

대기 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템의 근사법

An approximation of the M/G/1 system with finite workload capacity

이형중, 김정기, 허 선
한양대학교 산업공학과

Abstract

In this paper, we propose an approximation of the M/G/1 system with finite workload capacity, where customers whose admission to the system would increase the workload beyond a prespecified finite capacity limit are not accepted. Our approximation method is based on the idea that the service time of a customer in the M/G/1 system can be approximated as the sum of service times of a batch of customers in the $M^x/d/1$ system where the service time is deterministic and very small. That is, the original service time is discretized and approximated by the batch size. We exemplified our method by obtaining the average workload of the M/M/1 system by means of the $M^x/d/1$ system, where the batch size is geometric. In addition, the approximate blocking probabilities of the M/M/1 and $M/E_k/1$ system with finite workload capacities are sought. The proposed method turns out to give a good approximation, which is compared with a simulation.

1. 서론

고객의 도착 시점에서 부하량에 따라 고객이 시스템에 제한적으로 들어오는 대기시스템들이 있다. 부하량은 대기공간내 있는 고객들의 서비스 양과 서버에 남아있는 잔여서비스 양의 합이다. 고객은 포아송과정으로 도착하고 각각의 고객은 서버에서 처리해야 할 양의 서비스 양을 가지고 들어온다. 그 서비스 양은 버퍼에 저장되고 버퍼의 크기는 고정되어 있다. 고객이 도착할 때 부하량이 버퍼의 크기를 넘지 않고, 그가 가지고 들어오는 서비스 양과 부하량의 합이 버퍼의 크기를 넘게 될 경우에 들어온 고객의 처리에 따라 세 가지 경우로 나뉜다. 첫 번째, 고객이 가지고 들어오는 모든 서비스 양을 서비스 받는다. 두 번째, 고객의 가지고 들어오는 서비스 양을 버퍼에 채우고 남은 서비스 양은 버린다. 세 번째, 고객이 시스템에 들어오지 못하는 경우가 있다.[7]

첫 번째 고객 유형을 가지고 있는 대기시스템은 서비스를 기다리는 고객이 대기공간에서 기다리는 시간이 클 경우 서비스를 포기하는 모형으로서

M/G/1 타임아웃 대기 시스템이라 한다. 이 대기 시스템의 경우, traffic intensity가 1이하인 경우는 De Kok and Tijms[4]에 의해 가상대기시간의 안정상태 분포를 구해졌고, 최근에 Bae, Kim and Lee[3]에 의해 가상대기시간의 안정상태 분포를 확실하게 얻었다. 두 번째 고객 유형을 가지고 있는 대기시스템을 M/G/1 댐 모형이라고 한다. 댐 모형의 경우 Perry and Asmussen[7]는 서비스시간이 지수분포인 경우 안정상태 분포를 도출하였다. 그리고 대부분의 댐 모형은 바쁜기간에 대한 연구가 많이 진행되어 왔다. 최근에 Lee and Kinatader [6]는 고객이 가지고 들어오는 서비스시간이 지수분포일 때 바쁜기간에 대한 라플라스변환을 도출하였고, Kim, Bae and Lee[5]는 고객이 가지고 들어오는 서비스시간이 일반분포일 때 바쁜기간에 대한 라플라스 변환을 도출하였다. 세 번째 고객유형을 가지고 있는 대기시스템을 대기 부하량에 제한이 있는 M/G/1시스템이라 하자. 이 모형은 Perry and Stadje[8]에 의해 서비스시간 분포가 일반분포인 경우 안정상태 차동미분 방정식을 세웠고 서비스규칙이 LIFO인 경우에서 대기고객수와 잔여서비스시간에 대한 결합 안정상태 분포를 구하였고 바쁜기간에 대한 라플라스변환을 구하였다.

본 연구에서는 위에서 제시한 세 번째 고객유형을 가진 대기 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템에 대한 근사법을 제시한다. 근사법에 대한 기본적인 생각은 $M^x/d/1$ 시스템에서 고객집단의 크기 X에 서비스시간 d를 곱한 양을 M/G/1 시스템에서 고객이 가지고 들어오는 서비스 양으로 대체하겠다는 것이다. 즉, $M^x/d/1$ 시스템의 고객수 과정을 가지고 M/G/1 시스템의 부하량 과정을 표현하는 것이다. 근사법의 타당성을 검증하기 위하여 M/M/1 시스템의 부하량 과정을 근사화 해 보았다. 그리고 대기 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템을 Baba[2]에서 제시한 대기 고객수가 m명으로 제한이 있는 $M^x/G/1/m$ 시스템의 해를 이용하여 근사화 한다. 대기 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시

시스템의 안정상태 부하량 분포와 고객이 시스템에 들어오지 못할 거절확률 등을 구한다.

2. M/M/1 시스템의 부하량 과정 근사화

고객의 도착은 도착률 λ 를 갖는 포아송과정으로 이루어지며, 서버의 서비스시간 S 는 평균서비스시간 $E(S)=1/\mu$ 의 지수분포를 따르는 M/M/1 시스템이 있다. 이 시스템의 부하량 과정을 고객집단의 크기가 확률변수 X 를 따르며, 각 고객집단의 도착은 도착률 λ 를 따르는 복합포아송과정으로 이루어지며 서버의 서비스시간 d 는 확정적인 $M^X/d/1$ 시스템의 고객수과정을 이용하여 근사화한다.

근사화 방법으로서 $S \approx Xd$ 를 성립하게 하고 d 의 크기가 작은 값을 가지면 $M^X/d/1$ 의 고객수과정을 이용하여 M/M/1 시스템의 평균 부하량 과정을 유도할 수 있다. 즉, <그림2>에서 $S \approx Xd$ 를 만족하면서 d 의 크기를 아주 작게 하면 <그림1>로 유도되어 진다.

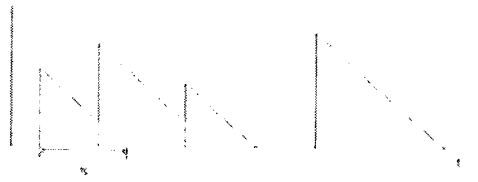


그림 1. M/M/1의 부하량 과정

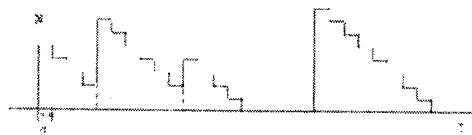


그림 2. $M^X/d/1$ 의 고객수 과정

M/M/1 시스템의 서비스시간을 Xd 로 표현해야 하는데 d 의 크기 분포는 확정적이므로 집단크기 X 에 서비스시간의 분포의 특성을 갖게 해야 한다. 배치사이즈 X 는 이산값이고 서비스시간 S 는 연속

값이므로 $S \approx Xd$ 를 $X = \lceil \frac{S}{d} \rceil$ 의 방법으로 근사화하면 식 (2.1)과 같이 표현된다.

S 가 평균이 $1/\mu$ 인 지수분포이므로 다음과 같이 계산된다.

$$\Pr(X=n) \approx \Pr(n-1 < \frac{S}{d} \leq n) \\ = \Pr((n-1)d < S \leq nd) \\ = (1 - \exp(-\mu d)) \exp(-\mu d)^{n-1} \quad (2.1)$$

그런데 집단도착률이 λ 이고 서비스시간이 d 인 $M^X/G/1$ 시스템의 평균고객수는 식 (2.2)와 같다. (이호우, 1998, p.436 참조)

$$L = \lambda E(X) \left(\frac{\lambda E(X) E(B^2)}{2(1-\rho)} + \frac{E(B)E(X(X-1))}{2E(X)(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} \right) \quad (2.2)$$

여기서 $\rho = \lambda E(X)E(B)$ 이고 B 는 서비스시간을 나타낸다.

식 (2.1)로부터 식 (2.3)과 식 (2.4)을 구한다.

$$E(X) = \frac{1}{(\exp(-\mu d))} \quad (2.3)$$

$$E(X(X-1)) = \frac{2\exp(-\mu d)}{(1 - \exp(-\mu d))^2} \quad (2.4)$$

서비스시간이 고정된 d 이므로 식 (2.5), (2.6)와 같이 계산된다.

$$E(B) = d \quad (2.5)$$

$$E(B^2) = d^2 \quad (2.6)$$

식 (2.3)-(2.6)을 식 (2.2)에 대입하여 정리하면 $M^X/d/1$ 시스템의 평균 고객 수는 아래와 같다.

$$L = \frac{\lambda d(2 - \lambda d)}{2(1 - \exp(-\mu d))(1 - \exp(-\mu d) - \lambda d)} \quad (2.7)$$

$M^X/d/1$ 시스템의 평균고객수에 d 를 곱하면 M/M/1 시스템의 평균부하량을 근사화 할 수 있다. 이는 d 가 0으로 갈수록 더욱 정확해 진다.

$$\lim_{d \rightarrow 0} Ld = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.12)$$

식 (2.12)는 M/M/1 시스템의 평균부하량인 셈이다. 도착과정이 포아송과정이면 안정상태에서 실제 대기시간의 분포는 부하량 분포와 같다. (이호우, 1998, p.416 참조)

3. 대기 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템 근사화 방법

고객의 도착은 도착률 λ 를 갖는 포아송과정으로 이루어지며, 각각의 고객은 $E(S)=1/\mu$ 의 일반분포를 따르는 서비스시간 S 를 가지고 시스템 들어온다. 그리고 고객이 가지고 들어오는 서비스시간과 대기공간에 있는 고객들의 서비스시간 그리고 서버에 서비스 받고 있는 고객의 잔여시간의 합이 특정시간 c 를 넘게 되면 고객이 시스템에 들어오지 못한다. 이런 모형을 대기 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템이라 하자. 이 모형의 부하량과정을 고객집단의 크기가 확률변수 X 를 따르며, 각 고객집단의 도착은 도착률 λ 를 따르는 복합포아송과정으로 이루어지며 서버의 서비스시간은 d 로 일정한 유한비퍼 $M^X/d/1/m$ 시스템의 고객수과정을 이용하여 근사화 한다.

근사화 방법으로는 $S \approx Xd$ 즉 $X = \lceil \frac{S}{d} \rceil$ 를 성립하게 하고 d 는 작은 값을 가지게 하고 c 에 맞게 m 을 결정해 준다. 따라서 d 를 제일 먼저 결정해야 한다. 적절한 d 를 결정하는 방법은 4장에서 다시 고려할 것이다. 다음으로 m 을 결정하고 집단크기 X 의 분포를 구한다. 위 세 가지 파라미터를 결정한 후에는 Baba[2]에서 대기 고객수가 m 명으로 제한이 있는 $M^X/G/1$ 시스템의 해를 제시하였으므로 이를 이용하여 안정상태의 고객수분포와 고객이 시스템에 들어오지 못할 거절 확률을 구할 수 있다. 순서는 다음과 같다.

우선 m 을 결정한다. $c/E(S) \approx m/E(X)$ 와 $E(S) - E(X)d >$ 가 성립해야 한다. 두 식으로부터 $m = \lceil c/d \rceil$ 이다.

다음으로 서비스시간 S 가 일반분포일 때는 각각에 맞는 이산시간 분포가 일반적으로 없기 때문에 d 에 따른 확률분포를 아래와 같이 결정할 수 있다. 식 (3.1)에서 집단크기를 $m+1$ 명 이상을 확률을 구하지 않는 것은 집단크기가 $m+2$ 명 이상이 되면 시스템에 들어오지 못하기 때문이다.

$$\Pr(X=i) - \Pr((i-1)d < S \leq id) \quad (3.1)$$

$i=1, 2, \dots, m+1$

다음으로는 Baba[2]에서 대기 고객수가 m 명으로 제한이 있는 $M^X/G/1$ 시스템의 해를 이용하여 대기 고객수가 m 명으로 제한이 있는 $M^X/d/1$ 모형의 해를 얻을 수 있다.

다음과 같이 기호와 확률을 정의하자.

B : 서비스시간

g_i : 집단의 크기가 i 명일 확률 $i=1, 2, \dots, m+1$

g : 집단의 평균크기

$N(t)$: t 시점에서 시스템내 고객수

$U(t)$: t 시점에서 잔여서비스시간

$P_0(t) = P(N(t)=0)$,

$P_k(u, t) = P((N(t)=k) \& (u < U(t) \leq u+du))$

$u \geq 0, k=1, 2, \dots, m+1$

$$B^*(s) = \int_0^\infty \exp(-su) dB(u)$$

$$P_k^*(s) = \int_0^\infty \exp(-su) P_k(u) du$$

$P_k^*(0)$ 는 안정상태에서 고객이 k 명 있을 확률임을 알 수 있다.

안정상태만을 고려하여 식 (3.2)-(3.3)을 얻는다.

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t), \quad (3.2)$$

$$P_k(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(u, t), \quad k=1, 2, \dots, m+1 \quad (3.3)$$

서비스시간이 고정된 d 값을 가지므로 식 (3.4)를 얻을 수 있다.

$$B^*(s) = \exp(-s/\mu), \quad \mu=1/d \quad (3.4)$$

위에서 정의한 기호와 확률을 이용하여 다음과 같은 안정상태에서 평형방정식을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda g_i P_0 - P_1(0) \quad (3.5)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda g_i - s \right) P_1^*(s) - P_0 \lambda g_1 \exp(-s/\mu) + P_2(0) \exp(-s/\mu) - P_1(0) \quad (3.6)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i - s \right) P_k^*(s) - P_0 \lambda g_k \exp(-s/\mu) + \sum_{i=0}^{k-1} P_i^*(s) \lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0) \exp(-s/\mu) - P_k(0) \quad (3.7)$$

$k=2, \dots, m.$

$$-s P_{m+1}^*(s) - P_0 \lambda g_{m+1} \exp(-s/\mu) + \sum_{i=1}^m P_i^*(s) \lambda g_{m+1-i} - P_{m+1}(0) \quad (3.8)$$

$s = \sum_{i=1}^m \lambda g_i$ 를 식 (3.6)에 대입하고 식 (3.5)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$P_2(0) = \frac{[\sum_{i=1}^{m+1} \lambda g_i - g_1 \exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)] \lambda P_0}{\exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)} \quad (3.9)$$

$s=0$ 을 식 (3.6)에 대입하고 식 (3.5)와 식 (3.9)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$P_1^*(0) = \frac{\sum_{i=1}^{m+1} g_i P_0 [1 - \exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)]}{\sum_{i=1}^m g_i \exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)} \quad (3.10)$$

$s = \sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i$ 을 식 (3.7)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$P_{k+1}(0) = [P_k(0) - P_0 \lambda g_k \exp(-(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i)/\mu) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i) \lambda g_{k-i}] / \exp(-(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i)/\mu) \quad k=2, \dots, m \quad (3.11)$$

식 (3.11)에서 $P_k(0)$ 에서 $P_{k+1}(0)$ 을 얻기 위해서는

$$P_i^*(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i) \quad (i=1, 2, \dots, k-1)$$

이 필요하다. 따라서 식 (3.6)과 식 (3.7)에 각각 $s = \sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i$ 을 대입하여 다음을 얻는다.

$$P_1^*(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i) = [P_0 \lambda g_1 \exp(-(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i)/\mu) + P_2(0) \exp(-(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i)/\mu) - P_1(0)] / \sum_{i=2-k}^m \lambda g_i \quad (3.12)$$

$$P_i^*(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i) = [P_0 \lambda g_i \exp(-(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i)/\mu) + \sum_{i=1}^{i-1} P_i^*(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i) \lambda g_{i-i} + P_{i+1}(0) \exp(-(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i)/\mu) - P_i(0)] / \sum_{i=2-k}^{m+1-i} \lambda g_i \quad (3.13)$$

식 (3.12)와 식 (3.13)을 순환적으로 계산하면 $P_i^*(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i) \quad (i=1, 2, \dots, k-1)$ 을 얻을 수 있다.

$s=0$ 을 식 (4.7)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$P_k^*(0) = [\lambda g_k P_0 + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(0) \lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0) + P_k(0)] / \sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i \quad k=2, \dots, m \quad (3.14)$$

식 (3.8)을 s 에 관해 미분하여 $s=0$ 을 대입하면 다음을 얻는다.

$$P_{m+1}^*(0) = P_0 \lambda g_{m+1} / \mu - \sum_{i=1}^m P_i^{(1)}(0) \lambda g_{m-i+1} \quad (3.15)$$

식 (3.15)을 얻기 위해서 $P_i^{(1)}(0) \quad (i=1, 2, \dots, m)$ 이 필요하므로 식 (3.6)과 식 (3.7)을 미분하여 $s=0$ 을 대입하면 다음을 얻는다.

$$P_1^{(1)}(0) = [-P_0 \lambda g_1 / \mu - P_2(0) / \mu + P_1^*(0)] / \sum_{i=1}^m \lambda g_i \quad (3.16)$$

$$P_k^{(1)}(0) = [-P_0 \lambda g_k / \mu + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^{(1)}(0) \lambda g_{k-i} - P_{k+1}^{(0)} / \mu + P_k^*(0)] / \sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i \quad (3.17)$$

$k=2, 3, \dots, m$

식 (3.10), 식 (3.14), 식 (3.15)를 이용하고 식 (4.18)을 통하여 안정상태에서의 고객수 분포를 얻을 수 있다.

$$P_0 + \sum_{i=1}^{m+1} P_i^*(0) - 1 \quad (4.18)$$

따라서 $\sum_{i=1}^{m+1} i P_i^*(0)$ 는 안정상태에서 평균고객수가 된다. 여기에 d 를 곱하여 주면 대기 부하량에 제한이 있는 $M/G/1$ 모형의 안정상태에서 평균 부하량을 얻을 수 있다.

또 집단도착이 시스템에 들어오지 못하는 거절확률은 식 (4.19)를 통하여 구할 수 있다.

$$P_0 \sum_{i=m+2}^{\infty} g_i + \sum_{i=1}^{m+1} P_i^*(0) \sum_{j=m+2-i}^{\infty} g_j \quad (4.19)$$

식 (3.1)에서 g_{m+2} 이상의 확률을 구하지 않아도 전체확률 1에서 빼주는 형태로 계산하면 거절확률을 구할 수 있다.

4. 수치분석 통한 정밀도 검증

본 연구에서 제시한 모형에 대한 타당성 검증을 위하여 여러 가지 서비스분포에 대하여 임계치, d , 제공로드 ρ 를 변화시켜 가며 고객거절확률에 대한 수치분석을 실시하였다. 고객의 도착률 $\lambda=1$ 로 고정하였고 서비스시간 분포는 지수분포와 일람 2차분포를 사용하였으며, 제공로드 $\rho=0.5, 1, 2$ 와 $c/E(S)=2, 3, 4$ 로 바꾸면서 실험을 하였다. 특히 근사의 정확도가 S/d 에 따라 달라지므로, $S/d = 5, 10, 20, 40, 80$ 으로 늘려가면서 실험을 하였다. 실험은 Matlab 6.5을 이용하여 알고리즘을 계산하였고 시뮬레이션은 아레나 5.5로 수행하였다.

표 2 $M/M/1$ 시스템의 거절확률

ρ	$c/E(S)$	$E(S)/d$	approx.	sim.	상대오차 (%)	
0.5	2	10	0.1548	0.1779	10.48	
		20	0.1643		4.99	
		40	0.1692		2.16	
		80	0.1717		0.71	
	3	10	0.0781	0.0876	10.90	
		20	0.0831		5.19	
		40	0.0857		2.22	
		80	0.0870		0.74	
	4	10	0.0421	0.0468	10.08	
		20	0.0451		3.67	
		40	0.0460		1.75	
		80				
1	2	10	0.2042	0.21559	5.28	
		20	0.2099		2.64	
		40	0.2130		1.20	
		80	0.2145		0.51	
	3	10	0.1349	0.13958	3.47	
		20	0.1375		1.51	
		40	0.1389		0.49	
		80	0.1397		0.09	
	4	10	0.0994	0.10210	2.72	
		20	0.1009		1.19	
		40	0.1017		0.39	
		80				
2	2	10	0.3041	0.30127	0.93	
		20	0.3024		0.37	
		40	0.3018		0.18	
		80	0.3015		0.08	
	3	10	0.2687	0.26850	3.8	
		20	0.2641		2.12	
		40	0.2621		1.37	
		80	0.2611		0.1	
	4	10	0.2571	0.24364	5.24	
		20	0.2514		3.09	
		40	0.2487		2.03	
		80				

주: 상대오차 = $\frac{|sim - approx|}{sim} \times 100(\%)$

위 <표 1>은 대기 부하량에 제한이 있는 $M/M/1$ 모형으로 근사법과 시뮬레이션의 거절 확률을 비교한 것이다. $E(S)/d$ 가 클수록 좋은 근사정도를 보이고 있고, 40이상이면 3%이내의 근사정도를 보이고 있다. 그리고 $c/E(S)$ 가 4이고 $E(S)/d$ 가 80일 때는 근사값을 구하지 못 하였다. 이것은 m 의 크기가 320이 되어 계산량이 많아지고 g_{320} 확률이 너무나 작기 때문에 Matlab 6.5을 통하여 계산하는데 오류가 발생하였기 때문이다. 따라서 근사의 정확도를 높이기 위하여 $E(S)/d$ 값을 너무 크게 하는 것은 m 의 크기가 커져서 계산이 어렵다. 따라서 $c/E(S)$ 가 3이하이면 $E(S)/d$ 값을 100정도가 적당하고, $c/E(S)$ 가 3초과하면 50정도가 적당하다고 할 수 있겠다.

표 3 $M/E_2/1$ 시스템의 거절확률

ρ	$c/E(S)$	$E(S)/d$	approx.	sim.	상대오차 (%)
0.5	2	10	0.1566	0.15914	1.60
		20	0.1576		0.97
		40	0.1582		0.59
		80	0.1586		0.34
	3	10	0.0693	0.06540	5.96
		20	0.0678		3.67
		40	0.0671		2.60
		80	0.0668		2.14
	4	10	0.0329	0.02966	10.92
		20	0.0315		6.20
		40	0.0308		3.84
		80	0.0304		2.49
1	2	10	0.2396	0.23080	3.81
		20	0.2354		1.99
		40	0.2334		1.13
		80	0.2325		0.74
	3	10	0.1611	0.14656	9.92
		20	0.1545		5.42
		40	0.1513		3.23
		80	0.1497		2.14
	4	10	0.1226	0.10592	15.75
		20	0.1153		8.86
		40	0.1118		5.55
		80	0.1100		3.85
2	2	10	0.3285	0.36425	6.66
		20	0.3777		3.69
		40	0.3723		2.21
		80	0.3695		1.47
	3	10	0.3580	0.32698	9.49
		20	0.3447		5.42
		40	0.3379		3.34
		80	0.3345		2.30
	4	10	0.3504	0.31752	10.36
		20	0.3361		5.85
		40	0.3289		3.58
		80	0.3253		2.45

위 <표 2>는 대기 부하량에 제한이 있는 $M/E_2/1$ 모형으로 근사법과 시뮬레이션의 거절확률을 비교한 것이다. $E(S)/d$ 가 클수록 좋은 근사정도를 보이고 있고, 80이상이면 3%이내의 근사정도를 보이고 있다. 서비스시간 분포가 지수분포일 때는 $c/E(S)$ 가 4이고 $E(S)/d$ 가 80일 때는 계산 값을 구하지 못하였는데 서비스시간이 2차 일람분포일 때는 가능한 것은 g_{320} 확률값이 서비스시간이 지수분포일 때보다 크기 때문이라고 보인다.

위의 수치분석에 의해서 $E(S)/d$ 가 너무 커서 m 이 너무 커지면 계산에 있어 오류가 발생하는 문제가 다소 발생하지만, 대기 부하량에 제한이 있는 $M/G/1$ 시스템을 제공로드와 임계치에 영향을 받지

않고 높은 근사의 정도를 가짐을 알 수 있다.

5장 결론

$M/M/1$ 시스템의 부하량 과정을 $M^X/d/1$ 시스템의 고객수 과정을 이용하여 근사화 하였다. 근사화 과정에서 $d \rightarrow 0$ 으로 보내면 $M/M/1$ 시스템의 평균부하량을 정확하게 구할 수 있었다.

해석적으로 난해한 대기 부하량에 제한 있는 $M/G/1$ 시스템을 대기 고객수에 제한이 있는 $M^X/d/1$ 시스템을 이용하여 근사화하였다. 수치분석을 통하여 근사의 정도가 제공로드와 임계치에 영향을 받지 않고 좋은 결과를 얻었다.

본 연구에서 사용한 근사법은 대기 모형을 부하량으로 분석해야 하는 댐모형이나 $M/G/1$ D정착을 근사화 하는 데도 매우 적합한 모형이라고 할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] 이호우, 「대기행렬이론」, 시그마프레스, 1998.
- [2] Baba, Yutaka, "The $M^X/G/1$ Queue with Finite Waiting Room", Journal of Operations Research Society of Japan, Vol.27, NO.3 (1984).
- [3] Bae, J., Kim, S. and Lee, E.Y., "The Virtual Waiting Time of the $M/G/1$ Queue with Impatient Customers", Queueing System, Vol.38 (2001), pp.485-494.
- [4] De Kok, A.G. and Tijms, H.C., "A queueing system with impatient customers", J. Appl. Probab., Vol 22 (1985), pp.688-696.
- [5] Kim, S., Bae, J. and Lee, E.Y., " Busy Periods of Poisson Arrival Queues with Loss", Queueing System, Vol.39 (2001), pp.201-212.
- [6] Lee, E.Y. and Kinatader, K.J.K., "The expected et period ot finite dam with exponential inputs", Stochastic Processes. Appl., Vol.90 (2000), pp.175-180.
- [7] Perry, D. and Asmussen, S., "Rejection rules in the $M/G/1$ queue", Queueing Systems, Vol.19 (1995), pp.105-130.
- [8] Perry, D., Stadge, W. and Zacks, S., "The $M/G/1$ Queue with Finite Workload Capacity", Queueing Systems, Vol.39 (2001), pp.7-22.

$M/M/1$