한국경영과학회/대한산업공학회 2003 춘계공동학술대회
2003년 5월 16일-17일 한동대학교(포항)

네트워크 단절문제에 대한 개선된 해법

명 영 수
단국대학교 천안캠퍼스 경상학부

김현준
울산대학교 경영정보학과

초록: 네트워크에 속한 각 에지(edge)를 제거하는데 드는 비용 및 노드(node)들의 가중치가 주어져 있다고 가정하자. 네트워크 단절문제는 주어진 무방향 네트워크(undirected network)에서 에지(edge) 제거에 필요한 비용이 예산의 범위를 넘지 않도록 하면서, 원천노드(source node)와 연결이 끊어지는 노드들의 가중치의 합이 최대가 되도록 에지를 제거하는 방법을 찾는 문제이다. 이 문제는 Martel 등 [7]에 의해서 처음 소개되었고 NP hard임이 밝혀졌다. 또한 명영수와 김현준 [2]은 주어진 그래프의 특성을 이용하여 문제의 크기를 줄이는 과정과 수리계획모형을 제시하였고, 제시된 모형을 이용하여 하한 및 상한을 도출하는 절차를 개발하였다. 본 연구에서는 문제의 특성을 추가로 규명하고 이를 이용하여 실행가능해를 도출하는 새로운 휴리스틱을 제시하며, 수리계획모형의 선형계획완화를 이용하여 상한을 도출할 때 유효부등식을 이용하여 개선된 상한을 구하는 방법을 제시하기로 한다. 아울러 충분한 계산실험을 통하여 개발된 해법의 성능을 평가하기로 한다.

1. 서론

네트워크 단절문제는 다음과 같이 정의된다. 무방향 네트워크(undirected network), 사전에 정해진 원천노드(source node), 각 에지(edge)마다 에지를 제거하는데 드는 비용, 에지를 제거하는데 사용할 수 있는 예산 및, 각 노드별 가중치가 주어져 있다고 가정하자. 네트워크 단절문제의 목적은 원천노드와 연결이 끊어지는 노드들의 가중치의 합이 최대가 되도록 에지를 제거하는 것이다. 이 때, 에지를 제거하는데 드는 비용의 합은 주어진 예산의 범위를 넘어서는 안 된다.

네트워크 단절문제는 네트워크의 노드들과 원천노드와의 연결을 단절시키려는 네트워크에 대한 공격을 모델로 하여, Martel 등 [7]에 의해서 처음 제시되었다. 저자들은 에지를 제거하는데 드는 비용과 노드별 가중치가 모두 1의 값을 갖더라도, 네트워크 단절문제는 NP hard 에 속한 어려운 문제임을 밝히고, 선택 가능한 에지의 집합을 중복 없이 일일이 탐색하여 최적해를 구하는 방법을 제시하였다. 물론 문제의 복잡성에서 알 수 있듯이 이 방법은 다항시간(polynomial time)안에 완료되지는 않는다. 명영수와 김현준 [2]은 Martel 등 [7]이 제시한 방법보다는 좀 더 현실적인 방법으로 네트워크 단절문제를 풀 수 있는 해법을 개발하였다. 이 들은 주어진 그래프의 특성을 이용하여 문제의 크기를 줄이는 과정과 수리계획모형을 제시하였고, 제시된 모형을 이용하여 하한 및 상한을 도출하는 절차를 개발하였다.

네트워크 단절문제를 다룬 연구는 위에서 언급한 두 연구뿐이나, Cunningham [4]과 Gusfield [6]에 의하여 유사한 문제인 네트워크 공격문제가 다루어진 적이 있다. 네트워크 공격문제는 에지의 제거 비용과 에지의 제거로 인하여 서로 단절되는 부분 네트워크의 개수와의 비율을 최소화하는 문제이다. Martel 등 [7]은 네트워크 단절문제가 전자상거래를 위한 전산망 및 분산처리를 위한 전산망 등에서 응용될 수 있음을 밝혔다. 네트워크 단절문제와 공격문제는 네트워크 공격자의 입장에서 정의되어 있으나, 이를 이용하면 생존도(survivability)가 높은 네트워크를 구성하는 방법으로도 활용할 수 있다. 통신 서비스에의 의존도가 늘어가고 있는 오늘날의 사회에서는 비용 면에서 효율적이면서도 일부 구성요소의 장애에도 지속적인 서비스의 제공이 가능한 안정적인 통신망의 구축이 필수적이어서, 네트워크의 생존도에 대한 연구는 중요한 과제로 인식되어 왔다 [3,5,8,9,11].

본 연구에서는 네트워크 단절문제의 특성을 추가로 규명하고 이를 이용하여 실행가능해를 도출하는 새로운 휴리스틱을 제시하며, 수리계획모형의 선형계획완화를 이용하여 상한을 도출할 때 유효부등식을 이용하여 개선된 상한을 구하는 방법을 제시하기로 한다. 아울러 충분한 계산실험을 통하여 개발된 휴리스틱의 성능을 평가하기로 한다. 네트워크의 단절문제는 네트워크가 무방향(undirected)인

경우와 유방향(directed)인 두 경우로 나누어 생각할 수 있다. 두 경우 모두 NP hard에 속하는 문제이다. 본 논문에서는 무방향의 네트워크를 가정하는데 실제로 본 논문에서 제시된 내용은 유방향의 네트워크에도 약간의 변형을 통해서 그대로 적용이 가능하다.

2. 용어의 정의 및 문제의 특성

주어진 네트워크에서 노드의 집합을 $V=\{1,\cdots,n\}$, 무방향 에지의 집합을 $E=\{1,\cdots,m\}$ 로 표시한다. 사전에 정해진 원천노드는 노드 1로 가정한다. 두 노드 $i\in V$와 $j\in V$에 걸쳐있는 에지를 $e=(i,j)$로 표시하기로 하고 두 노드 i와 j를 에지 e의 종단노드(end nodes)라고 부르기로 한다. 원천노드를 제외한 노드들의 집합을 표시하기 위하여 $V_1=V\setminus\{1\}$을 사용한다. 주어진 그래프 G에는 두 노드를 동일한 종단노드로 하는 복수의 링크(multiple link)는 존재할 수 있으나 동일한 노드를 종단노드로 하는 링크(self loop)는 존재하지 않는 것으로 가정한다. 각 에지 $e\in E$ 마다 에지를 제거하는데 드는 비용을 c_e, 에지를 제거하는데 사용할 수 있는 예산을 b, 각 노드 $i\in V_1$ 의 가중치를 w_i로 표시하기로 한다. 그리고 에지의 비용과 노드의 가중치에 대한 합을 표현하기 위하여 에지의 부분집합 $E'\subseteq E$에 대해서 $c(E')=\sum_{e\in E'}c_e$, 노드의 부분집합 $S\subseteq V_1$에 대해서 $w(S)=\sum_{i\in S}w_i$의 기호를 사용하기로 한다.

V_1의 임의의 부분집합 S 에 대해서, $\delta(S)$는 양쪽 종단노드 중 하나의 노드는 S에 다른 노드는 $V\setminus S$ 에 속하는 에지의 집합, 즉 노드집합을 둘로 분리시키는 컷(cut)을 나타내는 것으로 정의한다. 모든 $S'\subseteq S$ 에 대해서 $\delta(S)$는 노드 1과 S의 부분집합 S'을 분리시키는 컷이므로 $1-S'$컷이라고 부르기로 한다. 임의의 컷 $\delta(S)$에 대해서 컷에 속한 에지를 제거하는데 드는 비용, 즉 $c(\delta(S))$를 컷의 비용으로 정의한다. 그리고 V_1의 임의의 부분집합 S에 대한 $1-S$컷 중에서 컷의 비용이 최소인 컷을 최소비용 $1-S$컷, 최소비용 $1-S$컷 중에서 컷에 의해 분리되는 그래프의 부분 중 S를 포함하는 부분에 속한 노드의 가중치의 합이 최대인 $1-S$컷을 최대가중치 최소비용 $1-S$컷이라고 정의한다.

V_1의 임의의 부분집합 S 에 대해서 최소비용 $1-S$컷의 비용이 b이하이면 예산의 범위 내에서 컷에 포함된 에지를 제거하여 S를 원천노드에서 분리시킬 수 있게 된다. 이때, S를 분리가능 노드집합이라고 부르기로 한다. 이러한 정의를 이용하면, 네트워크 단절문제는, 그래프 $G=(V,E)$와 c_e, b, w_i 등이 주어져 있을 때, 가중치의 합, $w(S)$가 최대가 되는 분리가능 노드집합 S를 구하는 문제로 표현할 수 있다.

명영수와 김현준 [2]은 컷의 서브 모듈라 특성(Submodularity)과 최대가중치 최소비용 컷과 최적해의 속성을 이용하여 다음과 같은 사실이 성립함을 보였다.

정리 1. (명영수와 김현준 [2])
(1) V_1의 임의의 부분집합 S 에 대해서 최대가중치 최소비용 $1-S$컷은 유일하게 존재한다.
(2) $S'\subseteq S'\subseteq S\subseteq V_1$인 S', S', S에 대해서 $\delta(S)$가 최대가중치 최소비용 $1-S'$컷이면, $\delta(S)$는 동시에 최대가중치 최소비용 $1-S'$컷이다.
(3) 분리가능 노드집합 S 가 네트워크 단절문제의 최적해라고 하자. 그러면, $\delta(S)$는 S의 임의의 부분집합 S'에 대해서 최대가중치 최소비용 $1-S'$컷을 이룬다.

특히 (3)의 내용은 분리가능 노드집합 S가 네트워크 단절문제의 최적해인 경우에 $\delta(S)$는 항상 최대가중치 최소비용 $1-S$컷이 되나 (2)에서처럼 S에 속한 노드들의 일부분만 포함하는 부분집합 S'에 대해서도 최대가중치 최소비용 $1-S'$컷이 될 수도 있다는 것이다.

이러한 가능성은 아래의 정리에서 좀 더 확연히 나타난다. 각 노드 $i\in V_1$ 에 대해서 S_i를 $\delta(S_i)$가 최대가중치 최소비용 $1-\{i\}$컷이 되는 V_1의 부분집합으로 정의한다. 그러면 다음이 성립한다.

정리 2. 분리가능 노드집합 S^* 가 네트워크 단절문제의 최적해이면, $S^*=\bigcup_{i\in S'}S_i$가 되는 S^*의 부분집합 S'이 존재한다.

(증명) 지면의 제약을 고려해서 증명의 개요만 소개한다. 컷의 서브 모듈라 특성을 이용하면 V_1의 임의의 부분집합 S와 임의의 노드 $i\in V_1\setminus S$에 대해서 최소비용 $1-S\cup\{i\}$컷에 의하여 분할되는 그래프의 두 부분 중에서 $S\cup\{i\}$를 포함하는 부분은 S_i를 포함하게 된다. 이를 이용하면 정리가 성립됨을 보일 수 있다. □

각 노드 $i\in V_1$ 에 대해서 S_i가 노드 i 외에 여러 노드를 포함하는 경우에는 정리 2에서의 S'은 S^*에 비하여 현격히 적은 수의 노드를 원소로 포함하게 된다.

3. 휴리스틱

네트워크 단절문제의 최적해를 구하기 위한 하나의 방법은 모든 분리가능 노드집합에 대하여 가중치의 합을 비교하는 것이다. 그러나 대상이 될 수 있는 분리가능 노드집합의 수는 매우 많기 때문에 모든 분리가능 노드집합을 분석하는 것은 현실적으로 쉽지 않으며, 이러한 사실이 이 문제가 NP hard에 속하는 문제임을 암시하고 있다.

명영수와 김현준 [2]의 연구에서는 2절에서 소개한 문제의 특성을 이용하여 $\delta(S)$가 최대가중치 최소비용 $1-S$컷이 되는 분리가능-노드집합 S를 구하는 휴리스틱을 제시하였다. 제시된 휴리스틱의 특징은 V_1의 부분집합 S'을 선택하여 $S-\bigcup_{i\in S'} S_i$으로 정한다는 것이다. 그러므로 S'을 선택할 때 노드를 어떤 순서로 선택하느냐에 따라서 얻어지는 해가 달라지게 된다. 명영수와 김현준 [2]의 연구에서는 S_i를 추가할 때 발생하는 에지비용의 증가에 대한 추가되는 노드의 가중치의 합의 비율이 최대가 되는 S_i를 우선 선택하였다. 여기서는 추가되는 노드의 가중치의 합이 최대가 되는 S_i를 우선 선택하는 방법과 4절에서 소개되는 선형계획문제의 노드 변수의 값이 최대가 되는 S_i를 우선 선택하는 방법을 추가로 제시하고 각 방법에 대한 효율성을 5절에서 계산실험을 통하여 비교하기로 한다.

~~알고리즘 LB1 (LB2, LB3)~~

Input: $G-(V,E)$, $\{c_e\}$, $\{w_i\}$
Output: 분리가능-노드집합 S
(단계 1) 모든 $i\in V_1$에 대해서 최대규모의 최소비용 $1-i$컷, $\delta(S_i)$를 구한다.
(단계 2) (사전처리과정) S_i가 분리가능-노드집합이 아니면 노드 1과 노드 i를 축약시킨다.
(단계 3) $S-\emptyset$으로 초기화하고,
$I-\{i\in V_1-S \mid c(\delta(S\cup S_i)\le b\}$가 공집합이 아닐 때까지 다음을 반복:
LB1: $\dfrac{w(S_i-S)}{c(\delta(S\cup S_i))-c(\delta(S))}$가
LB2: $w(S_i-S)$가
LB3: 노드 변수의 값이
최대가 되는 i를 선택하여 $S-S\cup S_i$로 놓는다.

~~단계 2에서의 사전처리는 다음과 같은 사~~실에 근거를 두고 있다. 어떤 노드 i에 대해서 최소비용 $1-i$컷의 비용이 예산을 초과한다면 최적해가 되는 분리가능-노드집합은 노드 i를 포함할 수 없다. 따라서 원래의 그래프에 대한 최적해와 노드 1과 i를 축약한 그래프에서의 최적해는 동일하게 될 것이다. 일반적으로 망을 대상으로 하는 문제를 푸는데 걸리는 시간은 망의 규모가 커짐에 따라 기하급수적으로 늘어난다. 따라서 배제하여도 최적해에 영향을 주지 않는 노드나 링크를 알 수 있다면 망의 규모를 축소할 수 있어서 문제해결에 소요되는 시간을 줄일 수 있다.

여기서 두 노드의 축약은 두 노드를 종단노드로 하는 에지들을 제거하고 두 노드를 하나의 노드로 합치는 것을 의미한다. 이 때, 두 노드 중 어느 한 노드에 연결되었던 에지는 새로이 합쳐진 노드로 연결되게 되고 축약의 결과로 동일한 노드를 종단노드로 하게 되는 에지(self loop)는 그래프에서 제거된다. 또한 축약의 결과로 두 노드 사이에는 두 노드를 동일한 종단노드로 하는 복수의 에지(multiple edge)가 새로 발생할 수도 있다.

4. 상한의 도출

명영수와 김현준 [2]은 네트워크 단절문제의 정수계획모형을 수립하고 선형계획 완화문제를 이용하여 상한을 구하는 방법을 제시하였다. 본 연구에서는 수리계획모형의 실행가능 영역을 구성하는 다면체의 구조를 분석하고, 선형계획완화를 이용하여 상한을 도출할 때 유효부등식을 이용하여 개선된 상한을 구하는 방법을 제시하기로 한다.

4.1. 정수계획모형

특정의 에지 e의 제거 여부를 나타내는 변수 x_e와 노드 i가 1에서 분리되는지 여부를 나타내는 변수 y_i를 다음과 같이 정의하자.

$$x_e=\begin{cases}1, & \text{에지 } e\text{가 제거되었을 때}\\ 0, & \text{위와 다른 경우}\end{cases}$$

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{노드 } i\text{와 } 1\text{이 단절된 경우}\\ 0, & \text{위와 다른 경우}\end{cases}$$

그러면 네트워크 단절문제는 다음과 같은 정수계획모형 (IP)로 나타낼 수 있다.

$$(IP)\quad \max \quad z-\sum_{i\in V_1} w_i y_i \tag{1}$$

$$s.t.\ \sum_{e\in E} c_e x_e \le b, \tag{2}$$

$$\sum_{e\in E(p)} x_e \ge y_i,\ \forall p\in P_i,\ \forall i\in V_1, \tag{3}$$

$$x_e\in\{0,1\},\qquad \forall e\in E, \tag{4}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in V_1, \qquad (5)$$

여기서 P_i는 그래프 G에 존재하는 노드 1과 노드 i사이의 모든 경로(path)의 집합을 나타내고, $E(p)$는 경로 p에 속한 에지의 집합을 나타낸다. 목적식 (1)은 노드 1에서 단절되는 노드의 가중치의 합을 최대화시키는 식이고, 제약식 (2)는 예산 제약을 반영하는 식이다. 그리고 제약식 (3)은 노드 i가 노드 1로부터 단절되기 위해서는 두 노드 사이의 경로마다 적어도 한 에지는 제거되어야 함을 의미하는 것이다. 제약식 (4)와 (5)는 변수들의 정수조건을 나타낸다.

모형 (IP)의 최적해는 네트워크 단절문제의 최적해가 된다. (IP)의 실행가능해의 볼록결합으로 만들어지는 다면체를 F로 표시하기로 한다.

4.2. 다면체 F의 구조

이 절에서는 다면체 F의 구조를 분석하여 (IP)의 표현에 사용된 부등식이 facet에 해당하는지를 밝힌다. 또한 새로운 유효부등식(valid inequalities)을 도출하고, 도출된 부등식이 facet이 되기 위한 조건을 제시하기로 한다. 특수한 경우를 배제하기 위하여 모든 $e \in E$에 대해서 $c_e \le b$인 것으로 가정한다. 그리고, 사전처리과정을 거친 후이므로 모든 $i \in V_1$에 대해서 $c(\delta(S_i)) \le b$가 성립하는 것으로 가정한다. 여기서는 규명된 사실들을 증명은 생략하고 결과만을 제시하기로 한다. 자세한 증명은 현재 작성 중인 정식의 논문에 소개할 예정이다.

정리 3. F의 차원(dimension)은 $|V_1| + |E|$이다.

정리 4. 모든 $i \in V_1$에 대해서 $y_i \ge 0$은 facet이 된다.

정리 5. 어떤 $e' \in E$에 대해서 $x_{e'} \ge 0$이 facet이 되기 위한 필요충분조건은 모든 $i \in V_1$에 대해서 $e' \notin \delta(S)$이고 $i \in S$인 분리가능 노드집합 S가 존재하는 것이다.

정리 6. 어떤 $e' \in E$에 대해서 $x_{e'} \le 1$이 facet이 되기 위한 필요충분조건은 모든 $e \in E - \{e'\}$에 대해서 $c_{e'} + c_e \le b$이고 모든 $i \in V_1$에 대해서 $e' \notin \delta(S)$이고 $i \in S$인 분리가능 노드집합 S가 존재하는 것이다.

정리 7. 제약식 (3)이 facet이 되기 위한 필요충분조건은 다음의 두 조건을 모두 만족하는 것이다.

(i)모든 $e \in E(p)$에 대해서 $\delta(S) \cap E(p) - \{e\}$이고 $i \in S$인 분리가능-노드집합 S가 존재.

(ii)모든 $j \in V_1 - \{i\}$에 대해서 $\delta(S) \cap E(p) - \emptyset$이고 $j \in S$인 분리가능-노드집합 S가 존재하거나 다음의 성질을 만족하는 i를 포함하는 분리가능-노드집합 S'이 존재:
$c(\delta(S) \cup \delta(S')) \le b$이고 $E(p)$에 포함된 에지 중에서 $\delta(S)$나 $\delta(S')$에 포함되는 것은 하나 이하.

이제 새로운 유효부등식을 도출하기로 한다. 이러한 유효부등식은 (IP)에 추가되는 경우는 불필요한 부등식이지만 (IP)의 선형계획 완화문제(linear programming relaxation problem) 이를 (LP)라 하자 에 포함되는 경우에는 정수해에 가까운 해를 제공하는 효과가 있다. 임의의 부분집합 $L \subseteq V_1$에 대해서 L의 어느 두 노드도 동시에 분리가능-노드집합에 포함될 수 없는 경우에 L을 보호-노드집합이라고 정의하자. 그러면 다음과 같은 사실이 성립한다.

정리 8. L이 보호-노드집합이면 (IP)의 모든 실행가능해는

$$\sum_{i \in L} y_i \le 1, \qquad (6)$$

을 만족한다. 그리고 아래의 조건 (i)과 (ii)가 만족되면 (6)은 facet이 된다.

(i) V_1의 부분집합 중 L을 포함하는 보호-노드집합이 존재하지 않고,

(ii) 모든 $e \in E$에 대해서 $L \cap S \ne \emptyset$, $e \notin \delta(S)$, $c(\delta(S) \cup \{e\}) \le b$인 V_1의 부분집합 S가 존재.

4.3. 상한을 구하는 해법

(IP)에 (6)이 추가된 정수계획모형에서 제약식 (4)와 (5)를 각각 $0 \le x_e \le 1, \forall e \in E$, $0 \le y_i \le 1, \forall i \in V_1$로 대체함으로써 얻어지는 선형계획 완화문제를 풀어서 원문제의 최적해의 목적함수값에 대한 상한(upper bound)을 구하기로 한다. 그러나 제약식 (3)과 (6)의 수가 너무 많기 때문에, 모든 제약식을 전부 포함한 선형계획문제를 풀어서 상한을 구하기에는 현실적인 무리가 따른다.

본 연구에서는 제약식 (3)과 (6) 중 필요한 식만 선택적으로 포함하는 선형계획문제의 해결방법을 사용한다. 이 방법은 우선 제약식 (3)과 (6) 중 일부의 식만을 포함한 선형계획문제를 풀고, 얻어진 해가 (LP)의 최적해인지를 확인한 다음, 필요하면 다시 제약식을 추가하여 반복하는 단계적 절차로 구성되어 있다. 반복의 단계마다 제약식의 추가에 의해 실행가능영역(feasible region)을 줄여 가는 이러한 방법을 절단면해법(cutting plane algorithm)이라고 부른다.

우리의 절단면해법은 우선 목적식과 제약식 (2), $0 \le x_e \le 1,\ \forall e \in E,\ 0 \le y_i \le 1, \forall i \in V_1$만을 포함하는 선형계획문제를 풀면서 시작한다. 매 단계에서 현재 구해진 선형계획문제의 해가 모든 제약식 (3)과 (6)을 만족하는지를 판정하고, 아닌 경우에 현재의 해가 만족시키지 못하는 제약식이 어떤 것인지를 결정하기 위하여 제약식 (3)과 (6)에 대한 분리문제(separation problem)를 풀어야 한다. 절단면해법과 분리문제에 대한 자세한 설명은 Nemhauser와 Wolsey [10]를 참조하기 바란다.

제약식 (3)에 해당하는 분리문제는 최단경로문제(shortest path problem)를 풀어서 해결할 수 있다. 최적해 $\{x_e, y_i\}$를 구하여, x_e를 에지 e의 길이로 하는 그래프에서 노드 1로부터 각 노드 $i \in V_1$까지의 최단경로를 구하고 그 길이 l_i를 구하여, 만일 $l_i < y_i$이면 이 최단경로 p에 대해서 제약식 (3)을 추가한다. x_e를 링크 길이로 하는 그래프에서, 두 노드 1과 i사이의 최단 경로의 길이가 y_i이상이면 1과 i사이의 모든 경로의 길이가 y_i이상이므로 현재의 선형계획문제의 해 $\{x_e, y_i\}$는 노드 i에 대한 모든 제약식 (3)을 만족하게 되고, 만약 어떤 경로 p에 대한 경로의 길이가 y_i미만이면 $\{x_e, y_i\}$는 해당 경로에 대해서 (3)을 만족시키지 못하게 된다.

제약식 (6)에 해당하는 분리문제를 위해서 보호 노드집합을 어떻게 구할 수 있는지 고려해 보자. 보조그래프 $H=(V_1, A)$를 정의하자. 보조그래프에서 두 노드쌍 $\{i, j\} \subseteq V_1$가 분리가능-노드집합인 경우에 i와 j사이에 에지가 존재한다. 그러면 보호 노드집합은 보조그래프의 안정집합(stable set)에 해당한다. 따라서, (6)에 해당하는 분리문제는 노드의 가중치가 y_i로 주어진 보조그래프에서 가중치의 합이 1 보다 큰 안정집합이 존재하는지를 결정하는 문제이다. 그래프에서 가중치의 합이 최대인 안정집합을 구하는 문제가 NP hard임을 감안할 때 (6)에 해당하는 분리문제를 다항시간 내에 풀기는 기대하기 어려우므로 휴리스틱을 개발하여 사용하기로 한다. 우리의 휴리스틱은 양의 y_i값을 갖는 노드를 가능한 많이 포함하도록 안정집합을 선택하고, 선택된 안정집합이 (6)의 식을 만족하는지 판정한다. 새로운 안정집합을 선택할 때마다 최초로 선택되는 노드는 전에 선택된 안정집합에 포함되지 않았던 노드로 한정함으로써 동일한 안정집합이 반복되어 선택되는 것을 배제한다.

5. 계산실험 및 결과 분석

본 연구에서 제시된 네트워크 단절문제의 상한과 하한을 구하기 위한 절차, 그리고 문제의 단순화 절차는 C 언어를 통하여 프로그램으로 구현되었다. 물론 계산실험에 적용할 대상문제를 만드는 프로그램도 같이 구현되었으며, 상한을 구하는 선형계획 완화문제를 반복적으로 풀어 가기 위해서 CPLEX 라이브러리를 이용하였다. 계산실험을 위하여 30개에서 50개까지의 노드로 구성되는 가상의 문제를 만들었다. 가상의 문제를 만들기 위해서는 먼저 (100×100) 사각형 모양의 격자에 필요한 수만큼의 노드를 임의로 위치시키고, 다음에 노드간에 적정수의 링크설비를 위치시켰다. 우선 노드들이 상호 연결되도록 하나의 트리로 연결한 후, 지정된 수만큼의 추가적인 링크를 설치하였다. 노드의 가중치와 에지의 제거비용은 일정한 범위 내에서 임의추출방식(random sampling)으로 생성하였으며, 에지 제거를 위한 예산은 에지비용의 합의 일정한 비율로 설정하였다.

작성된 코드는 150Mhz CPU를 가진 펜티엄급 PC에서 실행되어 졌다. 다양한 크기의 네트워크에서 서로 다른 비용 및 가중치를 갖는 많은 문제에 대한 시험계산을 수행하였다. <표 1>과 <표 2>에 720문제에 대한 결과가 나타나 있다. 문제별로 주어진 그래프의 크기를 노드의 수와 에지의 수로 표시하였고, 예산의 경우는 모든 에지에 대한 에지제거 비용의 합계에 대한 비율로 표시하였다. 사전처리과정의 효율을 보여주기 위하여, 사전처리가 이루어진 이후 그래프의 크기를 대비하였고 소요된 시간을 표시하였다. 제시된 세가지 하한을 구하는 방법을 비교하였으며 상한을 구하기 위해서 사용된 선형계획법의 목적함수의 값도 제약식 (3)만이 추가된 경우 (UB1)와 제약식 (6)이 추가된 경우 (UB2)로 나누어 표시하였다. 분석이 용이하도록 실행가능해와 상한을 총 가중치에 대한 비율로 표현하였다. 각 수치는 10개 문제의 평균치이다.

예상할 수 있는 것처럼 예산 규모가 커질수록 사전처리의 효과는 줄어들고 있음을 알 수 있다. 그러나 실험 결과로 도출된 하한 및 상한의 성능, 실행시간 등을 볼 때, 제시된 해법이 큰 규모의 문제를 효과적으로 풀 수 있다고 평가할 수 있고 유효부등식의 효과도 긍정적인 것으로 판단된다.

<참고문헌>

[1] 명영수, 김현준 "흐름량을 고려한 네트워크 생존도 계산방법에 관한 연구", 「한국경영과학회지」, 제26권 3호 (2001), pp. 65 78.
[2] 명영수, 김현준 "네트워크 단절문제에 대한 해법", 2002년 대한산업공학회/한국경영과학회 공동춘계학술대회 논문집.
[3] Cosares, S., N.D. Deutch, I. Saniee, and

O.J. Wasem, "SONET toolkit: A decision support system for designing robust and cost effective fiber optic networks," *Interfaces* 25 (1995), pp. 20 40.
[4] Cunningham, W.H., "Optimal attack and reinforcement of a network," *Journal of the ACM* 32 (1985), pp. 549 561.
[5] Grötschel, M., C.L. Monma, and M. Stoer, "Design of survivable networks," *Network Models*, M.O. Ball et al. (eds.), North Holland, Amsterdam 1995.
[6] Gusfield, D., "Computing the strength of a graph," *SIAM Journal on Computing* 20 (1991), pp. 639 654.
[7] Martel, C., G. Nuckolls, and D. Sniegowski, "Computing the disconnectivity of a graph", Working paper, UC Davis.
[8] Myung, Y. S. and H. J. Kim, "A Cutting Plane Algorithm for Computing *k* edge Survivability of a Network", To appear in *European Journal of Operational Research*.
[9] Myung, Y. S., H. J. Kim, and D. W. Tcha, "Design of communication networks with survivability constraints", *Management Science* 45 (1999), 238 252.
[10] Nemhauser, G.L. and L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization,* Wiley, New York 1988.
[11] Wu, T., *Fiber network survivability*, Artech House, Boston 1992.

<표 1> 시험계산결과 (노드 30개인 경우)

원네트워크			사전처리후		하한값			상한값		Cut의 수		GAP	실행시간	
|V|	|E|	b/c(E)	|V|	|E|	LB1	LB2	LB3	UB1	UB2	(3)	(6)		LB	UB
30	100	0.40	3.2	2.6	3.5	3.4	3.5	4.2	3.8	2.5	0.6	0.021	0.04	0.12
30	100	0.45	4.3	4.1	5.0	5.1	5.2	5.7	5.2	4.1	0.8	0.000	0.04	0.07
30	100	0.50	5.3	5.4	5.9	6.1	6.2	7.1	6.4	5.5	0.9	0.031	0.03	0.08
30	100	0.55	5.9	6.3	6.5	6.1	6.7	7.8	6.9	6.8	0.9	0.016	0.05	0.06
30	100	0.60	7.0	8.2	6.9	5.9	7.1	8.3	7.4	8.9	0.8	0.019	0.05	0.06
30	100	0.65	8.3	11.8	7.9	7.2	8.4	9.0	8.9	11.3	0.2	0.029	0.05	0.06
30	100	0.70	9.5	14.7	7.9	7.0	8.4	9.8	9.2	15.0	0.8	0.061	0.04	0.08
30	100	0.75	11.3	21.9	8.1	7.3	8.6	10.7	9.9	31.4	0.9	0.114	0.04	0.11
30	100	0.80	12.2	26.2	9.4	8.0	9.1	12.0	10.8	43.7	0.9	0.112	0.04	0.13
30	100	0.85	14.7	36.0	18.9	17.1	18.7	21.1	19.8	54.3	1.4	0.074	0.05	0.15
30	100	0.90	16.0	41.9	19.1	17.1	18.6	22.3	20.6	81.8	1.6	0.115	0.03	0.20
30	100	0.95	16.7	44.7	19.2	17.3	18.3	23.3	21.3	99.0	1.6	0.158	0.05	0.25
30	200	0.40	1.1	0.1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.1	0.0	0.000	0.09	0.06
30	200	0.45	1.3	0.3	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	0.3	0.0	0.000	0.11	0.05
30	200	0.50	1.4	0.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	0.4	0.0	0.000	0.06	0.05
30	200	0.55	1.6	0.6	1.5	1.5	1.5	1.6	1.5	0.6	0.1	0.000	0.09	0.06
30	200	0.60	2.3	1.6	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	1.7	0.2	0.000	0.06	0.06
30	200	0.65	3.1	2.8	3.3	3.4	3.4	3.7	3.4	2.9	0.4	0.000	0.09	0.07
30	200	0.70	3.6	3.6	4.1	4.2	4.2	4.7	4.2	3.6	0.5	0.000	0.07	0.06
30	200	0.75	4.5	4.9	4.5	4.7	4.7	5.3	4.7	4.7	0.7	0.000	0.09	0.05
30	200	0.80	5.6	8.4	4.8	5.0	5.0	5.9	5.0	8.9	0.8	0.000	0.08	0.07
30	200	0.85	6.6	12.0	4.8	5.1	5.1	6.5	5.1	14.1	0.9	0.000	0.07	0.07
30	200	0.90	8.0	17.2	5.0	5.2	5.2	6.8	5.2	25.2	1.0	0.000	0.08	0.08
30	200	0.95	10.0	29.2	5.1	5.4	5.4	7.8	5.4	41.2	1.0	0.000	0.09	0.12
30	300	0.40	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.14	0.06
30	300	0.45	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.13	0.05
30	300	0.50	1.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.1	0.000	0.13	0.06
30	300	0.55	1.8	0.9	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	0.9	0.2	0.000	0.12	0.06
30	300	0.60	2.3	1.8	1.7	1.8	1.8	1.9	1.8	1.7	0.3	0.000	0.12	0.06
30	300	0.65	3.4	4.9	2.9	2.9	2.9	3.2	2.9	4.4	0.4	0.000	0.12	0.06
30	300	0.70	4.9	9.5	4.0	4.0	4.0	4.4	4.0	8.8	0.5	0.000	0.12	0.07
30	300	0.75	6.4	16.3	4.7	4.7	4.7	5.3	4.7	13.2	0.7	0.000	0.12	0.08
30	300	0.80	8.9	32.5	5.3	5.5	5.5	6.4	5.5	41.1	0.8	0.000	0.12	0.12
30	300	0.85	12.4	66.9	5.3	5.6	5.6	7.6	5.6	102.9	0.9	0.000	0.12	0.27
30	300	0.90	14.7	88.1	5.8	6.1	6.1	9.4	6.1	128.1	0.9	0.000	0.13	0.31
30	300	0.95	17.1	118.0	5.8	6.1	6.1	13.0	6.1	208.5	1.1	0.000	0.13	0.85

<표 2> 시험계산결과 (노드 50개인 경우)

원네트워크			사전처리후		하한값			상한값		Cut의 수		GAP	실행시간	
|V|	|E|	b/c(E)	|V|	|E|	LB1	LB2	LB3	UB1	UB2	(3)	(6)		LB	UB
50	200	0.40	5.3	4.9	4.4	4.4	4.6	5.3	4.9	4.6	0.7	0.042	0.13	0.11
50	200	0.45	6.4	6.5	4.7	4.5	4.9	5.9	5.0	6.0	1.2	0.026	0.16	0.06
50	200	0.50	7.6	8.4	4.9	4.7	5.2	6.4	5.3	7.7	1.2	0.020	0.16	0.07
50	200	0.55	9.0	12.0	5.0	4.4	5.2	6.8	5.6	12.9	1.1	0.051	0.17	0.06
50	200	0.60	10.9	16.1	5.7	5.0	5.9	7.2	6.4	14.7	1.0	0.066	0.17	0.08
50	200	0.65	12.7	21.7	5.9	5.2	6.0	7.7	6.9	26.0	0.8	0.105	0.17	0.09
50	200	0.70	14.3	27.5	6.7	5.3	6.5	8.1	7.6	34.5	0.8	0.101	0.17	0.14
50	200	0.75	16.2	34.5	7.7	6.3	7.7	8.7	8.4	51.8	0.8	0.089	0.16	0.19
50	200	0.80	18.1	41.2	7.8	6.6	7.7	9.1	8.7	79.4	1.2	0.114	0.17	0.27
50	200	0.85	19.8	47.2	8.1	7.4	7.9	9.5	9.2	135.9	0.9	0.123	0.16	0.53
50	200	0.90	22.6	56.4	8.4	7.0	8.1	10.3	9.6	185.7	0.8	0.114	0.18	1.89
50	200	0.95	24.4	63.2	8.7	6.6	8.1	11.8	10.2	198.7	1.0	0.160	0.16	3.23
50	350	0.40	1.7	0.7	1.0	1.1	1.1	1.1	1.1	0.7	0.1	0.000	0.27	0.06
50	350	0.45	2.2	1.3	1.4	1.5	1.5	1.7	1.5	1.3	0.5	0.000	0.28	0.06
50	350	0.50	2.7	2.2	1.4	1.5	1.5	2.0	1.5	2.0	0.5	0.000	0.27	0.07
50	350	0.55	4.0	4.1	1.8	2.2	2.2	2.6	2.2	4.0	0.5	0.000	0.27	0.07
50	350	0.60	4.9	5.4	2.1	2.3	2.3	3.0	2.3	5.4	0.8	0.000	0.27	0.07
50	350	0.65	6.2	8.3	2.3	2.3	2.4	3.2	2.4	7.2	0.9	0.000	0.27	0.07
50	350	0.70	7.9	12.9	2.9	2.7	3.0	3.7	3.1	13.1	0.9	0.001	0.27	0.07
50	350	0.75	10.1	21.2	3.1	2.8	3.2	4.2	3.2	21.4	1.0	0.002	0.29	0.09
50	350	0.80	12.7	36.4	3.4	3.2	3.6	4.4	3.7	59.3	1.3	0.011	0.28	0.27
50	350	0.85	15.4	50.1	3.6	3.4	3.8	4.6	4.0	75.7	1.2	0.016	0.28	0.37
50	350	0.90	17.7	65.8	4.5	3.9	4.5	5.3	4.8	118.2	1.0	0.042	0.27	0.75
50	350	0.95	20.2	79.9	4.6	4.1	4.7	5.9	5.2	209.3	1.2	0.066	0.28	4.19
50	500	0.40	1.4	0.4	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.4	0.1	0.000	0.41	0.09
50	500	0.45	1.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.9	0.9	0.1	0.000	0.43	0.06
50	500	0.50	2.3	2.2	1.1	1.1	1.1	1.2	1.1	2.4	0.2	0.000	0.43	0.07
50	500	0.55	3.0	3.9	1.1	1.1	1.1	1.3	1.1	3.8	0.4	0.000	0.43	0.07
50	500	0.60	3.4	5.5	1.4	1.4	1.4	1.7	1.4	4.8	0.4	0.000	0.42	0.08
50	500	0.65	4.8	9.8	1.9	1.9	1.9	2.3	1.9	10.4	0.4	0.000	0.42	0.09
50	500	0.70	7.1	21.5	2.2	2.3	2.3	2.8	2.3	47.8	0.7	0.000	0.44	0.22
50	500	0.75	9.8	37.2	3.2	3.0	3.3	3.8	3.3	86.1	0.9	0.000	0.44	0.52
50	500	0.80	12.7	55.4	3.3	3.3	3.5	4.3	3.6	113.0	0.9	0.020	0.43	1.51
50	500	0.85	15.7	75.6	3.5	3.5	3.7	5.1	3.9	163.5	1.0	0.036	0.44	4.14
50	500	0.90	18.9	107.9	3.5	3.6	3.8	7.7	4.2	230.0	1.2	0.066	0.44	7.27
50	500	0.95	22.1	129.9	4.1	3.9	4.2	13.9	5.4	255.2	1.3	0.176	0.45	1.84