

## 단위 수요를 가지는 링 루팅 및 파장할당 문제의 새로운 하한에 관한 연구<sup>1)</sup>

A new lower bound for the ring routing and wavelength assignment problem with unit demands

김후곤

경성대학교 경영정보학과, e-mail : [hkim@ks.ac.kr](mailto:hkim@ks.ac.kr)

링 루팅 및 파장할당 문제는 최근 활발하게 구측되는 있는 WDM 링의 설계 및 운용에 있어서 매우 중요한 문제이다. 이 문제는 링 상의 노드 쌍간에 단위수요가 주어졌을 때, 각 수요들을 링 상의 두 가지 가능한 경로 중 하나로 보내기 위한 광경로의 설정과 설정된 광경로에 파장을 할당하는 두가지 의사결정을 동시에 결정하여야 되는 매우 복잡한 문제이다. 또한 파장할당시에 동일한 링크를 공유하는 광경로에는 동일한 파장을 할당할 수 없다는 제약이 있으면서, 목적함수는 할당하는 파장의 수를 최소화하는 것이 된다. 본 연구에서는 링 루팅 및 파장할당 문제에 대해 평행루팅을 만족하는 최적해가 항상 존재한다는 것을 보이고, 최적해의 다양한 특성들을 구명하기로 한다. 또한 새로운 하한을 제시하고 이 하한이 기존의 하한에 비해서 매우 효과적임을 보이도록 한다.

### I. 서론

WDM(Wavelength Division Multiplexing)은 하나의 광 케이블을 이용하여 여러개의 서로 다른 파장(wavelength)을 동시에 전송할 수 있으므로, 기존에 설치된 광케이블을 그대로 이용하면서도 용량은 파장의 수만큼 증가시킬 수 있다는 장점 때문에 각광받고 있는 광 전송 기술이다[10]. WDM을 이용한 광전송망은 기존의 SONET(Synchronous Optical Network) 및 SDH(Synchronous Digital Hierarchy)방식으로 구축된 광전송망을 대신하여 새롭게 구축되는 기가급(Gigabps) 이상의 기간 통신망(backbone network)에 주로 이용되고 있다. 이미 구축된 SONET 방식의 광전송망들이 대부분 운용 및 유지보수가 편리하면서도 생존도를 보장할 수 있는 구조인 링을 가장 많이 채택하고 있는 것처럼, WDM 전송망의 경우에도 링 형태가 선호

1) 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01 2001 00508) 지원으로 수행되었음

되고 있다.

WDM 네트워크에서는 수요 노드와 공급 노드간의 트래픽 처리를 위해 두 노드간 논리적 연결(logical connection)을 위한 광경로(lightpath or route)의 설정과 설정된 광경로에 파장(wavelength)을 할당하는 결정이 동시에 이루어져야 한다. 이때 광경로 상에 놓인 노드에서 파장 변환을 허용하는 경우와 파장 변환을 허용하지 않는 경우로 나누어지는데, 전자의 경우 후자에 비해 장비의 가격이 비싸고 개발 또한 힘들다. 파장 변환을 허용하지 않는 경우하나의 광경로는 거쳐가는 링크들에 동일한 파장(wavelength)이 할당된 것이므로, 동일한 링크를 공유하는 광경로들은 같은 파장을 사용할 수 없다는 제약이 따르게 된다. 또한 노드 쌍간 트래픽 수요(the required connection)가 여러 개이면 이에 상응하는 광경로를 설정하여야 한다.

RWAP(Routing and Wavelength Assignment Problem)는 각 노드 쌍간에 트래픽 수요가 있고 각 노드에서 파장 변환이 허용되지 않을 때, 이들 트래픽 수요를 위한 광경로의 설정과 광경로들에 파장(wavelength)을 할당하는 문제이다. 이때 목적함수는 할당하는 파장의 수를 최소화하는 것이 된다. 본 연구에서는 네트워크는 링으로 한정하고, 모든 노드쌍간의 트래픽은 단위 수요로 주어진 문제(RWAP with Unit Demands, unit RWAP)의 경우로 국한하기로 하는데, 이러한 unit RWAP는 NP complete이다 [13].

한편 어떤 링에 대한 광경로들이 주어졌을 때, 특정 링크를 지나가는 광경로들의 수를 링크 용량이라 하고, 모든 링크의 용량 중 최대값을 링 용량이라 하기로 한다. 만약 unit RWAP에서 광경로 상에 놓인 노드에서 파장 변환을 허용하면 이 문제는 단순히 링 용량을 최소화하는 문제(Ring Loading Problem, RLP)가 되고, 이에 대한 최적 해법에는 Vachani 등의 해법[12], Schrijver 등의 해법[9], 명과 김의 해법[3], Amico 등의 해법[5]이 발표되어 있다. 본 연구

에서는 RLP의 모든 트래픽 수요가 1로 주어진 문제(RLP with Unit Demands)를 unit RLP로 부르기로 한다. 한편 링 네트워크에서 파장 변환을 허용하지 않는 경우에, 파경로가 이미 주어져 있고 이들 파경로에 대한 최소 파장 할당 문제는 순환 아크 채색 문제(circular arc coloring problem)가 되고, 이는 NP complete임이 Tucker[11]에 의해 증명되어 있다. 이와 관련된 연구는 그래프 이론 분야에서 오래전부터 많은 연구가 이루어지고 있다. 본 연구에서는 RLP 및 관련된 연구 결과들을 이용하여 unit RWAP 최적해의 특성을 규명하고, 새로운 하한을 제안하기로 한다. 본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 용어를 정의하고, 3장에서는 unit RWAP 최적해의 특성 및 하한을 알아보고, 4장에서는 새로운 하한을 제시하기로 한다.

## II. 용어의 정의

링은  $n$ 개의 노드들이 시계방향으로 1부터  $n$ 까지 번호가 붙어있는 방향성이 없는 네트워크로 정의한다. 이때 노드의 집합  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 와 링크의 집합  $L = \{1, 2, \dots, n\}$ 로 이루어진 방향성이 없는 링이 주어져 있다고 가정하자. 여기에서 링크  $i$ 는 노드  $i$ 와 노드  $i+1$ 을 연결하는 것이고, 링크  $n$ 은 노드  $n$ 과 노드 1을 연결하는 링크를 나타낸다.  $K$ 는 단위 수요가 존재하는 노드 쌍들의 인덱스 집합이다. 이때  $o(k)$ 를 노드 쌍  $k$ 의 공급노드라 하고  $d(k)$ 를 노드 쌍  $k$ 의 수요노드라 정의하고,  $o(k) < d(k)$ 라 가정한다. 또한 노드쌍을  $[o(k), d(k)]$ 로 표시하기로 한다.  $o(k)$ 와  $d(k)$ 는 링 상에 존재하는 서로 다른 두 개의 노드이므로 이들간에는 링상에서 두가지의 경로가 존재한다. 경로가  $\{o(k), o(k)+1, \dots, d(k)-1\}$ 의 링크로 구성되어 있으면 시계 방향이라고 부르고  $L_k^+$ 로 표시하고, 경로가  $\{d(k), d(k)+1, \dots, n, 1, 2, \dots, o(k)-1\}$ 의 링크로 구성되어 있으면 반시계 방향이라고 부르고  $L_k^-$ 로 표시한다. 이때 링크  $n$ 은 항상 모든  $k \in K$ 에 대하여  $L_k^-$ 에 포함됨에 유의하자.

편의상 노드 쌍  $k$ 를  $o(k)$ 와  $d(k)$ 를 연결하는 링상의 코드(chord)로 정의하면 노드 쌍과 코드는 일대일로 대응된다. 두 개의 코드가 동일한 노드를 공유하지 않으면서 서로 만나면 이들 코드는 교차(cross)한다고 하고, 그 이외의 경우는

평행(parallel)하다고 한다. 이처럼 링상에서 코드들로 이루어진 그래프를  $G(K)$ 로 표시하면 이는 서클 그래프(circle graph)가 된다.  $G(K)$ 에서 상호 교차하는 코드들의 부분 집합을 코드 클릭(chord clique)이라 한다.

한편  $k \in K$ 에 대해  $x_k$ 는 코드  $k$ 의 단위 수요를 시계방향과 반시계방향 중 하나로 루팅시킨 방향을 나타내는 이진변수로서, 시계방향으로 수요를 보내면  $x_k = 1$ 이라하고 반시계방향으로 수요를 보내면  $x_k = 0$ 이라 한다.

$X = \{x \in \{0, 1\}^K \mid 0 \leq x_k \leq 1, \forall k \in K\}$ 로 정의하면, 임의의  $x \in X$ 는 주어진 수요를 만족하는 파경로의 설정 즉 루팅에 대응하는 벡터가 된다. 만약  $x_k = 1$  ( $x_k = 0$ )이면  $L_k^+$  ( $L_k^-$ )들에 속한 링크들이 연속으로 연결된 하나의 파경로가 되는데, 이를 링상의 순환아크(circular arc on the ring)라 한다.  $L_k^+$ 는  $k$ 의 시계방향순환아크로  $L_k^-$ 는  $k$ 의 반시계방향순환아크로 부르기로 한다. 만약 두개의 순환아크가 동일한 링크를 공유하면 이들은 교차한다고 한다. unit RWAP는 코드  $k$ 의 루팅에 의해 만들어지는 순환아크들에 1단위의 파장수요를 할당하는 문제가 되고, 목적함수는 할당하는 파장의 수를 최소화하는 것이다. 그리고 링상에서 루팅  $x$ 에 대응하는 순환아크들로 만들어지는 그래프를 순환아크 그래프(circular arc graph)라 하고,  $F(x)$ 로 표시하기로 한다. 이때 서로 동일한 링크를 공유하는 순환아크는 동일한 파장을 사용할 수 없다.  $F(x)$ 에서 상호 교차하는 순환아크들의 부분 집합을 순환아크 클릭(circular arc clique)이라 한다. 주어진  $F(x)$ 에 대해 필요한 최소 파장의 수를  $w(F(x))$ 로 나타내기로 한다. 링상에서 임의의 순환아크가 주어졌을 때 최소 파장의 수를 결정하는 문제는 순환아크 채색 문제(circular arc coloring problem)에 해당되고, 이는 NP complete 이다 [11].

$x \in X$ 에 대해  $F(x, l)$ 은 링크  $l \in L$ 을 지나는 순환아크들의 수를 나타내고,  $z(x) = \max\{F(x, l) \mid l \in L\}$ 을 나타낸다. 즉  $z(x)$ 는 루팅  $x \in X$ 에서 링크의 용량 중에서 최대인 것이다. unit RLP는  $\min\{z(x) \mid x \in X\}$ 로 정식화 되고, 이의 최적해를  $z^*$ 라 하자. 또한 unit RWAP는  $\min\{w(F(x)) \mid x \in X\}$ 로 정식화 되고, 이의 최적해를  $w^*$ 라 하자.

서로 다른 두 링크  $i, j \in L$ 는 컷(cut)을 나타내고,  $(i, j)$ 로 표시하자.  $G(K)$ 에서 컷  $(i, j)$ 와 교차하는 코드들의 집합을  $K(i, j)$ 로 나타내기로 한다.

### III. unit-RWAP 최적해의 특성 및 하한

두개의 평행한 코드의 루팅에 의해 만들어진 순환아크가 동일한 링크를 공유하지 않을 때, 이 루팅은 평행루팅이라 한다. 평행루팅의 개념은 RLP의 최적해에 대한 특성을 규명하는데 매우 유용하게 이용되고 있다. 다음의 정리를 살펴보자.

**정리 1[1,9,13].**  $x \in X$ 가 평행루팅이 아니라고 하면,  $z(x') \leq z(x)$ 를 만족하는 평행루팅  $x' \in X$ 가 항상 존재한다.

정리 1에 의해 unit RLP에서 평행루팅을 만족하는 최적해가 항상 존재한다는 것을 알 수 있다. 본 연구에서는 또한 unit RWAP에서도 평행루팅을 만족하는 최적해가 항상 존재함을 다음의 정리를 통해 보이도록 하겠다.

**정리 2.**  $x \in X$ 가 평행루팅이 아니라고 하면,  $w(F(x')) \leq w(F(x))$ 를 만족하는 평행루팅  $x' \in X$ 가 항상 존재한다.

(증명) [그림 1]의 (a)와 같이 두개의 평행한 코드  $s$ 와  $t$ 에 대해  $x_s = 0$ 과  $x_t = 1$ 인 루팅  $x$ 가 주어졌다고 하자. 루팅  $x$ 에 의해 만들어지는 두

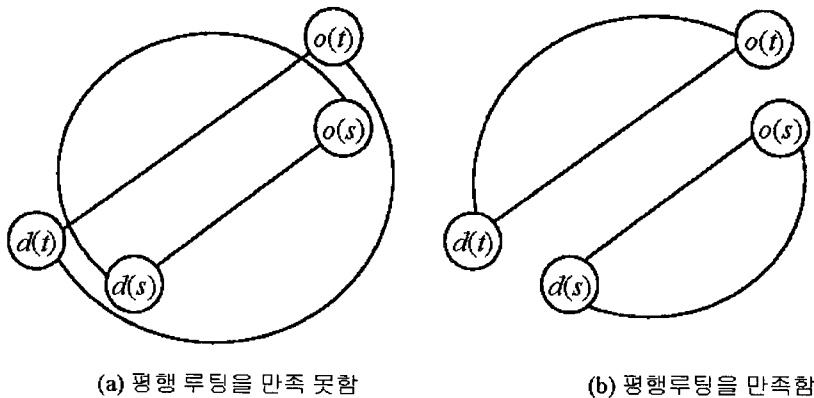
개의 순환아크  $L_s^-$ 와  $L_t^+$ 는 동일한 링크를 공유하므로 평행루팅을 만족하지 못하고 있다.

[그림 1]의 (b)와 같이  $x'_s = 1$ 과  $x'_t = 0$ 인 새로운 루팅  $x'$ 을 정의하자. 그러면 루팅  $x'$ 에 의해 만들어지는 두개의 순환아크  $L_s^+$ 와  $L_t^-$ 는 동일한 링크를 공유하지 않으므로 평행루팅을 만족하게 된다. 이때 [그림 1]의 (a)와 (b)에서 보듯이 모든  $l \in L$ 에 대해  $F(x', l) \leq F(x, l)$ 가 성립한다. 이제  $x$ 의 순환아크에서 사용된 파장을 이용하여  $x'$ 의 순환아크에 할당하는데, (a)에서  $L_s^-$ 에 사용된 파장을 (b)에서  $L_t^-$ 에 할당하고 (a)에서  $L_t^+$ 에 사용된 파장을 (b)에서  $L_s^+$ 에 할당하자. 그런데  $L_s^- \subset L_s^+$ 이고  $L_t^+ \subset L_t^-$ 이므로  $w(F(x')) \leq w(F(x))$ 가 성립함을 알 수 있다. ■

위의 정리 1과 정리 2로부터 RLP 뿐만 아니라 unit RWAP에서도 평행루팅을 만족하는 최적해가 항상 존재한다는 것을 알 수 있다.

**정리 3[2,7].** RLP의 최적 해법인 INTEGER[2]는 평행루팅을 만족한다.

Myung 등[6]에 의해 INTEGER의 수행 시간은  $O(n|K|)$  였는데, 최근 명과 김[3]의 결과를 적용하면  $O(\min\{n|K|, n^2\})$  수행 시간 내에 가능하다. 이는 현재까지 알려진 RLP를 위한 최적 해법 중에서 가장 빠른 수행 시간의 해법이다. 즉 RLP의 최적해이면서 평행루팅을 만족하는 해는 INTEGER를 이용하면 쉽게 구할 수 있는 것이다. 또한 평행루팅을 만족하는 unit RWAP



[그림 1] 평행루팅

의 최적해가 항상 존재하므로, 평행루팅의 개념을 이용하면 unit RWAP에 대한 효율적인 근사해법의 개발이 가능할 것으로 보인다. 그러나 unit RWAP는 NP complete이므로 만약 새로운 해법의 효율성을 알아보려면 좋은 하한을 가지고 비교하는 것이 필요한데, 기존에 알려진 하한에 대해서 알아보도록 하자.

unit RWAP에서 순환아크들이 링크를 공유하면 동일한 파장을 사용할 수 없다는 제약을 완화하게 되면 unit RLP가 되므로  $z^* \leq w^*$ 가 된다. 즉 unit RLP의 최적해는 unit RWAP에 대한 하한이 되는 것이다.  $w^*$ 에 대하여  $z^*$ 가 얼마나 좋은 하한인지를 알아보자.

$G(K)$ 의 컷  $(i, j)$  중에서 코드의 수가 가장 많은 것을 최대 컷이라 하고, 이를  $(i^*, j^*)$ 라 하자. 즉 모든  $i < j$ ,  $i, j \in V$ 에 대해  $|K(i^*, j^*)| \geq |K(i, j)|$ 이다. 그러면  $|K(i^*, j^*)|$ 는 최대컷에 속한 코드의 수가 된다. 이때 기존의 RLP의 연구 결과에 의해 다음의 정리 4와 5가 성립한다.

**정리 4**[12]. 
$$\frac{|K(i^*, j^*)|}{2} \leq z^* \leq \frac{|K(i^*, j^*)| + 1}{2}$$

**정리 5**[1].  $z^* \leq w^* \leq |K(i^*, j^*)|$

정리 5로부터  $w^*$ 는  $z^*$ 에서  $|K(i^*, j^*)|$ 까지 가능하고 정리 4로부터  $z^* = \frac{|K(i^*, j^*)|}{2}$ 가 가능하므로, unit RWAP의 최적해는 unit RLP의 최적해로부터 최대 2배까지 차이가 날 수 있음을 알 수 있다. 즉  $z^*$ 는 항상  $w^*$ 의 효율적인 하한이 될 수 없다는 것이다. 다음의 예는  $z^* = \frac{|K(i^*, j^*)|}{2}$ 이고  $w^* = |K(i^*, j^*)|$ 인 최악의 경우의 예이다.

**(예제 1)**

$K$ 에 속한 모든 코드는 상호 교차하는 단일 코드클릭으로 구성되어 있고, 각 코드의 수요는 모두 1이라 하자. 따라서  $|K(i^*, j^*)| = K$ 이다. 이때 코드의 공급노드의 순서별로 시계 방향과 반

시계 방향으로 수요 1을 번갈아가면서 루팅시키는 것이 unit RLP의 최적해임을 쉽게 알 수 있다. 이 최적 루팅에 의해  $K$ 가 짝수이면

$$z^* = \frac{K}{2} + 1 \text{ 이고, } K \text{ 가 홀수이면}$$

$$z^* = \frac{K}{2} \text{ 가 된다. 그리고 } k \in K \text{ 들은 모두}$$

단일 코드클릭에 속하므로 동일한 파장을 사용할 수 없고, 따라서  $w^* = K$ 가 된다.

(예제 1)처럼 unit RLP의 최적해  $z^*$ 와 unit RWAP의 최적해  $w^*$ 는 최대 2배까지 차이가 날 수 있으므로,  $z^*$ 는  $w^*$ 에 대하여 항상 좋은 하한이 될 수 없다. 이러한 최악의 경우에도 효과적으로 적용할 수 있는 하한으로는 코드클릭을 이용한 코드클릭하한이 있다. 이를 알아보자.  $G(K)$ 에서  $C$ 를 코드클릭 중에서 클릭에 속한 코드의 수가 가장 많은 것이라 하면, 다음의 정리가 성립한다.

**정리 6(코드클릭 하한)**[1,4].  $C \leq w^*$

정리 5와 6으로부터 다음의 정리 7이 성립한다.

**정리 7.**  $\max\{C, z^*\} \leq w^*$

즉 unit RWAP의 하한은 이의 완화된 문제인 unit RLP의 최적해인  $z^*$  뿐만 아니라, 코드클릭에 의해서도 하한이 결정될 수 있음을 알 수 있다. 특히 코드클릭 하한의 경우 (예제 1)에서 제시한 최악의 경우에 적합한 하한을 제공함을 알 수 있다. 이러한 코드클릭하한은 (예제1)과 같은 최악의 경우에 효과적이지만, 이러한 경우는 일반적인 문제에서 거의 발생하지 않는다는 문제점이 있다. 본 연구에서는 이러한 점을 감안하여 일반적인 문제에 적용되면서, 기존의  $z^*$  및 코드클릭하한보다 효율적인 새로운 하한을 제시하기로 한다.

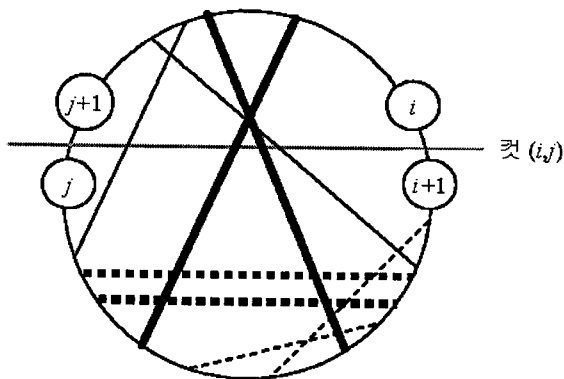
**IV. 새로운 하한**

새로운 하한을 위해 먼저 다음의 용어를 정의하도록 한다.  $K$ 는 임의의 컷  $(i, j)$ 에 의해, 컷

$(i, j)$ 에 포함되는 코드의 집합  $K(i, j)$ 과 컷  $(i, j)$ 에 포함되지 않는 코드의 집합  $K | K(i, j)$ 로 나누어진다. 그리고  $k \in K | K(i, j)$ 는  $o(k), d(k) \in \{i+1, i+2, \dots, j\}$ 인 코드들의 집합  $S(i, j)$ 와  $o(k), d(k) \in \{1, 2, \dots, i, j+1, j+2, \dots, n\}$ 인 코드들의 집합  $T(i, j)$ 로 분할되고, 이때  $S(i, j) \cap T(i, j) = \emptyset$ 이다.

$C(i, j) \subseteq K(i, j)$ 인 코드클릭이라 하자. 그리고 어떤 주어진  $C(i, j)$ 에 대해,  $U(i, j)$ 는 다음과 같이 정의되는 코드의 집합이다.  $U(i, j) \subseteq S(i, j)$ 이거나  $U(i, j) \subseteq T(i, j)$ 이면서,  $k \in U(i, j)$ 는 주어진  $C(i, j)$ 의 모든 코드와 교차하는 코드의 집합으로 정의한다. 어떤 주어진  $C(i, j)$ 에 대해 다양한  $U(i, j)$ 가 정의될 수 있고,  $C(i, j)$ 는 코드클릭이지만  $U(i, j)$ 는 코드클릭일 필요는 없음에 주의하자. 또한  $S(i, j) \cap T(i, j) = \emptyset$ 이므로  $U(i, j) \subseteq S(i, j)$ 이거나  $U(i, j) \subseteq T(i, j)$  중 하나만을 만족하게 된다. 논의의 편의를 위해  $U(i, j) \subseteq S(i, j)$ 를 가정하기로 한다.

[그림 2]는 어떤  $C(i, j)$ 와 이  $C(i, j)$ 에 의해 정의되는  $U(i, j)$ 의 예를 보여주고 있다. 그림에서 컷  $(i, j)$ 에 대해 실선은  $K(i, j)$ 에 속한 코드이고, 이 중에서 굵은 실선은  $C(i, j)$ 에 속한 코드이다. 그리고 점선은  $S(i, j)$ 에 속한 코드이고, 이 중에서 굵은 점선은  $U(i, j) \subseteq S(i, j)$ 에 속한 코드를 보여주고 있다.



[그림 2]  $C(i, j)$ 와  $U(i, j)$ 의 예

어떤 루팅  $x \in X$ 에 의해  $U(i, j)$ 의 코드중 반시계방향으로 보내어지는 코드의 수를  $u$ 로 정의하자. 편의상  $U(i, j) \subseteq S(i, j)$ 라 하였으므로,

$$u = \sum_{k \in U(i, j)} (1 - x_k) \text{ 이고 } 0 \leq u \leq U(i, j) \text{ 이}$$

다. 이제 컷  $(i, j)$ 에 대해 어떤  $C(i, j)$ 와  $U(i, j)$ 가 주어졌을때, 이를 이용하여 다음과 같은 새로운 하한을 정의할 수 있다.

**정리 8.**

$$C(i, j) + U(i, j) - \frac{U(i, j)}{2} \leq w^*$$

(증명)

임의의 루팅  $x \in X$ 에 대응하는  $u$ 에 의해,  $U(i, j)$ 는  $U(i, j) - u$ 개의 시계방향순환아크와  $u$ 개의 반시계방향순환아크가 만들어진다. 이때  $C(i, j)$ 는 코드클릭이므로,  $C(i, j)$ 에 속한 코드들은 어떠한 루팅  $x \in X$ 에 대해서도 순환아크의 수가  $C(i, j)$ 인 순환아크클릭을 만들게 된다. 그리고 코드  $k \in U(i, j)$ 는 정의에 의해  $C(i, j)$ 에 속한 모든 코드와 교차하므로,  $k$ 의 시계방향순환아크  $L_k^+$ 와 반시계방향순환아크  $L_k^-$ 는  $C(i, j)$ 의 모든 순환아크와 교차하게 된다. 이때 정의에 의해  $C(i, j)$ 는 코드클릭이지만  $U(i, j)$ 는 코드클릭일 필요는 없음에 주의하자. 그렇지만  $U(i, j)$ 의  $U(i, j) - u$ 개의 시계방향순환아크와  $C(i, j)$ 의 모든 순환아크는 하나의 순환아크클릭이 되고, 이 순환아크클릭의 크기는

$$C(i, j) + U(i, j) - u \tag{1}$$

가 된다. 마찬가지로  $U(i, j)$ 의  $u$ 개의 반시계방향순환아크와  $C(i, j)$ 의 모든 순환아크도 하나의 순환아크클릭이 되고, 이 순환아크클릭의 크기는

$$C(i, j) + u \tag{2}$$

가 된다. 이때 모든 루팅  $x \in X$ 에 대해 (1)과 (2)를 최소화하는 루팅을  $x^*$ 라 하고, 여기에 대응하는  $u$ 를  $u^*$ 라 하면.

$$\max\{C(i, j) + U(i, j) - u^*, C(i, j) + u^*\} \leq w^* \tag{3}$$

가 성립하게 된다. 여기에서 (3)의 좌변값을 최소화하는 루팅  $x^*$ 에 대응하는

$$u^* = \frac{U(i, j)}{2} \tag{4}$$

임을 쉽게 알 수 있고, (3)에 (4)를 대입하면 정리가 성립하게 된다. ■

정리 5에서  $z^* \leq w^*$ 이므로, 정리 8에서  $C(i, j) + U(i, j) \leq z^*$ 이면  $w^*$ 에 대한 하한으로서 의미를 가지지 못한다. 따라서  $C(i, j) + U(i, j) > z^*$ 라 하자. 이때 최대컷

$(i^*, j^*)$ 에 대해  $\frac{|K(i, j)|}{2} \leq \frac{|K(i^*, j^*)|}{2}$  이

고, 정리 6에 의해  $\frac{|K(i^*, j^*)|}{2} \leq z^*$ 이므로

$\frac{|K(i, j)|}{2} \leq z^*$ 이다. 따라서  $C(i, j) +$

$U(i, j) > z^*$ 를 만족하면,

$$\frac{|K(i, j)|}{2} < C(i, j) + U(i, j) \quad (5)$$

가 성립한다. 이제 컷  $(i, j)$ 에 속한 코드의 수  $|K(i, j)|$ 를 고려하여 정리 8보다 나은 하한을 정의하도록 하자.

**정리 9.**  $C(i, j) + U(i, j)$

$$\min\left\{ \frac{C(i, j) + U(i, j) - \frac{|K(i, j)|}{2}}{2}, \frac{U(i, j)}{2} \right\} \leq w^*$$

(증명) 정리 8의 증명과 동일하게 임의의 루팅  $x \in X$ 에 대응하는  $u$ 에 의해,  $U(i, j)$ 는  $U(i, j) - u$ 개의 시계방향순환아크와  $u$ 개의 반시계방향순환아크가 만들어진다고 하자. 그러면 (1)과 (2)의 순환아크클릭이 만들어진다. 또한  $U(i, j) \leq S(i, j)$ 로 가정하였으므로,

$k \in U(i, j)$ 에 대해 링크  $i, j \in L_k$ 이다. 그리고

루팅  $x$ 에 의해  $U(i, j)$ 의 반시계방향순환아크의 수는  $u$ 개이므로, 링크  $i$ 와  $j$ 의 용량은  $u$ 만큼 증가하게 된다. 이때  $K(i, j)$ 에 속한 코드들에 의

해서 링크  $i$ 와  $j$ 의 최대용량은  $\frac{|K(i, j)|}{2}$  보

다 크거나 같으므로,  $U(i, j)$ 의  $u$ 개의 반시계방

향순환아크에 의해 링크  $i$ 와  $j$ 의 최대용량은

$$\frac{|K(i, j)|}{2} + u \quad (6)$$

보다 크거나 같게 된다. 이때 모든 루팅  $x \in X$ 에 대해 (1), (2), (6)을 최소화하는 루팅을  $x^*$ 라 하고, 여기에 대응하는  $u$ 를  $u^*$ 라 하면

$$\max\left\{ C(i, j) + U(i, j) - u^*, C(i, j) + u^*, \frac{|K(i, j)|}{2} + u^* \right\} \leq w^* \quad (7)$$

가 성립하게 된다. 여기에서 (7)의 좌변값을 최소화하는 루팅  $x^*$ 에 대응하는

$$u^* = \min\left\{ \frac{C(i, j) + U(i, j) - \frac{|K(i, j)|}{2}}{2}, \frac{|K(i, j)|}{2} \right\}$$

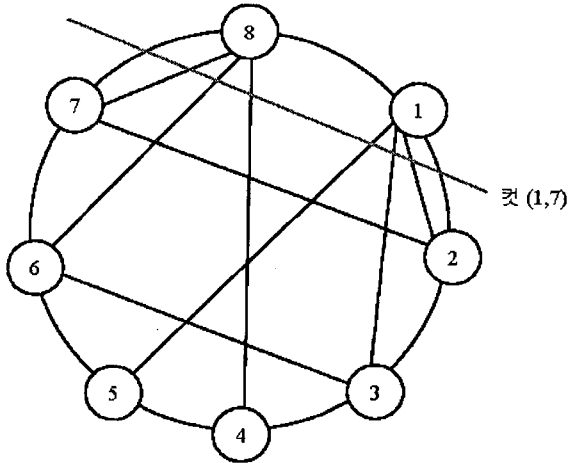
$$\frac{U(i, j)}{2} \quad (8)$$

임을 쉽게 알 수 있다. 이때 (5)가 성립하므로,  $u^*$ 는  $0 \leq u^* \leq U(i, j)$ 를 만족한다. 따라서 (8)에 (7)를 대입하면 정리가 성립함을 알 수 있다. ■

다음은 정리 9에서 제안한 하한의 적용 예를 보여주고 있다.

**(예제 2)**

[그림 3]과 같이 8개의 노드와 8개의 코드로 구성된 그래프  $G(K)$ 가 주어졌다고 하자.



[그림 3]  $G(K)$ 의 예

[그림 3]의 그래프에서 [1,5]와 [4,8]을 반시계방향으로 보내고 나머지를 모두 시계방향으로 보내는 루팅은 unit RLP의 최적 루팅이 되고, 이때  $z^* = 3$ 이다. 또한 코드클릭 중에서 가장 큰 것은 [1,5], [4,8], [2,7] 또는 [1,5], [4,8], [3,6]이므로 코드클릭하한은  $C = 3$ 이 된다.

정리 9의 하한을 구하기 위해, 컷 (1,7)에 대하여  $C(1,7) \{[1,5], [4,8]\}$ 과  $U(1,7) \{[2,7], [3,6]\}$ 으로 정의하자. 그러면

$$\begin{aligned} & \frac{C(1,7) + U(1,7) - \frac{|K(1,7)|}{2}}{2} \\ &= \frac{2+2 - \frac{6}{2}}{2} = 0 \text{ 이고 } \frac{U(1,7)}{2} = \frac{2}{2} \end{aligned}$$

1 이므로, (8)의  $u^* = \min\{0, 1\} = 0$ 이다. 따라서  $C(1,7) + U(1,7) - u^* = 2+2-0=4$ 가 된다. 이때  $w^* = 4$ 임을 쉽게 보일 수 있고, 본 연구에서 제안한 하한은 최적해와 동일한 값을 제공한다. 반면에 이 예에서  $z^* = C = 3 < w^*$ 이어서, 효과

적인 하한이 되지 못하고 있다.

## V. 결론

WDM 방식의 링 네트워크는 기간 통신망을 중심으로 활발하게 구축이 진행되고 있다. 본 연구에서는 WDM 링의 루팅 및 파장할당 문제인 RWAP의 특수한 형태로서, 단위수요를 가지는 unit RWAP에 대해 정의하고 이의 최적해의 특성 및 하한에 대한 이론적 결과를 제시하였다. 이를 위해 먼저 최적 해법이 알려져 있는 RLP의 평행루팅 개념을 이용하여, 평행루팅을 만족하는 unit RWAP의 최적해가 항상 존재함을 보였다. 또한 unit RWAP가 NP complete임을 감안하여 unit RWAP에 대한 새로운 하한을 제시하고, 이 하한이 기존의 하한에 비해 보다 일반적인 경우에도 효율적으로 적용될 수 있음을 예제를 통하여 보였다.

그러나 본 연구에서 제안한 하한이 실제 문제에서 얼마나 효율적인지를 알아보려면 다양한 문제에 대한 실험결과의 산출이 필요할 것으로 보인다. 또한 이 하한의 이론적 효율성을 검증하려면, 이 하한을 이용한 새로운 근사해법의 개발이 이루어져야 할 것으로 보인다. 이러한 점들을 고려하여, 향후의 연구방향으로는 평행루팅과 새로운 하한을 이용한 unit RWAP의 근사 해법의 개발과 개발된 해법의 이론적 및 실제적 효율성을 규명하는데 초점을 맞추어야 할 것이다.

## 참고 문헌

- [1] 김후곤, 백천현, 정용주 "WDM 링에서의 루팅 및 파장할당에 관한 연구," 「한국경영과학회지」, 제27권 4호, 2002.
- [2] 명영수, "정수단위로만 루팅이 허용되는 SONET링의 용량결정문제", 「한국경영과학회지」, 제25권 1호, 1998.
- [3] 명영수, 김후곤, "분할 루팅이 허용되는 링의 용량결정문제에 대한 개선된 해법," 「한국경영과학회지」, 제26권 4호, 2001.
- [4] C. T. Cheng, "A new approximation algorithm for the demand routing and slotting problem on rings with unit demands", *Lectures in Computer Science 1671: Randomization, Approximation and Combinatorial Optimization*, 1999, pp.

210 220.

- [5] M. Dell'Amico, M. Labbe, and F. Maffioli, "Exact Solution of the SONET Ring Loading Problem", *Operations Research Letters*, 26, 1999, pp. 119 129.
- [6] Y. S. Myung, H. G. Kim and D. W. Tcha, "Optimal load balancing on SONET bidirectional rings", *Operations Research*, 45, 1997, pp.148 152.
- [7] Y. S. Myung, "An Efficient Algorithm for the Ring Loading Problem with Integer Demand Splitting", to appear in *SIAM J. Discrete Math*.
- [8] D. Rotem and J. Urrutia, "Finding Maximum Cliques in Circle Graphs", *Networks*, 11, 1981, pp.269 278.
- [9] A. Schrijver, P. Seymour and P. Winkler, "The ring loading problem", *SIAM J. Discrete Math*, 11, 1998 pp.1 14.
- [10] T. E. Stern and K. Bala, *Multimavelength Optical Networks: A Layered Approach*, Addison Wesley, 1999.
- [11] A. Tucker, "Coloring a family of circular arcs", *SIAM J. Appl. Math*, Vol. 29, No. 3, Nov., 1975.
- [12] R. Vachani, A. Shulman and P. Kubat, "Multicommodity flows in ring networks", *INFORMS Journal on Computing*, 8, 1996, pp.235 242.
- [13] G. Wilfong and P. Winkler, "Ring Routing and Wavelength Translation," *ACM SIAM Sym. on Discrete Math*, 1998.