표본분포가 정규분포인 경우에 대하여 민감성을 조사했다.

주요용어: 퍼지-베이안, 멤버십함수, 효용함수, 효용값, 최적행동, 민감성

1. 서론

확률적 사건에 의해 발생되는 의사결정 문제에서 인간의 사고나 주관에 내재된 모호성을 쉽게 발견할 수 있다. 가령 물건을 판매할 때 '많이 팔린다' 라고 하였을 때 얼마나 팔려야 많이 팔리는 것인지 개인에 따라 기준이 다르며 따라서 이에 해당하는 어떤 결정을 명확하게 할 수 없다. 이러한 주관의 모호성을 비교적 왜곡되지 않게 표현하고자 하는 방법이 퍼지이론이다. 퍼지이론은 Zadeh(1965)에 의해 처음으로 제안된 이후 다양하게 여러 분야에 응용되고 있다. 이런 퍼지 이론에 베이지안 방법을 접목한 퍼지-베이지안 방법은 Tanaka(1979) 등에 의해 제안되어 연구되어 오고 있다. 본 논문에서는 퍼지-베이지안 의사결정 방법에 대해서 알아보고 퍼지-베이지안 방법에 있어서 멤버십 함수와 효용 함수 그리고 사전분포에 따른 민감 정도를 연구하였다

2. 퍼지-베이지안 방법

퍼지-베이지안 방법은 베이즈 이론에 근거하고 있다. 단 베이즈 이론은 손실함수에 근거하여 결정하는 반면 Tanaka가 제시한 방법에서는 효용함수를 사용하고 있다. 하지만 효용함수는 손실함수와 부화 반대일 뿐 다른 부분은 동일하다. 따라서 퍼지-베이지안 방법에서의 최적 행동은 최대의 기대 효용값을 갖는 행동 결정할 것이다.

퍼지-베이지안 문제는 $<\mathcal{F},\ \mathcal{A},\ U^*,\ \xi,\ \Xi>$ 로 표현하며, 여기서 $\mathcal{F} = \{F_1,\ F_2, \cdots, F_n\}$ 는 퍼지 조건들의 집합이고 F_k는 Ξ 상에서의 퍼지 사건이다. $\mathcal{A} = \{A_1,\ A_2,\ \cdots, A_m\}$ 은 행동집합이다. U^* 는 $\mathcal{A} \times \mathcal{F}$ 상에서의 효용함수이다. $\xi(\theta)$는 Ξ 상에서의 θ 에 대한 사전 분포함수이다. 멤버십 함수는 퍼지 조건들에 대한 직교조건, 즉 $\sum_{k=1}^{n} \mu_{F_k}(\theta) = 1$ 이 성립된다고

1) 이 논문은 2002년도 경북대학교의 연구비에 의하여 연구되었음.

2) 경북대학교 통계학과 석사

3) 경북대학교 통계학과 교수

한다. 그러면 퍼지 조건 F_k에 대한 확률을 $P(F_k)=\int_\theta \mu_{F_k}(\theta)\xi(\theta)d\theta,\quad k=1,2,\cdots,n$ 과 같이 정의된다. 아울러 행동 A_i에 대한 효용 함수는 $U^*(A_i)=\sum_k U^*(A_i,F_k)P(F_k)$ 와 같이 정의된다. 따라서 최적행동 A° 는 $U^*(A^\circ)\equiv \max_i U^*(A_i)\quad i=1,2,\cdots,m$ 과 같이 정의 된다 . 즉 최대의 기대 효용값을 주는 행동을 가장 적합한 행동으로 볼 수 있다. θ에 대한 사전분포 $\xi(\theta)$가 주어져 있을 때 θ에 대한 사후 분포는 $\xi(\theta\mid x)$라 하자. 여기서 $f(x)$는 x에 대한 주변 밀도 함수이다. 퍼지 사건의 확률 정의로부터 퍼지 사건도 다음과 같이 유도할 수 있다. 이것을 퍼지-베이즈 규칙이라 부르며 다음과 같이 표현된다.

$$P(F_K\mid x)=\int_\theta \mu_{F_k}(\theta)f(x\mid\theta)\xi(\theta)/f(x).$$

아울러 효용함수는 $U^*(A_i\mid x)\equiv\sum_k U^*(A_i,F_k)P(F_k\mid x)$ 과 같이 주어지며 최적 행동 $A_x^\cdot$은 $U^*(A_x^\cdot\mid x)\equiv\max_i U^*(A_i\mid x)$ 과 같이 정의된다. 여기서 우리는 다음과 같이 말할 수 있다. 즉 관측공간 X에 대한 조건부 확률 $f(x\mid\theta)$가 주어져 있을 때 X내의 어떤 x가 발생할지를 알 경우, θ를 알지 못하더라도 x를 이용해 가장 적합한 행동을 판단할 수 있다. 또 x에 대한 기대값은 $U^*(A_x^\cdot)\equiv\sum_j U^*(A_x^\cdot\mid x)f(x)$ 이다.

3. 민감성 분석

의사결정은 퍼지 효용 함수 $U^*(A_i,F_j)$ 가 주어져 있을 때 퍼지 사건의 멤버십 함수와 사전분포가 변함에 따라 의사결정이 얼마나 민감하게 영향을 받는지 연구하고자 한다.

퍼지-베이즈 의사 결정 $<\mathcal{F},\ \mathcal{A},\ U^*,\ \xi,\ \Xi>$은 $\mathcal{F}=\{F_1,\ F_2\}$ 의 두 가지 퍼지 조건만 고려한다. 퍼지 조건에 따른 행동 집합도 $\mathcal{A}=\{A_1,\ A_2\}$ 만 고려한다. 또 θ의 사전분포 $\xi(\theta)$는 $N(m,\sigma^2)$ 와 $U(p,q)$인 경우와 $x\mid\theta$의 분포가 $f(x\mid\theta)$는 $N(\theta,\ \tau^2)$ 인 경우에 조사한다. 민감성을 연구하기 위해 다음과 같은 임의의 퍼지 효용함수를 정의한다. 퍼지 효용함수의 퍼지 조건 F_1은 회사의 상품판매량이 많은 경우이고 F_2는 상품판매량이 적은 경우로 정의한다. 퍼지 행동 A_1은 그 상품에 대한 광고를 꾸준히 하는 행동이고 A_2는 그 상품을 대체할 새로운 상품을 개발하도록 연구하는 행동으로 정의한다. 퍼지 효용함수는 각각의 퍼지 조건에서 퍼지 행동을 하게 될 때 기대되는 효용을 나타내는 함수이다. 각각의 퍼지 조건과 퍼지 행동에 따른 퍼지 효용함수는 아래 표 3.1과 같이 정의한다.

퍼지 조건 / 퍼지 행동	F1	F2
A1	800	-300
A2	500	200

표 3.1 퍼지 효용 함수 $U^*(A_i,F_k)$

θ의 퍼지 조건 F_1, F_2에 대한 멤버십 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_{F_1}(\theta)=\begin{cases}1 & m+a<\theta \\ \frac{1}{2a}(\theta-m+a) & m-a\le\theta\le m+a \\ 0 & \theta<m-a\end{cases},$$

$$\mu_{F_2}(\theta)=\begin{cases}0 & m+a<\theta \\ -\frac{1}{2a}(\theta-m-a) & m-a\le\theta\le m+a \\ 1 & \theta<m-a\end{cases}.$$

θ의 사전 분포 $\xi(\theta)$가 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르고 , $f(x\mid\theta)$ 가 $N(\theta,\ \tau^2)$ 를 따르는 경우 사후 분포는 $\xi(\theta\mid x)\sim N\left(\frac{m\tau^2+x\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2},\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\right)$ 이다. 여기서

$\frac{m\tau^2+x\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2}=A$ 와 $\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}=B$ 라 두면 다음과 같이 계산되어진다.

$$P(F_1\mid x)\equiv 1-\Phi\left(\frac{m+a-A}{B}\right)+\frac{A-m+a}{2a}\cdot\left\{\Phi\left(\frac{m+a-A}{B}\right)-\Phi\left(\frac{m-a-A}{B}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{2a}\cdot\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left\{e^{-\frac{(m+a-A)^2}{2B^2}}-e^{-\frac{(m-a-A)^2}{2B^2}}\right\},$$

$$P(F_2\mid x)=\Phi\left(\frac{m-a-A}{B}\right)-\frac{A-m-a}{2a}\cdot\left\{\Phi\left(\frac{m+a-A}{B}\right)-\Phi\left(\frac{m-a-A}{B}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{2a}\cdot\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left\{e^{-\frac{(m+a-A)^2}{2B^2}}-e^{-\frac{(m-a-A)^2}{2B^2}}\right\}.$$

따라서 각각의 행동의 기대 효용값은 다음과 같다.

$$U^*(A_1\mid x)\equiv U^*(A_1,F_1)P(F_1\mid x)+U^*(A_1,F_2)P(F_2\mid x),$$

$$U^*(A_2\mid x)\equiv U^*(A_2,F_1)P(F_1\mid x)+U^*(A_2,F_2)P(F_2\mid x).$$

$$U^*(A_i\mid x)=U^*(A_i,F_1)\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{m+a-A}{B}\right)+\frac{A-m+a}{2a}\cdot\left\{\Phi\left(\frac{m+a-A}{B}\right)-\Phi\left(\frac{m-a-A}{B}\right)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2a}\cdot\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left\{e^{-\frac{(m+a-A)^2}{2B^2}}-e^{-\frac{(m-a-A)^2}{2B^2}}\right\}\right]+U^*(A_i,F_2)\cdot\left[\Phi\left(\frac{m-a-A}{B}\right)\right.$$
$$-\frac{A-m-a}{2a}\cdot\left\{\Phi\left(\frac{m+a-A}{B}\right)-\Phi\left(\frac{m-a-A}{B}\right)\right\}$$
$$\left.+\frac{1}{2a}\cdot\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left\{e^{-\frac{(m+a-A)^2}{2B^2}}-e^{-\frac{(m-a-A)^2}{2B^2}}\right\}\right].$$

최적 행동을 결정하기 위해서 각 행동의 효용의 차이를 $distance(x)=U^*(A_1\mid x)-U^*(A_2\mid x)$라 정의하면 $distance(x)$가 양수일 경우 A_1이 최적 행동이고 음수일 경우 A_2가 최적 행동이다. $distance(x)$는 주어진 효용함수에서 $distance(x)$=0 인 경우의 x를 알면 x에 따른 최적 행동의 알 수 있다. 멤버십 함수에 따른 민감도를 조사하기 위해 멤버십 함수의 결정 범위인 a를 변화시키면서 결정의 민감도를 연구하였다. 각각의 a 에 대한 $distance(x)$는 표 3.2와 같다.

θ	x |θ	a	distance(x)=0 =>x
N(0,1)	N(θ,1)	1	0.602214
N(0,1)	N(θ,1)	2	1.008701
N(0,1)	N(θ,1)	5	2.5
N(0,1)	N(θ,1)	10	5

표 3.2 멤버십 함수의 결정 범위에 따른 효용값

멤버십 함수의 결정 범위인 a가 변해감에 따라서 x에 따른 의사 결정변화는 x가 조금 더 큰 값에서 변화가 일어나고 있다. 멤버십 함수에 따른 민감도를 조사하기 위해 멤버십 함수의 결정 범위인 a를 변화시키면서 결정의 민감도를 연구하였다. 각각의 a 에 대한 *distance(x)*를 계산한 결과 다음의 표 3.3과 같이 얻어졌다.

θ	x |θ	a	distance(x)=0 =>x
N(0,1)	N(θ,1)	1	0.602214
N(0,1)	N(θ,1)	2	1.008701
N(0,1)	N(θ,1)	5	2.5
N(0,1)	N(θ,1)	10	5

표 3.3 멤버십 함수의 결정 범위에 따른 효용값

멤버십 함수의 결정 범위인 a가 변해감에 따라서 x에 따른 의사 결정변화는 x가 조금 더 큰 값에서 변화가 일어나고 있다. 또 사전 분포 함수에 따른 민감도를 조사하기 위해 θ의 사전 분포 함수의 분산을 변화시키면서 결정의 민감도를 연구하였다. 각각의 분산에 대한 *distance(x)*를 계산한 결과 다음의 표 3.4와 같다.

θ	x |θ	a	distance(x)=0 =>x
N(0,1)	N(θ,1)	1	0.602214
N(0,4)	N(θ,1)	1	0.4311747
N(0,9)	N(θ,1)	1	0.3986417
N(0,16)	N(θ,1)	1	-0.7551367

표 3.4 θ의 사전 분포의 분산 변화에 따른 효용값

θ의 사전 분포 함수의 분산의 범위가 변함에 따라서 의사 결정은 x가 조금 더 작은 값에서 변화가 일어나고 있다. θ가 주어졌을 때 x의 분포에 따른 민감도를 알아보기 위하여 x의 함수의 분산을 변화시키면서 결정의 민감도를 연구하였다. 각각의 분산에 대한 *distance(x)*를 계산한 결과 다음의 표 3.5와 같이 얻어졌다.

θ	x |θ	a	distance(x)=0 =>x
N(0,1)	N(θ,1)	1	0.602214
N(0,1)	N(θ,4)	1	1.724699
N(0,1)	N(θ,9)	1	3.587775
N(0,1)	N(θ,16)	1	6.194054

표 3.5 x | θ 의 분산 변화에 따른 효용값

θ가 주어졌을 때 x의 분포에서 분산의 범위가 변해감에 따라서 의사 결정은 x가 큰 값에서 변화가 일어난다. θ가 주어졌을 때 x의 분포에 따른 민감도를 알아보기 위하여 θ의 분산이 4일 때 x의 함수의 분산을 변화시키면서 결정의 민감도를 연구하였다. 각각의 분산에 대한 *distance(x)*를 계산한 결과 다음의 표 3.1.4와 같이 얻어졌다.

θ	x |θ	a	distance(x)=0 =>x
N(0,4)	N(θ,1)	1	0.602214
N(0,4)	N(θ,4)	1	0.9767627
N(0,4)	N(θ,9)	1	1.827457
N(0,4)	N(θ,16)	1	2.998982

표 3.1.4 x | θ 의 분산 변화에 따른 효용값

θ의 사전분포의 분산이 4로 주어졌을 때 x의 분포에서 분산의 범위가 변해감에 따라서 의사 결정은 x가 큰 값에서 변화가 일어난다

θ의 사전 분포 $\xi(\theta)$가 균등분포 $U(p,\ q)$(단 $p<q$)를 따르고 , $f(x \mid \theta)$ 가 $N(\theta,\ \tau^2)$ 를 따르는 경우 θ의 사후 분포는 다음과 같이 얻어진다.

$$\xi(\theta \mid x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\tau^2}}}{\Phi\left(\frac{q-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{p-x}{\tau}\right)} .$$

$\Phi\left(\frac{q-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{p-x}{\tau}\right) = A$ 라 두면 다음과 같이 계산되어진다.

$$P(F_1 \mid x) = \frac{1}{A}\left\{\Phi\left(\frac{q-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{m+a-x}{\tau}\right)\right\} + \frac{-m+a+x}{2aA} \cdot \left\{\Phi\left(\frac{m+a-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{m-a-x}{\tau}\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{2aA} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{e^{-\frac{(m+a-x)^2}{2\tau^2}} - e^{-\frac{(m-a-x)^2}{2\tau^2}}\right\} ,$$

$$P(F_2 \mid x) = \frac{1}{A}\left\{\Phi\left(\frac{m-a-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{p-x}{\tau}\right)\right\} + \frac{m+a-x}{2aA} \cdot \left\{\Phi\left(\frac{m+a-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{m-a-x}{\tau}\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{2aA} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{e^{-\frac{(m+a-x)^2}{2\tau^2}} - e^{-\frac{(m-a-x)^2}{2\tau^2}}\right\} .$$

또 각각의 행동의 기대 효용값은 다음과 같다.

$$U^*(A_1 \mid x) \equiv U^*(A_1, F_1)P(F_1 \mid x) + U^*(A_1, F_2)P(F_2 \mid x) ,$$

$$U^*(A_2 \mid x) \equiv U^*(A_2, F_1)P(F_1 \mid x) + U^*(A_2, F_2)P(F_2 \mid x) ,$$

$$U^*(A_i \mid x) = U^*(A_i, F_1)\left[\frac{1}{A}\left\{\Phi\left(\frac{q-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{m+a-x}{\tau}\right)\right\} + \frac{-m+a+x}{2aA}\left\{\Phi\left(\frac{m+a-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{m-a-x}{\tau}\right)\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2aA} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{e^{-\frac{(m+a-x)^2}{2\tau^2}} - e^{-\frac{(m-a-x)^2}{2\tau^2}}\right\}\right] + U^*(A_i, F_2) \cdot \left[\frac{1}{A}\left\{\Phi\left(\frac{q-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{m+a-x}{\tau}\right)\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{m+a-x}{2aA} \cdot \left\{\Phi\left(\frac{m+a-x}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{m-a-x}{\tau}\right)\right\} - \frac{1}{2aA} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{e^{-\frac{(m+a-x)^2}{2\tau^2}} - e^{-\frac{(m-a-x)^2}{2\tau^2}}\right\}\right].$$

따라서 사전 분포가 정규분포를 따르는 경우와 같이 *distance*(x)=0 인 경우의 x를 알면 x에 따른 최적의 행동의 알 수 있다. 멤버십 함수에 따른 민감도를 조사하기 위해 멤버십 함수의 결정 범위인 a를 변화시키면서 결정의 민감도를 연구하였다. 각각의 a 에 대한 *distance*(x)를 계산한 결과 다음의 표 3.2.1과 같이 얻어졌다.

θ	x |θ	a	distance(x)=0=>x
U(-10,10)	N(θ,1)	1	0.1957895
U(-10,10)	N(θ,1)	2	0.4080407
U(-10,10)	N(θ,1)	5	1.249581
U(-10,10)	N(θ,1)	10	2.5

표 3.2.1 멤버십 함수의 결정 범위에 따른 효용값의 변화

멤버십 함수의 결정 범위인 a가 변해감에 따라서 x에 따른 의사 결정변화는 x가 조금 더 큰 값에서 변화가 일어나고 있다.θ가 주어졌을 때 x의 분포에 따른 민감도를 알아보기 위하여 a=1로 고정하고 θ의 분산이 1일 때 x의 함수의 분산을 변화시키면서 결정의 민감도를 연구하였다. 각각의 분산에 대한 *distance*(x)는 다음의 표 3.2.2와 같이 얻어졌다.

θ	x |θ	distance(x)=0 =>x
U(-10,10)	N(θ,1)	0.1957895
U(-10,10)	N(θ,4)	0.3060125
U(-10,10)	N(θ,9)	0.4378265
U(-10,10)	N(θ,16)	0.5776098

표 3.2.2 x | θ 의 분산 변화에 따른 효용값의 변화

θ가 주어졌을 때 x의 분포에서 분산의 범위가 변해감에 따라서 의사 결정은 x가 큰 값에서 변화가 일어난다.

4. 결론

본 연구 결과 퍼지-베이즈 의사결정은 사전분포가 정규분포이든지 균등분포이든지 퍼지 조건의 멤버십 함수의 결정범위가 증가할 때 결정변화가 큰 값에서 일어남을 알 수 있다. 그러나 정규분포에 비해 균등분포는 변화가 덜 민감함을 알 수 있다. 사전분포 함수가 정규분포를 따를 때 사전분포 함수의 분산이 증가하면 결정변화는 더 작은 값에서 일어남을 알 수 있다. 사전분포 함수가 주어져 있을 때 x의 분산이 증가함에 따라 결정변화는 더 큰 값에서 일어남을 알 수 있다. 추후에 멤버십 함수와 사전 분포가 다른 여러 가지 분포를 따르는 경우에도 퍼지-베이즈 의사결정이 얼마나 민감하게 반응하는지 연구가 진행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] Terano, T., Asai, K. and Sugeno, M. (1992) *Fuzzy systems theory and its application,* Academic Press, Inc.

[2] Tanaka, H., Okuda, T. and Asai, K(1979), Fuzzy information and Decision in Statistical Model, Advanced in Fuzzy set theory and applications (editors : Gupta, M. M., Ragade, R. K. and Yager, R. R.)

[3] Janikow, C, Z.(1996), Fuzzy Decision Trees: Issues and Methods, IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Vol. 28, Issue 1, pp 1-14.

[4] Abonyi, A and Roubos, J. A.(2000), Structure identification of fuzzy classifiers, 5th Online World Conference on soft Computing in Industrial Applications(WSC5)

[5] Selvin, S. (1998) *Modern applied biostatistical methods using s-plus,* Oxford University Press.