

시간영역 유한 차분법과 민감도 해석법을 이용한 새로운 2차원 역산란 알고리즘

허창근*, 강노원*, 천창률**, 정태경***, 정현교*
 *서울대학교, **서울시립대학교, ***중앙대학교

A New 2-D Image Reconstruction Algorithm Based FDTD and Design Sensitivity Analysis

Chang-keun Heo*, No-Weon Kang*, Chang-yul Cheon**, Tae-Kyung Chung***, Hyun-Kyo Jung*
 *Seoul National University, **University of Seoul, ***Chung-Ang University

Abstract - 본 논문에서는 설계민감도 해석법과 위상최적화 기법을 사용하여 산란체의 물질상수 분포를 알기위한 수치해석 알고리즘을 제안하였다. 설계민감도 해석법과 보조변수법을 사용하여 복소 유전율에 대한 목적함수의 미분정보를 계산하였고 이 민감도 정보를 통해 물질정보를 최적화 하였다. 최적화 기법으로 최대경사법(Steepest descent Method)을 사용하였으며 이 제안한 해석 기법을 2차원 TMz 모델에 적용함으로써 검증하였다.

1. 서 론

전자계 산란파의 물질정보를 찾아내기 위한 노력은 최근 의학등의 분야에 적용되면서 활발히 연구되고 있다. 이런 역산란 문제의 해석기법은 측정데이터와 계산 데이터 사이의 차이를 최소화하는 알고리즘이며 기존의 역산란 문제 접근에 있어 측정데이터의 부족이나 비선형 문제 해석시 어려움이 있었다. 전자파 역산란 문제를 풀기위한 수치해석 방법으로 모멘트법(MoM), 유한요소법(FEM), 경계 요소법(BEM)등을 많이 사용하고 있다. 시간영역에서 역산란 문제를 해석하기 위한 시간영역 유한 차분법 알고리즘도 Chew, Hagness 등에 의해 많이 연구되고 있다.[1,2] 유한요소법과 설계민감도 법을 이용한 역산란 문제해석기법은 이미 연구되었고 최근 역산란 문제를 시간영역 유한 차분법과 설계민감도 법을 이용하여 해석하는 또다른 최적화 기법이 활발히 연구되고 있다. 설계민감도 해석법은 목적함수를 통해 설계 변수를 해석하는 것으로써 본 논문에서는 이러한 설계민감도 해석법과 시간영역 유한 차분법을 이용한 새로운 역산란 문제 해석 알고리즘을 제안하였다. 또한 효과적으로 목적함수의 미분정보를 계산하기위해 보조 변수법을 사용하였다. 제안된 알고리즘은 두 가지의 해석과정으로 나눌 수 있다. 하나는 전자파 정문제 해석과정이고 다른 하나는 물질정보의 민감도를 해석하는 보조변수 방정식의 해석 과정이다.

2. 본 론

2.1 기본 공식

그림1과 같이 해석영역 내부의 산란체에 송신안테나를 이용하여 평면파를 입사시키면 산란파가 발생되어 수신 안테나에서 그 정보를 얻게 된다. 이렇게 측정된 정보와 임의의 초기값을 넣어서 계산한 산란체 물질정보의 차이를 최소화 시킴으로써 산란체 내부의 물질 정보를 추출해 낼 수 있다. 그러므로 목적 함수는 측정된 E_m^s 값과 임의의 물질정보를 통해 계산된

E_m^c 의 차를 최소화 하기위해 다음과 같이 정의한다.

$$F = \frac{1}{2} \sum_T \int_0^{T_f} \{ E_c^s |_{ij} - E_m^s |_{ij} \}^2 dt \quad (1)$$

N_T 는 입사파를 발생시키는 송신안테나의 수이며 N_R 는 산란파를 받는 수신안테나의 수이다. T_f 는 총 해석 시간이며, E_m^s 는 실제 안테나를 통해 측정된 전계 크기이고 E_c^s 는 가정한 물질정보를 이용해 계산된 전계의 크기이다. 식(1)에 변수 벡터 $\{p\}$ 에 관해 일차 미분을 취하여 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{dF}{d\{p\}} = \frac{1}{2} \sum_T \sum_R \int_0^{T_f} \frac{\partial G_{ij}}{\partial \{p\}} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial E_c^s |_{ij}} \frac{\partial E_c^s |_{ij}}{\partial \{p\}} dt \quad (2)$$

단, $G_{ij} = (E_c^s |_{ij} - E_m^s |_{ij})^2$ 이다.

$\frac{dF}{d\{p\}}$ 의 항을 직접법을 통하여 구할 수 있지만 계산 시간 단축을 위하여 보조변수법을 사용한다.

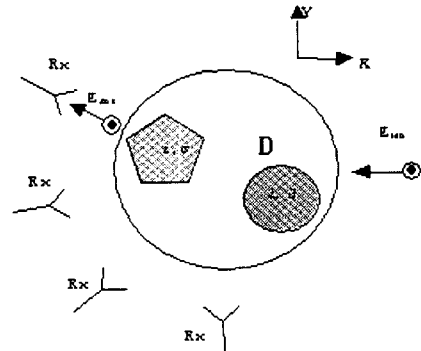


그림1. 2차원 역산란 해석 모델의 예

2.1.1 FETD에서 설계민감도 해석법

시간영역 유한차분법으로 역문제를 해석하고자 할 때 보조변수법을 직접적으로 적용할 수 없기 때문에 민감도 정보를 바로 얻을 수 없다. 때문에 FETD(Finite-Element Time-Domain Method)에서 보조 변수법을 이용해 방정식을 구해야한다. 이렇게 구한 보조변수 방정식을 맥스웰 방정식과 결합하면 시간영역 유한차분법에서 이용 가능하다. 2차원 TMz 맥스웰 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 E_z - \frac{\epsilon_r}{C_0^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial E_z}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial J_z}{\partial t} \quad (3)$$

ϵ_r 은 비유전율, σ 는 도전율 c_0 는 자유공간에서 빛

의 속도, J_z 는 전류원을 나타낸다. 식(3)에 Galerkin 방법을 적용하면 (4)의 행렬식으로 표현 할수 있다.

$$[K]\{e_z\} + [M]\{\ddot{e}_z\} + [B]\{\dot{e}_z\} = \{Q\} \quad (4a)$$

$$e_z(0) = 0 \quad (4b)$$

$$\dot{e}_z(0) = 0 \quad (4c)$$

e_z 는 2차원 TMz그리드에서 각 절점의 z방향전계성분이고 \cdot 은 시간에 대한 미분을 의미한다. 이때, 행렬 $[K]$, $[M]$, $[B]$, $[Q]$ 는 다음과 같다.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nabla N_i \nabla N_j d\Omega^e \quad (5a)$$

$$B_{ij}^e = \mu_0 \int_{\Omega_e} \sigma^e N_i N_j d\Omega^e \quad (5b)$$

$$M_{ij}^e = \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_e} \epsilon_r^e N_i N_j d\Omega^e \quad (5c)$$

$$Q_i^e = -\mu_0 \int_{\Omega_e} N_i J d\Omega^e \quad (5d)$$

N_i 는 형상함수이며 보조변수 λ 를 사용하여 (4)식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$[K]\{\lambda\} + [M]\{\dot{\lambda}\} + [B]\{\lambda\} = \left\{ \frac{\partial G}{\partial E_c^s} \right\} \quad (6)$$

$$\lambda(T_f) = \dot{\lambda}(T_f) = 0 \quad (7)$$

산란과 계산을 위해서 $\tau = T_f - t$ 의 역 시간 계산이 필요하며 식(2),(6)을 사용하여 민감도를 다음과 같이 구한다.

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_r} = \sum_r \sum_j \int_0^{T_j} \lambda^T \frac{\partial}{\partial \epsilon_r} R(t, \epsilon_r, \sigma) dt \quad (8a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \sum_r \sum_j \int_0^{T_j} \lambda^T \frac{\partial}{\partial \sigma} R(t, \epsilon_r, \sigma) dt \quad (8b)$$

$$R(t, \epsilon_r, \sigma) = \{Q\} - \{M\}\{\ddot{e}_z\} - \{B\}\{\dot{e}_z\} - \{K\}\{e_z\} \quad (9)$$

행렬 $[M]$ 은 ϵ_r 에 독립적이고 $[B]$ 는 σ 에 독립적이다.

2.1.2 FDTD에서 설계민감도 해석법

유일성의 정리에 의해 식(6)은 다음과 같은 맥스웰 방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda^{E_s}}{\partial y} = -\frac{\partial \lambda^{B_s}}{\partial t} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \lambda^{E_z}}{\partial x} = -\frac{\partial \lambda^{B_z}}{\partial t} \quad (10b)$$

$$\frac{\partial \lambda^{H_s}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda^{H_z}}{\partial y} - \sigma \lambda^{E_z} = \frac{\partial \lambda^{D_z}}{\partial t} + J_z^i \quad (10a)$$

또한 이러한 보조 변수들은 전자계 벡터로서 다음을 만족한다.

$$\lambda^{E_z}(T_f) = \lambda^{H_s}(T_f) = \lambda^{H_z}(T_f) = 0. \quad (11)$$

$$\vec{\lambda}^D = \epsilon \vec{\lambda}^E \quad (12)$$

$$\vec{\lambda}^B = \mu \vec{\lambda}^H \quad (13)$$

J_z 는 무한히 작은 전류원이며 시간영역 유한 차분법에서 사용가능한 형태로 나타내기위 위해 다음의 과정을 거친다.[18]

$$\frac{\partial G}{\partial E_z} = \mu_0 \int_{\Omega_m} N_i \dot{J}_z^i d\Omega \quad (14)$$

$$J_z^i(x, y, t) = \dot{J}_z^i(t) \delta(x - x_m, y - y_m) \quad (15)$$

식 (15)를 (14)에 대입하고 요소가 사각형이라 가정하면 식(14)의 우변은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mu_0 \int_{\Omega_m} N_i \dot{J}_z^i d\Omega = \mu_0 \dot{J}_z^i \Delta \quad (16)$$

Δ 는 요소의 면적이며 J_z 는 최종적으로 다음과 같이 시간영역 유한차분법에서 이용가능한 형태로 나타낼 수 있다.

$$J_z^i(t) = \frac{1}{\mu_0 \Delta} \int_0^t \frac{\partial G(t')}{\partial e_z} dt' \quad (17)$$

2.2 위상최적화 기법

민감도해석법을 이용하여 형상최적화를 할 경우 초기형상을 정해야 하고 오직 경계면을 변화시키게 되는 어려움이 있다. 본 논문에서는 이러한 역산란 문제의 최적화 어려움을 해결하기위해 위상최적화 기법을 사용하였다. 위상최적화 기법에서 해석 영역은 작은 그리드로 나뉘고 각 그리드에 포함된 산란체 정보를 통하여 형상을 최적화 한다. 최적화 하려는 산란체 변수의 물질구성은 균질화법(homogenization method)과 밀도법(density method)으로 나뉘 해석할 수 있다. 본 논문에서는 각 그리드의 물질 밀도 분포를 이용하는 밀도법을 사용하였다.

$$\epsilon_r(p_1) = (\epsilon_{r0} - 1)p_1^h + 1, \quad 0 < p_1 \leq 1 \quad (18a)$$

$$\sigma(p_2) = \sigma_0 p_2^h, \quad 0 < p_2 \leq 1 \quad (18b)$$

밀도법을 적용하기위해 정규화된 벡터 p 를 사용한다. h 가 증가하면 보다 효과적으로 물질정보를 찾아낼 수 있으나 그 정확도가 다소 감소함으로 보통 2~4값을 사용한다. 식 (18)에 식(8)을 대입함으로써 다음과 같은 최적화식을 구할수 있다.

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = h \sum_r \sum_j \int_0^{T_j} \lambda^T \frac{\partial}{\partial p_1} (-[M]\{\ddot{e}_z\})(\epsilon_{r0} - 1)p_1^{h-1} dt \quad (19a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_2} = h \sum_r \sum_j \int_0^{T_j} \lambda^T \frac{\partial}{\partial p_2} (-[B]\{\dot{e}_z\})\sigma_0 p_2^{h-1} dt \quad (19b)$$

2.3 수치해석을 통한 검증

알고리즘의 타당성을 입증하기위해 이미 물질정보를 알고있는 산란체를 해석영역 내부에 두고 정문제를 해석하고 이 결과와 제안한 알고리즘으로 찾아낸 필드분포와 물질정보를 비교함으로써 2차원 역산란 문제를 해석하였다. 평면파(Plane Wave)를 발생시키기 위해 Total-field/Scattered-field 해석법을 적용하였으며 입사파는 주파수 5GHz의 가우시안 펄스를 인가하였다.

2.3.1 공기나 손실 매질내 단일 산란체의 경우

해석영역 $\lambda \times \lambda$ 내부에 $0.5\lambda \times 0.5\lambda$ 의 단일 산란체가 있다고 가정한다. λ 는 산란체를 둘러싼 외부의 wavelength이고 송신안테나와 수신 안테나의 개수는 각각 16개 이다. 각 측정 위치는 그림 2에서 보여진 산란영역 내부에 존재해 있고 총 해석영역의 요소수는 60×60 이다. 그림 2(a1)는 해석모델의 실제 변수를 나타내고 있다. 두 개의 다른 물질로 이루어진 산란체의 물질정보는 다음과 같다. 외부산란체의 $\epsilon_r = 2.0, \sigma = 0.1$ 이고 그 내부 산란체의 물질정보는 $\epsilon_r = 2.5, \sigma = 0.2$ 이다. 산란체 외부의 해석영역의 물질은 공기이다. 그림 2(b1)와 (c1)는 100번 반복 후의 생성된 물질정보를 나타내고 있다. 그림 3를 통해 목적함수의 결과가 2%내로 수렴함을 알 수 있다.

2.3.2 손실 매질내 다수 산란체의 경우

해석영역내에 여러개의 산란체가 각각 분포해있는 경우를 고려해 보았다. 물과같은 손실 매질 내부에 위치한 산란체를 고려하기위해 그림 2(a2)의 모델을 선정하였다. 전체 해석영역의 크기는 $\lambda \times \lambda$ 이고 요소의 개수는 60×60 이다. 두 산란체의 크기는 $0.25\lambda \times 0.25\lambda$ 이며 입사파 발생 안테나와 수신안테나의 개수는 모두 32개이다. 그림 2(a2)와 같이 두 산란체의 물질정보는 둘다 $\epsilon_r = 60, \sigma = 1.3$ 이며 산란체를 제외한 외부 물질은 $\epsilon_r = 49, \sigma = 0.9$ 이다. 이것을 측정치로 하고 초기 물질값을 임의로 정한 후 시간영역 유한 차분법과 설계민감도 해석법으로 해석해 본 결과 100번 반복 후 거의 오차없이 본래의 물질정보를 찾아낼 수 있음을 알 수 있었다.

표 1은 800-MHz Pentium 3 사양의 개인용 컴퓨터를 통해 계산한 역산란 문제의 해석 시간을 나타낸다. 해석결과 보조변수 해석과 필드분포해석 시간은 같음을 알 수 있었다.

Single Object in Air		Multiple object in lossy material	
Routine	Time (s)	Routine	Time (s)
Field Analysis	48	Field Analysis	390
Adjoint Analysis	48	Adjoint Analysis	390

표1. 1번 반복해석시 CPU 시간

3. 결 론

본 논문에서는 시간영역 유한차분법과 설계민감도 해석법을 이용한 산란체의 역문제 해석 알고리즘을 제안하였다. 보조 변수법과 위상 최적화 기법을 사용하여 계산시간을 단축시키고 계산 효율을 높였으며 2차원 TMz 모델을 선정하여 결과를 검증하였다. 이론적으로 민감도 법과 보조변수법은 산란체 물질변수에 대한 목적함수의 미분정보를 효과적으로 찾아냄을 증명하였고 결과적으로 산란체의 물질변수인 유전율과 도전율을 효과적으로 찾아냄을 검증할 수 있었다.

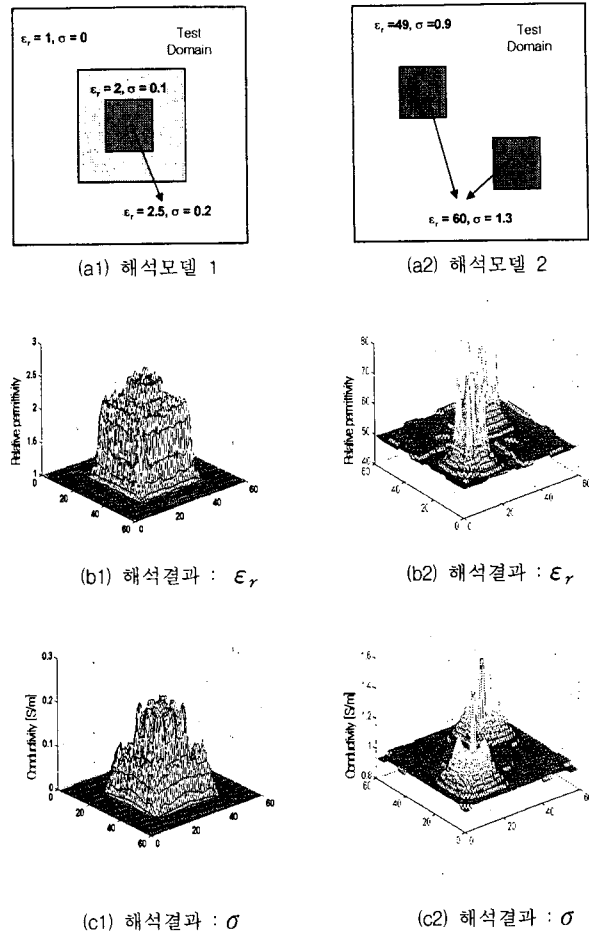


그림 2. 2차원 해석 결과

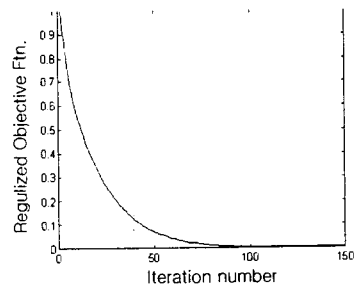


그림 3. 공기로 둘러싸인 산란체 해석시 목적함수

[참 고 문 헌]

[1] W. C. Chew, "Imaging and inverse problems in electrodynamics," in *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference time-Domain Method*, A. Taflov, Ed. Norwood, MA: Artech House, 1998, ch. 12.[1]
 [2] F.-C. Chen and W. C. Chew, "Time-domain Ultra-Wide band microwave imaging radar system", in *Proc. IEEE Instrum. Meas. Conf.*, 1998, pp.648-650
 [3] D. N. Buechler, D. H. Roper, C. H. Durney, and D. A. Christensen, "Modeling sources in the FDTD formulation and their use in quantifying source and boundary condition errors," *IEEE Trans. MTT.*, vol. 43, pp. 810-814, Apr.1995