한국경영과학회/대한산업공학회 2003 춘계공동학술대회
2003 년 5 월 16 일-17 일, 한동대학교(포항)

용량 제약이 있는 이계층 설비 입지선정 문제의 최적화 해법

An Optimization Algorithm for the Two-Echelon Capacitated Facility Location Problem

김은정, 강동한, 이경식, 박성수

(greatkim@mail.kaist.ac.kr, sspark@kaist.ac.kr)

대전시 유성구 구성동 373-1 한국과학기술원 산업공학과

Abstract

We consider Two-echelon Single source Capacitated Facility Location Problem (TSCFLP). TSCFLP is a variant of Capacitated Facility Location Problem (CFLP), which has been an important issue in both academic and industrial aspects.

Given a set of possible facility locations in two echelons (warehouse / plant), a set of customers, TSCFLP is a decision problem to find a set of facility locations to open and to determine an allocation schedule that satisfies the demands of the customers and the capacity constraints of the facilities, while minimizing the overall cost. It can be shown that TSCFLP is strongly NP-hard. For TSCFLP, few algorithms are known, which are heuristics.

We propose a disaggregated version of the standard mixed integer programming formulation of TSCFLP. We also provide a class of valid inequalities. Branch-and-price algorithm with cutting plane method is used to find an optimal solution. Efficient branching strategy compatible with subproblem optimization problems is also provided. We report computational results of tests on 15 randomly generated instances.

1. 서론

본 논문에서는 용량 제약이 있는 이계층 설비 입지선정 문제 (Two-Echelon Capacitated Facility Location Problem, 이하 TSCFLP)를 다룬다. 고객들의 여러 제품에 대한 수요를 충족하기 위하여, 주어진 공장과 창고 후보지 가운데 어떤 공장, 창고들을 개설하여 얼마만큼의 제품을 어떤 공장에서 생산하여 어떤 창고를 거쳐 고객에게 공급할 것인지를 최소 비용의 관점에서 결정하는 것이 본 논문에서 다루고자 하는 문제이다.

TSCFLP는 용량 제약이 있는 (설비) 입지선정 문제 (Capacitated Facility Location Problem, 이하 CFLP)의 일종으로, CFLP는 지금까지 많은 관심을 받아왔고 관련 연구도 활발하게 진행되고 있다. CFLP가 Strongly NP-hard에 속하는 어려운 문제이기 때문에 지금까지 휴리스틱 기법과 분지한계법에 기반한 최적화 기법들을 중심으로 해법이 개발되어 왔다.

일반 휴리스틱은 주로 greedy 휴리스틱 또는 그에 약간의 변형을 가한 휴리스틱으로서, 기본적인 단일계층 입지선정 문제에 대해 기존의 UFLP 문제의 휴리스틱을 변형시킨 알고리즘을 제시한 연구[13]와 매칭 (matching) 알고리즘을 반복적으로 수행하면서 해를 구성하고 개선시키는 휴리스틱[25] 등이 있다.

1970년대 후반 Geoffrion과 McBride[8]가 처음 Lagrangian relaxation을 입지선정 문제에 적용된 이후 이를 이용하여 가능해를 찾는 연구가 활발히 진행되어 왔다. Lagrangian relaxation은 많은 경우 최적값에 근접한 하한값을 제공해줄 수 있고 Lagrangian dual 문제의 최종해를 변형하는 Lagrangian 휴리스틱을 통해 얻어진 가능해가 최적해에 가까운 경우가 많다.

Erlenkotter[7]는 UFLP의 해법으로 Dual ascent method를 제시하였다. 이 해법은 원 문제의 쌍대 문제 (dual problem)의 구조를 탐색하여 최적에 가까운 가능해를 빠른 시간 내에 찾아내며 UFLP의 해결에 매우 효율적인 것으로 알려져 있다. Dual ascent method는 CFLP에도 효과적으로 적용되었다[10][11].

최적화 기법은 크게 분지한계법, Benders 분해 기법, 교차 분해 기법 (cross decomposition method)으로 나눌 수 있다. 분지한계법을 적용할 때 완화모형은 선형완화, Lagrangian 완화를 고려할 수 있으며 선형완화의 경우 최적해에 가까운 하한을 구하기 위해 절단평면 [1][2][19]을 사용하거나 재모형화를 통해 열생성 기법을 적용하는 연구[6][21]가 주로 진행되었다.

Lagrangian relaxation 기법에서는 어떤 제약식을 완화하는가에 따라 부문제의 난이도가 달라지는데 고객의 수요만족 제약을 완화하는 경우

[3][5][9][12][23]와 설비 용량 제약을 완화하는 경우[15][16][20]가 일반적이다.

Benders 분해는 혼합 정수계획을 해결하기 위한 한 가지 방안으로 잘 알려져 있다[8][17]. 교차 분해 기법은 문제의 primal 구조와 쌍대 구조를 동시에 탐색하기 위해 고안된 알고리즘으로, Lagrangian relaxation과 Benders 분해 기법을 번갈아 수행해 가면서 최적값의 상하한을 갱신해 나간다. 교차 분해 기법은 Benders 분해 기법보다 수렴 속도가 빠른 것으로 보고되고 있다[18]. 하지만 이 두 가지 기법은 상대적으로 최적해로 수렴하는 데 많은 시간이 소모되므로 최적값의 적절한 상한 또는 하한을 구하는 선에서 알고리즘을 끝내는 경우가 일반적이다.

본 논문에서는 최적화 기법 중에서 최근 들어 특히 주목받고 있는 열생성 기법과 분지한계법을 적용한 분지평가법 (branch-and-price)에 기반한 알고리즘을 제시한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 문제를 정의하고 수리적 모형을 제시한다. 3장에서는 문제 해결을 위한 알고리즘을 구체적으로 기술한다. 4장에서는 알고리즘을 예제에 적용한 테스트 결과를 보이고 5장에서는 결론을 제시한다.

2. 문제 정의 및 수리 모형

TSCFLP는 다음과 같이 정의된다. 공장 (생산시설)의 후보지 집합 K, 창고 (분배센터)의 후보지 집합 J가 주어지고 이러한 시설로부터 공급되는 여러 유형의 제품 $l \in L$에 대한 수요 발생지역 (고객군 I)이 주어지며 또한 공장 및 창고 설치비용, 각 고객의 제품별 수요량, 각 공장으로부터 창고로의 수송 비용과 창고로부터 고객으로의 수송 비용이 제품별로 주어져 있다고 하자. TSCFLP는, 최소의 비용으로 모든 고객의 제품별 수요량을 충족하기 위해 공장과 창고의 입지를 선정하고, 각 고객군이 각 유형의 제품을 어떤 창고에서 공급 받을지와 각 창고가 각 유형의 제품을 어떤 공장으로부터 얼마나 공급 받아야 할지를 결정하는 문제이다. 이 때 각 고객은 특정 제품을 하나의 창고로부터 공급 받아야 한다는 제약을 가진다 (고객/제품별 수요비분리 제약, Single-Sourcing constraints).

이 문제를 표준 정수계획 모형으로 나타내면 다음과 같다.

$$(\text{P1})\ \text{Min}\ \sum_{j\in J} o_j z_j + \sum_{k\in K} g_k p_k + \sum_{j,k,l} c_{jkl} x_{jkl} + \sum_{i,j,l} a_{ijl} d_{il} y_{ijl}$$

subject to

$$\sum_{j\in J} y_{ijl} = 1 \quad \text{for all } i\in I,\ l\in L$$
$$\sum_{i,l} t_l d_{il} y_{ijl} \le W_j z_j \quad \text{for all } j\in J$$
$$\sum_{j\in J} z_j \le W$$
$$\sum_{k\in K} x_{jkl} = \sum_{i\in I} d_{il} y_{ijl} \quad \text{for all } j\in J,\ l\in L$$
$$\sum_{j,l} s_l x_{jkl} \le D_k p_k \quad \text{for all } k\in K$$
$$\sum_{k\in K} p_k \le P$$
$$x_{jkl} \ge 0 \quad \text{for all } j\in J, k\in K, l\in L$$
$$y_{ijl} \in \{0,1\} \quad \text{for all } i\in I, j\in J, l\in L$$
$$z_j \in \{0,1\} \quad \text{for all } j\in J$$
$$p_k \in \{0,1\} \quad \text{for all } k\in K$$

여기에서 I, J, K, L 은 각각 고객, 창고, 공장, 제품 유형의 집합을 나타낸다. o_j 는 창고 j의 개설 비용, g_k 는 공장 k의 개설 비용이다. c_{jkl} 는 공장 k에서 창고 j로 제품 l을 운송하는 단위 수송이며, a_{ijl} 는 창고 j에서 고객 i에게 제품 l을 전송하는 단위 수송 비용을 뜻한다. 또한 d_{il} 은 고객 i의 제품 l에 대한 수요량을 나타낸다. W_j, D_k 는 각각 창고와 공장의 용량을 나타낸다. t_l 은 제품 l에 대한 창고에서의 용량 요구량 (throughput utilization rate per unit of product l)이며 s_l 은 제품 l에 대한 공장에서의 용량 요구량 (capacity utilization rate per unit of product l)을 나타낸다. 개설될 수 있는 창고와 공장 수의 상한은 각각 W, P로 표기한다.

결정 변수는 다음과 같다. z_j, p_k는 각각 창고 j, 공장 k가 개설되면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 가진다. y_{ijl} 는 창고 j가 고객 i에 제품 l을 공급하면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는다. x_{jkl} 는 공장 k에서 창고 j로 운송하는 제품 l의 양을 나타내는 실변수이다.

이어서 P1 모형과 같거나 더 나은 최적값의 하한을 제공하는 모형을 제시하고자 한다. 이를 위해 각 창고에 대한 가능한 고객들의 할당 configuration을 나타내는 변수를 도입한다. 창고 j에 대한 고객들의 할당 configuration의 집합을 $Q_j = \{1, 2, \ldots, q_j\}$ 라고 하자. 고객 할당 configuration은 $y_q^j = (y_{q11}^j, \ldots, y_{qil}^j, \ldots, y_{q|I||L|}^j) \neq \mathbf{0}$, $q \in Q_j$ 로 나타낼 수 있으며 다음을 만족한다. 단 $\mathbf{0}$은 $|I||L|$ 크기를 가지는 영벡터이다.

$$\sum_{i\in I}\sum_{l\in L} t_l d_{il} y_{qil}^j \le W_j,$$
$$y_{qil}^j \in \{0,1\} \quad \text{for all } i\in I, l\in L$$

이진변수 λ_q^j는 가능한 할당 configuration y_q^j 이 창고 j에 대해 선택되면 1, 그렇지 않으면 0 으로 정의된다. 기본 모형의 변수를 이용하면 $y_{ijl} = \sum_{q\in Q_j} y_{qil}^j \lambda_q^j$ 의 관계가 성립함을 알 수 있다. 새로운 모형은 다음과 같다.

$$\text{(P2) Min } \sum_{k\in K} g_k p_k + \sum_{j,k,l} c_{jkl} x_{jkl} + \sum_{j\in J}\sum_{q\in Q_j}(o_j + \sum_{i,l} a_{ijl} d_{il} y_{qil}^j)\lambda_q^j$$

subject to

$$\sum_{q\in Q_j} \lambda_q^j \le 1 \quad \forall j\in J \quad (1)$$

$$\sum_{j,q} y_{qil}^j \lambda_q^j = 1 \quad \forall i\in I, \forall l\in L \quad (2)$$

$$\sum_{j,q} \lambda_q^j \le W \quad (3)$$

$$\sum_{q,i} (d_{il} y_{qil}^j)\lambda_q^j - \sum_{k\in K} x_{jkl} = 0 \quad \forall j\in J, \forall l\in L \quad (4)$$

$$\sum_{j,l} s_l x_{jkl} \le D_k p_k \quad \forall k\in K \quad (5)$$

$$\sum_{k\in K} p_k \le P \quad (6)$$

$$x_{jkl} \ge 0 \quad \forall j\in J, \forall k\in K, \forall l\in L$$

$$\lambda_q^j \in \{0,1\} \quad \forall q\in Q_j, \forall j\in J$$

$$p_k \in \{0,1\} \quad \forall k\in K$$

제약식 (1)은 창고 j에 대해 고객 할당 configuration이 하나 이하로 선택되어야 한다는 것을 나타낸다. 제약식 (2)는 $\lambda_q^j \in \{0,1\}$ 와 함께 고객 i, 제품 l에 대한 수요 비분리 제약을 나타낸다. 제약식 (3)은 창고의 개설 개수 제약을 나타내고 제약식 (4)는 흐름 보존 (flow conservation) 제약식을 나타낸다. 제약식 (5)와 (6)은 각각 공장의 용량 제약과 전체 개설 개수의 제약을 나타낸다.

모형 P2의 열이 지수적으로 많지만 열생성 기법 (column generation)을 이용하여 효율적으로 해결할 수 있다. 일부의 열만을 포함한 주문제의 모형이 있을 때 추가로 생성해야 하는 열을 구하기 위해서 열생성 부문제 (column generating subproblem)를 해결해야 한다. 그리하여 현재까지 추가되지 않은 열 중 reduced cost 가 음인 열을 추가한다. 모형 P2 에 대한 열생성 부문제는 아래와 같이 구성된다.

(Sub j)

$$\text{Min } \sum_{i\in I}\sum_{l\in L}(d_{il}(a_{ijl} - w_{jl}^*) - v_{il}^*) y_{il}^j + o_j - u_j^* - \mu^*$$

subject to

$$\sum_{i\in I}\sum_{l\in I} t_l d_{il} y_{il}^j \le W_j$$

$$y_{il}^j \in \{0,1\} \text{ for all } i\in I, l\in L$$

여기에서 $y_{il}^j = 1$은 고객 i, 제품 l이 창고 j에 할당됨을 나타낸다. 창고 j 에 대해 $o_j - u_j^* - \mu^*$ 는 고정된 값을 가지므로 이 문제는 배낭 문제 (knapsack problem)이다. 즉, 우리는 배낭 문제를 $j\in J$ 에 대해 해결함으로써 열생성 하부문제의 최적해를 구할 수 있고 추가되는 column들을 결정할 수 있다.

위의 모형 P2의 선형완화 문제의 최적값은, 표준모형 P1의 선형완화 문제의 최적값보다 같거나 크다는 것을 보일 수 있다. 즉, 모형 P2를 채택할 때 더욱 최적값에 가까운 하한을 구할 수 있다.

3. 알고리즘

3.1 유효 부등식

주문제의 선형계획 완화 문제를 해결하는 과정에 있어서 유효 부등식을 추가함으로써 최적값의 하한을 보다 증가시킬 수 있다. 본 논문에서는 Aardal[2]이 제시한 유효부등식을 응용하여 cover 유효 부등식을 사용한다.

먼저 $d(I) = \sum_{i\in I}\sum_{l\in L} s_l d_{il}$ 라고 하자. 또한 $M \subseteq K$ 이 $\sum_{k\in M} D_k > \sum_{k\in K} D_k - d(I)$ 을 만족할 때 집합 M을 K와 I에 대한 cover라 부른다. 이 때 $M \subseteq K$ 이 집합 K와 I에 대한 cover라고 할 때 다음과 같은 cover 부등식이 모형 P1, P2에 대해 유효함을 보일 수 있다.

$$\sum_{k\in M} p_k \ge 1$$

이와 같은 형태의 유효 부등식은 매우 많으므로 처음부터 이 유효 부등식을 모두 명시하여 문제를 풀 수는 없다. 그 대신, 현재 주어진 해 (보통 선형완화 문제의 최적해)가 만족하지 않는 유효 부등식이 존재하는지 확인하고, 존재한다면 해당 유효 부등식을 추가하는 방식을 취한다. 이렇게, 하나의 해에 의해 위배되는 유효 부등식을 찾아내든지 그렇지 않으면 위배되는 부등식이 없다는 것을 보이는 의사결정 문제를 분리 문제 (Separation Problem)라고 한다. 이제 위의 cover 유효 부등식에 대한 분리 문제를 구성해보자.

하나의 해 (x^*, p^*, λ^*)가 주어졌다고 하자. 우리는 $\sum_{k\in M} D_k > \sum_{k\in K} D_k - d(I)$ 을 만족하는 cover $M \subseteq K$ 중에서 $\sum_{j\in M} p_k^* < 1$ 를 만족하는 것이 존재하는지 확인해야 한다. 결정 변수 $v_k, k\in K$ 를 도입하여 공장 k가 M에 속하면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 가진다고 정의하자.

일반적으로 수요는 정수라고 가정할 수 있으므로 아래와 같이 분리 문제를 구성할 수 있다.

$$\zeta = \min\{ \sum_{k\in K} p_k^* v_k : \sum_{k\in K} D_k v_k \geq \sum_{k\in K} D_k - d(I) + 1, \quad v \in \{0,1\}^{|K|} \} \tag{7}$$

위 분리 문제는 다음과 같이 사용될 수 있다. 선형 완화 문제의 최적해를 찾아낸 후 위의 분리 문제를 해결한다. 만약 $\zeta < 1$이면 이 때 찾아낸 정수해 $\bar{v}_k, k \in K$ 로부터 도출되는 cover 유효 부등식을 원래 문제의 formulation에 추가한다. 이 과정을 선형 완화 문제의 최적해에 대한 분리 문제가 $\zeta \geq 1$을 만족할 때까지 반복한다.

3.2 알고리즘 개관

분지 평가법[4]은 분지 한계법의 일반화된 형태로 각 분지 노드마다 열생성 기법을 적용하여 최적해를 구하는 해법이다. 분지평가법의 절차는 다음과 같다. 먼저 주문제 (master problem) 모형의 선형완화 문제를 일부의 초기열만 가지고 해결한다. 이 때 구해진 해가 최적해가 아닐 때에는 아직까지 모형에 포함되지 않은 열들 중에서 추가될 수 있는 열들을 생성해서 추가한다. 이 과정을 더 이상 열이 추가되지 않을 때까지 반복한다. 더 이상 열이 추가되지 않으면 그 때 구해진 해가 바로 선형계획 문제의 최적해가 된다. 이 해가 정수해일 경우에는 전체 최적해가 되므로 알고리즘이 끝나지만 그렇지 않은 경우에는 분지가 이루어지고 각 분지 노드마다 선형계획 완화 문제를 해결하기 위해 필요한 열을 생성하며 위의 과정을 반복한다.

본 논문에서는 주문제의 선형완화 문제를 해결할 때 유효 부등식을 추가하여 선형완화 문제가 제공하는 최적값의 하한을 더욱 증가시킨다. 그 과정은 다음과 같다. 우선 더 이상 열이 생성되지 않을 때까지 열을 추가한 후 3.1에서 제시한 분리 문제 (7)을 해결한다. 최적해가 만족시키지 못하는 유효 부등식이 발견될 경우 이 부등식을 선형 완화 문제에 추가하여 다시 열생성 과정을 반복한다. 이러한 열생성-유효 부등식 추가 과정은 더 이상 어떤 열도 추가되지 않고 유효 부등식도 추가되지 않을 때까지 계속된다. 최종적으로 찾아진 선형 완화 문제의 최적해가 정수해면 이것이 본 문제의 최적해가 된다. 만약 정수해가 아니면 분지가 이루어지고, 각 분지 노드에서도 동일한 열생성-유효 부등식 추가 과정이 이루어지게 된다.

3.3 열생성 과정

<u>초기열의 생성</u>

열생성 기법을 적용하기 위해서는 분지한계 나무의 각 노드마다 선형계획 완화 문제의 초기해가 존재해야 한다. 따라서 적절한 초기열이 필요하다. 본 논문에서는 초기열로서 다음과 같은 configuration $q \in Q_j$ 에 대응하는 열을 선택하였다.

* 창고 j에 대해, 모든 고객/제품이 이 창고에 할당되는 configuration에 대응하는 열을 추가한다. 이 때 이 configuration이 부문제의 가능해일 경우 (즉, 창고의 용량이 모든 고객의 제품 유형별 수요를 모두 만족하는 경우) 해당 목적계수 (objective coefficient)를 채택하고 그렇지 않은 경우는 임의의 큰 값을 목적계수로 할당하여 최적해에서 선택되지 않도록 한다.

이 때의 초기열들은 할당 configuration이 가능할 경우에만 의미가 있지만 우리는 기본적으로 각 창고에 대해 하나의 열을 고려하였다.

또한 어떤 분지 노드에서든 이 문제의 가능해가 존재하도록 하기 위해 다음과 같은 인공열(dummy column)을 초기열로 추가하였다.

* $(1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0)^T$: 1의 개수는 $|J|+|I||L|+1$ 이다.

<u>열생성 부문제의 해결</u>

앞에서도 언급한 바와 같이 열생성 부문제는 각 창고별로 배낭 문제를 해결하는 문제가 된다. 각 창고별로 reduced cost가 음인 열이 생성되면 현재 주문제 모형에 추가한다.

0-1 배낭 문제는 NP-hard이지만 의사다항시간 알고리즘 (pseudo-polynomial time algorithm)이 존재한다[22]. 본 논문에서는 이 0-1 배낭 문제를 해결하기 위해 의사다항시간 알고리즘인 동적 계획법 (Dynamic programming)을 사용하였다. 동적 계획법을 사용하면 창고 j에 대한 배낭 문제의 해결은 $O(|I||L|W_j)$ 시간에 가능하다.

동적 계획법이 일반적으로 빠른 시간 안에 배낭 문제를 해결할 수 있도록 해주지만 고려하는 공장의 용량이 큰 경우에는 시간이 매우 오래 걸릴 수 있다. 이런 경우에는 먼저 휴리스틱을 이용해 부문제를 풀고 난 후 이 때 reduced cost가 음수인 열이 생성되지 않으면 최적화 알고리즘인 동적 계획법을 사용하여 부문제를 해결하는 방식을 고려할 수 있다. 부문제를 해결하는 휴리스틱으로는 연속 배낭 문제의 최적해를 구할 때 사용하는 방법을 사용한다. 즉, n 번째 항의 cost와 weight를 각각 c_n , w_n 이라 할 때 부문제의 항 전체를 c_n/w_n 값이 오름차순이 되도록 정렬하고, 용량을 만족시키는 한도 내에서 차례대로 각 변수의 값을 1로 할당한다. 단, 부문제가 최소화 문제이므로 이 과정을 c_n 이 음수인 항까지만 수행한다.

3.4 분지 전략 (branching strategy)

분지 평가법에서 알고리즘의 성능을 판가름하는 주요한 기준 중의 하나가 바로 분지 전략이다. 정수계획 문제의 경우 선형완화 문제의 해가 비정수해일 때, 비정수 변수에 대해 두 개의 분지 노드를 생성하는 것이 일반적이지만 분지 평가법에서는 이 방법을 적용하는 데 문제가 있다. 모형 P2에서 추가되는 열에 해당하는 변수 λ_q^j의 값이 정수가 아닐 때, 1 또는 0으로 고정시키는 분지 방법을 사용한다고 하자. 1로 고정시킨 노드에서는 문제가 없지만, 0으로 고정시킨 노드에서는 이미 0으로 고정한 λ_q^j에 대응하는 열이 열생성 부문제를 통해 다시 생성되는 문제가 발생할 수 있고 실제로 종종 그러한 경우가 발생한다. 이 때는 다음으로 작은 reduced cost를 가지는 열을 생성해야 하며, 일반적으로 분지한계 나무의 깊이가 n인 노드에서 최대 n번째 작은 reduced cost를 가지는 열을 생성해야 한다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 부문제의 난이도를 증가시키지 않으면서 분지할 수 있는 다른 방안을 강구해야 한다.

본 연구의 모형은 다음과 같이 3단계에 걸쳐 분지를 수행한다. (i) 먼저 p_k 변수에 대해 분지한다. (ii) 창고 j를 쓸 것인지 여부를 나타내는 변수 집합에 대해 분지한다. (iii) 고객 i, 제품 l이 창고 j에 할당될 것인지 여부를 나타내는 변수 집합에 대해 분지한다. (i)은 간단한 분지이므로 여기에서는 (ii)와 (iii)에 대해 좀더 자세히 기술하겠다.

(i) 1단계 분지

먼저 p_k 변수에 대해 분지를 수행한다. 더 이상 분지할 p_k 변수가 남아있지 않으면 다음 단계로 넘어간다.

(ii) 2단계 분지

창고 j를 사용할 것인지 사용하지 않을 것인지에 대해 분지하는 것을 고려한다. 즉,

$$\sum_{q\in Q_j}\lambda_q^j = 1 \quad \text{또는} \quad \sum_{q\in Q_j}\lambda_q^j = 0$$

로 먼저 분지하여 미리 가능한 해의 집합을 줄이는 것이다. $\sum_{q\in Q_j}\lambda_q^j = 1$로 분지하는 경우는 제약식 (1)의 부등식을 등식으로 변형한다. 이 경우에는 분지 노드에서 부문제를 변형할 필요가 없다.

$\sum_{q\in Q_j}\lambda_q^j = 0$으로 분지하는 경우를 생각해보자. 제약식 (1)을 우변의 상수값이 0인 등식으로 교체하게 되면, 인공열에 대응하는 변수가 값을 가질 수 없어 선형계획 문제의 가능해가 존재하지 않게 될 수 있다. 이렇게 되면 더 이상 열생성 기법을 적용하지 못하게 된다. 따라서 제약식 (1)은 그대로 유지하는 대신 $\lambda_q^j = 0, q\in \overline{Q}_j$로 상한을 조정하도록 한다 (단, $\overline{Q}_j$는 현재까지 창고 j에 대해 생성된 열들의 index 집합). 이 경우 분지 노드에서는 창고 j를 제외한 $j'\in J\setminus\{j\}$에 대해 부문제를 해결하여 열을 생성한다.

(iii) 3단계 분지

위 분지 전략을 수행한 후, 일반화된 할당문제 (Generalized assignment problem)의 분지평가 해법[26]에서 고려된 것과 유사하게 두 개의 노드로 분지할 수 있다.

정수값이 아닌 λ_q^j가 존재할 때 해당 j에 대하여, 모든 $i\in I, l\in L$에 대한 $y_{ijl} = \sum_{q\in Q_j} y_{qil}^j \lambda_q^j$를 계산한다. 이렇게 계산된 y_{ijl} 값들 중 정수가 아닌 $y_{i_j j l_j}$ (for some $i_j\in I, l_j\in L$)이 반드시 존재함을 보일 수 있다[26]. 이 때 다음과 같은 제약식들을 고려한 두 개의 노드로 분지한다.

$$\sum_{q\in Q_j} y_{qil}^j\lambda_q^j = 1 \quad \text{또는} \quad \sum_{q\in Q_j} y_{qil}^j\lambda_q^j = 0$$

첫 번째 조건은 고객 i, 제품 l이 창고 j에 할당됨을 두 번째 조건은 할당되지 않음을 나타낸다. 이것은 P1 모형의 변수 $y_{i_j j l_j}$에 대해 분지하는 것과 같은 의미를 지님을 알 수 있다.

y_{ijl}에 대해 분지해서 생성된 노드에서는 그에 맞게 λ_q^j의 값도 적절하게 고정되어야 한다. $y_{ijl}=1$로 분지한다는 것은 고객 i, 제품 l이 창고 j에 할당된다는 것을 의미한다. 이 때 고객, 제품에 대한 수요 비분리 제약에 의해 고객 i, 제품 l은 창고 $p\neq j$에 할당될 수 없다. 따라서 분지된 노드에서 $y_{qil}^j = 0$인 $q\in Q_j$에 대해서 $\lambda_q^j = 0$으로 고정하고, $y_{qil}^p = 1$인 $q\in Q_p$, $p\neq j$에 대해서는 $\lambda_q^p = 0$으로 고정해야 한다. 한편 $y_{ijl}=0$으로 분지한다는 것은 고객 i, 제품 l이 창고 j에 할당되지 않는다는 것을 의미한다. 따라서 분지된 노드에서는 $y_{qil}^j = 1$인 $q\in Q_j$에 대해서 $\lambda_q^j = 0$으로 고정한다.

또한 위와 같이 y_{ijl}에 대해 분지한 결과 생성된 노드에서는 부문제가 적절하게 변형되어야 한다. 즉, $y_{ijl}=1$로 분지한 노드에서는 창고

j에 대한 부문제를 해결하여 생성된 열이 $y^j_{il}=1$을 만족하고, $y_{ijl}=0$로 분지한 노드에서는 창고 j에 대한 부문제를 해결하여 생성된 열이 $y^j_{il}=0$을 만족하도록 부문제를 변화시킬 필요가 있다.

분지된 노드에서 이러한 조건을 만족하는 열이 생성되도록 하기 위해 부문제인 배낭 문제를 다음과 같이 변형한다. 먼저 $y_{ijl}=1$로 분지한 노드의 부문제에서는 y^j_{il} 항을 고려하지 않고, 제약식의 우변으로는 원래의 값 대신 고객 i, 제품 l이 차지하는 창고 j에서 차지하는 용량만큼 감소시킨 값, 즉 $W_j - t_l d_{il}$을 사용한다. $y_{ijl}=0$로 분지한 노드의 부문제로는 y^j_{il} 항을 고려하지 않은 문제를 사용한다.

4. 실험 결과 및 분석

본 논문에서 제시한 알고리즘은 C 언어로 코딩하였으며, 선형계획, 혼합정수계획 문제를 해결하기 위해 CPLEX 7.0의 callable library를 사용하였다. 모든 테스트는 Pentium PC(2.4GHz)에서 수행하였다.

4.1 입력 자료

알고리즘을 테스트 하기 위해 다양한 크기의 실험 데이터를 생성하였다. 고객, 창고, 공장, 제품 유형의 개수는 기존 연구 (Pirkul and Jayaraman, 1996)를 참조하여 다음과 같은 조합을 고려하였다.

[표 1] 고객, 창고, 공장, 제품 유형 수

고객 (I)	창고 (J)	공장 (K)	제품 유형 (L)	α
10	5	3	2	1.0
20	5	3	2	1.0
30	5	4	2	0.7

α는 어떤 고객에게 제품을 공급할 수 있는 창고의 개수를 전체 창고의 개수로 나눈 값이다. 고객수가 30 인 데이터에 대해서는 α 값을 0.7로 두었는데 그 이유는 α 값이 이보다 더 작아질 때는 가능해 자체가 존재하지 않는 경우가 자주 발생하고 이보다 더 큰 값일 때는 열이 너무 많이 생성되어 시간 제약 (1시간)에 걸리는 경우가 자주 발생하였기 때문이다.

고객의 제품 유형별 수요와 네트워크 각 계층간 수송 비용은 다음과 같이 생성하였다. 여기서 U[a, b]는 a와 b사이의 일양 분포를 의미한다.

- 수요 ~U[1, 50]
- 공장에서 창고로 제품을 운송하는 단위 비용, 공장에서 제품을 생산하는 단위 비용 ~U[1, 100]
- 창고에서 고객에게 제품을 운송하는 단위 비용, 창고에서 제품을 처리하는 단위 비용 ~ U[1, 100]
- 제품에 대한 창고의 용량 요구량, 제품에 대한 공장의 용량 요구량 ~U[1, 10]

개설될 수 있는 창고 수의 상한은 $|J|, \lceil |J|/2 \rceil$, 공장 수의 상한은 $|K|, \lceil |K|/2 \rceil$을 고려하였다. 그리고 고객수가 10, 20인 instance는 종류별로 각각 3개씩의 테스트 문제를 만들었고 고객수가 30인 경우는 개설될 수 있는 창고와 공장 수의 상한이 각각 $|J|, |K|$인 instance만 생성하였다. 따라서 고려하는 테스트 문제는 총 15개이다.

다음으로 창고와 공장의 용량 및 고정 비용(개설 및 운용 비용) 생성 방법에 대해 기술한다. 이 값들은 지금까지 결정한 다른 정보들을 기준으로 정한다. 창고의 용량은 총 수요량과 개설되는 창고의 용량 합의 예측값의 비율이 대략 0.80이 되게 정하였다. 공장의 경우는 최대한 개설 가능한 창고 용량의 합과 개설 공장의 용량의 합의 예측값의 비율이 대략 0.80이 되게 정하였다. 계산시에는 창고 및 공장에서의 제품의 용량 소비량을 고려해야 한다. 이런 식으로 창고와 공장의 평균 용량을 구한 후에는 그 값보다 10% 작은 값에서 10% 큰 값까지 같은 확률로 용량 값을 생성하였다. 테스트 문제의 가능해가 존재하도록 창고와 공장의 용량을 비교적 여유 있게 정하였다.

공장과 창고의 고정 비용은 먼저 전체 예상 비용을 구한 후 그 값의 40%, 30%가 되게 정하였다. 역시 창고와 공장의 평균 비용을 구한 후에는 그 값보다 10% 작은 값에서 10% 큰 값까지 같은 확률로 비용 값을 생성하였다.

분지한 후 노드를 선택하기 위한 규칙으로 best bound rule을 사용하였다.

4.2 실험 결과

표 2와 3은 P2의 모형을 이용한 분지평가 해법의 실험 결과를 나타낸다. 이중 표 2는 유효 부등식을 추가하지 않은 경우, 표 3은 유효 부등식을 추가한 경우의 실험 결과이다.

각 표의 첫째 열부터 넷째 열까지는 테스트 문제의 크기를 나타낸다. 즉, 차례대로 고객의 수, 창고 후보 입지의 수 (창고 개설 수의 상한), 공장 후보 입지의 수 (공장 개설 수의 상한), 제품 유형의 수를 나타낸다. '#Col.' 열은 초기열을 포함하여 생성된 모든 열의 개수를

나타낸다. '#B&B' 열은 생성된 분지한계 나무의 노드 개수를 나타낸다. '#Cuts' 열은 추가된 cover 부등식의 개수를 나타낸다. 다음 열의 z_{IP} 는 최적 목적식 값을 나타내고 z_{LP1}, z_{LP2} 는 각각 P1, P2 모형의 선형완화 문제의 최적값이다. Gap은 z_{IP} 와 z_{LP} 의 상대적인 비율을 나타내며 $(z_{IP} - z_{LP})/z_{IP} \times 100$ (%)로 정의된다. 표 2의 Gap1은 z_{IP}, z_{LP1} 의 상대적인 비율을 나타내며 Gap2는 z_{IP}, z_{LP2} 의 상대적인 비율을 나타낸다. 마찬가지로 표 3의 Gap은 유효 부등식을 추가했을 때 z_{IP}, z_{LP2} 의 상대적인 비율을 나타낸다.

[표 2] 분지평가 해법의 결과 (유효 부등식 추가하지 않음)

$\|I\|$	$\|J\|$ (W)	$\|K\|$ (P)	$\|L\|$	#Col.	#B&B	z_{IP}	z_{LP1}	z_{LP2}	Gap1 (%)	Gap2 (%)	Time (sec.)
10	5(3)	3(2)	2	1300	20	183592.0	145326.402	153309.331	16.495	20.843	34.281
10	5(3)	3(2)	2	879	24	175992.0	141253.876	146227.663	16.912	19.738	7.000
10	5(3)	3(2)	2	733	10	212150.0	174226.413	182577.045	13.940	17.876	4.000
10	5(5)	3(3)	2	534	16	222854.0	195200.085	200526.554	10.019	12.409	2.016
10	5(5)	3(3)	2	731	30	206069.0	172101.180	177255.068	13.983	16.484	2.657
10	5(5)	3(3)	2	620	20	152352.0	141418.762	146818.593	3.632	7.176	1.031
20	5(3)	3(2)	2	4663	22	301881.0	223059.624	236103.802	21.789	26.110	340.765
20	5(3)	3(2)	2	4676	26	442469.0	360950.581	377796.821	14.616	18.424	337.813
20	5(3)	3(2)	2	7373	38	495492.0	363317.032	372072.333	24.909	26.676	432.500
20	5(5)	3(3)	2	2640	25	355080.0	325708.816	335181.130	5.604	8.272	47.703
20	5(5)	3(3)	2	3236	18	343253.0	316511.872	319291.949	6.981	7.791	246.125
20	5(5)	3(3)	2	2402	16	265489.0	248685.844	252769.341	4.791	6.329	34.891
30	5(5)	4(4)	2	6232	16	527754.0	442780.262	474370.642	10.115	16.101	105.219
30	5(5)	4(4)	2	5570	19	488975.0	421685.861	433944.900	11.254	13.761	580.234
30	5(5)	4(4)	2	4035	19	588486.0	483061.400	521508.750	11.381	17.915	573.265

[표 3] 분지평가 해법의 결과 (유효 부등식 추가)

$\|I\|$	$\|J\|$ (W)	$\|K\|$ (P)	$\|L\|$	#Col	#B&B	#Cuts	z_{IP}	z_{LP2}	Gap (%)	Time (sec.)
10	5(3)	3(2)	2	1317	22	1	183592.0	168700.897	8.111	29.469
10	5(3)	3(2)	2	863	22	1	175992.0	161684.561	8.130	7.594
10	5(3)	3(2)	2	688	8	1	212150.0	202686.962	4.461	9.094
10	5(5)	3(3)	2	523	12	2	222854.0	210453.403	5.564	2.250
10	5(5)	3(3)	2	731	24	2	206069.0	191967.982	6.843	2.547
10	5(5)	3(3)	2	659	20	2	152352.0	149160.300	2.095	1.125
20	5(3)	3(2)	2	4357	20	1	301881.0	272014.835	9.893	341.844
20	5(3)	3(2)	2	5705	26	1	442469.0	415764.447	6.035	462.328
20	5(3)	3(2)	2	6836	36	1	495492.0	414904.554	16.264	385.844
20	5(5)	3(3)	2	2623	20	2	355080.0	348449.396	1.868	49.312
20	5(5)	3(3)	2	2974	14	2	343253.0	334643.889	2.508	209.703
20	5(5)	3(3)	2	2467	14	1	265489.0	254213.128	4.247	34.75
30	5(5)	4(4)	2	4375	8	4	527754.0	490786.167	7.005	51.969
30	5(5)	4(4)	2	4814	12	4	488975.0	443404.751	9.320	465.750
30	5(5)	4(4)	2	4148	13	4	588486.0	539662.984	8.296	623.922

표 2를 보면 모형 P2가 P1보다 더 나은 하한을 제공해준다는 사실을 알 수 있다. 또한 표 3을 통해 유효 부등식을 추가한 경우에 선형완화 문제의 최적값이 제공하는 하한이 상당한 정도로 개선됨을 확인할 수 있다. 그러나 생성되는 열의 개수나 문제를 해결하는 데 걸리는 시간에서는 별다른 차이를 발견할 수 없다. 이 사실은 다음과 같이 해석할 수 있다. 추가된 유효 부등식은 p_k 변수에 대한 부등식이다. 그런데 문제를 푸는데 걸리는 시간의 대부분은 고객/제품과 공장 간의 할당 configuration의 가능한 조합 가운데 제약식 (2)를 만족할 수 있는 조합을 찾아내고, 그러한 조합이 발견될 때까지 열을 생성하는데 소요된다. 또한 p_k 변수가 어떤 범위로 제약되는지는 생성되는 고객/제품과 공장 간의 할당 configuration의 조합의 수에 큰 영향을 미치지 않는다. 따라서 이 유효 부등식은 해를 발견하는데 소요되는 시간을 크게 단축할 수 없을 것으로 보인다. 유효 부등식을 추가한 경우와 추가하지 않은 경우 모두 계산시간이 상당히 긴 것도 같은 방식으로 해석할 수 있다.

5. 결론

우리는 본 연구에서 2계층으로 이루어진 설비를 고려하는 입지선정 문제의 모형을 제시하고 분지 평가법에 기반한 최적화 해법을 개발

하였다. 그리고 개발한 해법을 유효 부등식을 추가하지 않은 경우의 해법과 비교하여 성능을 평가하였다.

모형 P2에 유효 부등식을 추가하지 않은 경우와 유효 부등식을 추가한 경우를 비교해보았을 때 제공하는 하한값은 증가하였으나 실행시간에는 큰 차이가 없음을 알 수 있었다. 한편 모형 P1의 경우, 선형완화 문제의 최적값은 모형 P2보다 낮다는 사실을 확인할 수 있었다.

한편 분지평가법의 경우 너무 많은 열들이 생성되는 단점이 있으므로 강력한 절단평면을 응용한 분지 절단법으로 문제를 해결하는 방법을 연구할 필요가 있다. 본 논문에서는 사용한 **cover** 유효 부등식 외에 **TSCFLP**에 적합한 유효 부등식들을 추가하고, 분리 문제를 좀더 빠르게 해결할 수 있는 휴리스틱을 적용하면 계산 시간이 개선될 수 있을 것으로 기대된다. 또한 추가된 유효 부등식을 **lifting** 과정을 통해 더욱 강력한 부등식으로 변형하면 선형 완화 문제의 목적값이 보다 더 개선될 수 있으리라고 생각한다. 우수한 해를 빠른 시간에 구하기 위한 휴리스틱 **(heuristic)**도 고려할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Aardal, K., "Capacitated facility location: Separation algorithms and computational experience", *Mathematical Programming*, Vol. 81, No. 2 (1998) 149-175.

[2] Aardal, K., "Reformulation of capacitated facility location problem : How redundant information can help", *Annals of Operations Research*, Vol 82 (1998), 289-308.

[3] Barcelo, J., and A. Casanovas, "A heuristic Lagrangian algorithm for the capacitated plant location problem", *European Journal of Operation Research*, Vol. 15 (1984), 212-226.

[4] Barnhart, C. E., E. L. Johnson, G.. L. Nemhauser, M. W. P. Savelsbergh, and P. H. Vance, "Branch-and-price: column generation for solving huge integer programs", *Operations Research*, Vol.46 (1998), 316-329.

[5] Christofides, N., and J. E. Beasley, "Extensions to a Lagrangian relaxation approach for the capacitated warehouse location problem", *European Journal of Operational Research*, Vol. 12 (1983), 19-28.

[6] Diaz, J. A., and E. Fernandez, "A Branch-and-Price algorithm for the Single Source Capacitated Plant Location. Problem", *The Journal of the Operational Research Society*, Vol. 53, No.7 (2002), 728-740.

[7] Erlenkotter, D., "A dual-based procedure for uncapacitated facility location", *Operations Research*, Vol. 26 (1978), 992-1009.

[8] Geoffrion, A. M., and G. W. Graves, "Multicommodity distribution system design by benders decomposition", *Management Science*, Vol. 20, No. 5 (1974), 822-844.

[9] Geoffrion, A. M., and R. McBride, "Lagrangian relaxation applied to capacitated facility location problems", *AIIE Transactions*, Vol. 10 (1978), 40-47.

[10] Guinard, M., and K. Spielberg, "A direct dual method for the mixed plant location problem with some side constraints", *Mathematical Programming*, Vol. 17 (1979), 198-228.

[11] Guinard, M., and K. Opaswongkarn, "Lagrangian dual ascent algorithms for computing bounds in capacitated plant location problems", *European Journal of Operational Research*, Vol. 46 (1990), 73-83.

[12] Holmberg, K., M. Ronnqvist, and D. Yuan, "An exact algorithm for the capacitated facility location problem with single sourcing", *European Journal of Operational Research*, Vol. 113 (1999), 544-559.

[13] Jacobsen, S. K., "Heuristics for the capacitated plant location model", *European Journal of Operational Research*, Vol. 12 (1983), 253-261.

[14] Jayaraman, V., and H. Pirkul, "Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodities", *European journal of operational research*, Vol. 133 (2001), 394-408.

[15] Klincewicz, J. H., and H. Luss, "A Lagrangian Relaxation heuristic for capacitated facility location with single-source constraints", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 37, No. 5 (1986), 495-500.

[16] Klose, A., "A Lagrangean relax-and-cut approach for the two-stage capacitated facility location problem", *European journal of operational research*, Vol. 126 (2000), 408-421.

[17] Lee, C. Y., "An optimal algorithm for the multiproduct capacitated facility location problem with a choice of facility type", *Computers Ops Res.*, Vol. 18, No. 2 (1991), 167-182.

[18] Lee, C. Y., "A cross decomposition algorithm for a multiproduct multitype facility location problem", *Computers Ops Res.*, Vol. 20, No. 5 (1993), 527-540.

[19] Leung, J. M. Y., and T. L. Magnanti, "Valid inequalities and facets of the capacitated plant location problem", *Mathematical Programming*, Vol. 44 (1989), 271-291.

[20] Mazzola, J. B., and A. W. Neebe, "Lagrangian-relax-based solution procedure for a multi product capacitated facility location problem with a choice of facility type", *European Journal of Operational Research*, Vol. 115 (1999), 285-299.

[21] Neebe, A. W., and M. R. Rao, "An algorithm for the fixed charge assigning users to sources problem", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 34, No. 11 (1983), 1107-1113.

[22] Nemhauser, G. L. and L. A. Wolsey, "*Integer Programming and Combinatorial Optimization*", Wiley, Chichester, 1988.

[23] Pirkul, H., "Efficient algorithms for the capacitated concentrator location problem", *Computers Ops Res.* Vol. 14, No. 3 (1987), 197-208.

[24] Pirkul, H., and V. Jayaraman, "Production, transportation, and distribution planning in a multi-commodity tri-echelon system", *Transportation Science*, Vol. 30, No. 4 (1996), 291-302.

[25] Ronnqvist, M., S. Tragantalerngsak, and J. Holt, "A repeated matching heuristic for the single-source capacitated facility location problem", *European Journal of Operational Research*, Vol. 116 (1999), 51-68.

[26] Savelsbergh, M. (1997), "A Branch-and-price algorithm for the generalized assignment problem", *Operations Research* 45, 831-841.