한국경영과학회/대한산업공학회 2003 춘계공동학술대회
2003년 5월16일-17일, 한동대학교(포항)

비용 제약 조건 하에서의 최대 지역 커버 문제에 관한 연구

홍성학·이병기·이영훈

연세대학교 컴퓨터과학·산업시스템공학과

서울시 서대문구 신촌동 134

Abstract

설비입지문제는 고객에게 좋은 서비스를 제공하면서 전체 비용을 최소화하는 의사결정을 요구한다. 본 논문은 제한된 총 투자 비용 하에서, 최대의 서비스 수준을 달성하기 위하여 고정비를 가지는 설비의 입지를 결정하는 문제에 관한 것이다. 이 문제에 대해 수리 모형을 제시하고, 라그랑지안 기법을 이용한 발견적 기법을 통하여 해를 구하였다. 문제의 상한(Upper Bound)은 서브그래디언트(Subgradient) 최적화 기법을 사용하여 구하였고, 하한(Lower Bound)을 구하기 위하여 커팅(Cutting) 알고리즘이라는 새로운 기법을 개발하여 적용하였다. 임의로 생성된 데이터를 이용하여 비용과 커버 가능거리라는 두 가지 관점에서 실험을 하고 제안된 알고리즘의 성능을 비교 분석하였다.

1. 서론

최대 지역 커버 문제(Maximal Covering Location Problem)와 고정비를 가지는 설비입지선정문제(Fixed Charge Facility Location Problem)는 모두 설비입지선정 분야에 있어서 가장 중요한 문제들 중 하나로 인식되어왔으며, 이에 대한 연구도 매우 활발히 이루어져왔다.

최대지역커버문제는 서비스 수준을 높이는 것이 목적으로, 설비가 커버하는 수요의 합을 최대화하면서 주어진 p개의 설비를 세울 위치를 선정하는 문제이다. 여기서 수요를 커버한다는 것은 세우게 되는 설비가 수요가 발생하는 지점으로부터 일정 거리 S 이내에 있다는 뜻이다. 이 S를 간단히 커버리지 거리(Coverage Distance)라고 한다. 즉, 커버하는 수요가 많을수록 그만큼 서비스 수준도 높아진다고 보고 보다 많은 수요를 커버하기 위한 설비의 위치를 찾는 것이다. Church and ReVelle[2]에 의해 최초로 수식화 된 최대지역커버문제는 소방서의 위치 선정 문제([14]), 앰뷸런스의 위치 선정 문제([13])등에 응용되었다. Daskin[4]과 Mirchandani and Francis[10]는 최대지역커버문제에 관한 응용분야와 해법들에 관해 소개하였으며, Galvao and ReVell[5]는 이 문제에 라그랑지안 기법을 적용하여 좋은 결과를 얻었다.

고정비를 가지는 설비의 입지 선정 문제는 비용의 최소화가 목적으로, 각 입지마다 설비를 세우는데 필요한 일정한 고정비가 존재하는 상황에서 최소 비용으로 모든 수요를 만족시킬 수 있는 위치를 찾는 문제이다. 여기에서 비용이란 설비를 세우는데 필요한 고정비와 거리에 비례하는 운송비를 합한 비용으로 정의된다. 이 문제는 통신 네트워크의 설계([11]), 분배 센터의 위치 선정 문제([9])등에 응용되었으며, Held et al.[7], Parker and Radin[12]은 라그랑지안 기법을 통한 문제의 해법을 제시하였다.

최대지역커버문제가 서비스 수준에 초점을 맞추고 있는 반면, 고정비를 가지는 설비입지선정문제는 비용의 최소화에 초점을 맞추고 있어 두 문제는 서로 상충되는 성격을 가지고 있다. 즉, 서비스 수준을 높이려면 더 많은 비용을 투자해야 하고, 비용을 줄이면 서비스 수준도 떨어지게 되는 서비스 수준과 비용과의 트레이드오프(Trade-Off) 관계 때문에 이 두 문제는 각각 다른 관점에서 다루어져 왔다. 하지만 현실적으로는 서비스 수준의 최대화와 비용의 최소화를 동시에 고려해야 하며, 이 두 가지가 적절히 조화 될 수 있도록 하는 것이 중요하다.

이러한 관점에서 서비스 수준과 비용 두 가지를 동시에 고려하여 입지를 선정하는 입지선정모형의 필요성이 대두되었으며 이에 대한 연구도 이미 진행 중이다. Goicoechea et al.[6]은 최대지역커버모형과 고정비를 가지는 입지선정모형 중 하나를 한계치로 설정해 놓고 그에 대한 해를 구한 후 그 해를 다시 다른 모

형에 대한 한계치로 설정하여 해를 구하는 방식을 사용하여 적절한 비용과 서비스 수준을 계산하고자 하였으며, Nozick[8]은 미리 정해 놓은 서비스 수준을 만족하는 범위 내에서 최소의 비용으로 모든 수요를 충족시킬 수 있는 모형을 개발하고 이의 해법을 제시하였다.

본 논문에서도 이처럼 비용과 서비스 수준 두 가지를 동시에 고려한 입지 선정 모형에 관한 연구를 하였다. 서비스 수준을 높이면서 비용을 줄이는 수리적 모형은 크게 두 가지 관점으로 접근할 수 있다. 하나는 기존의 연구처럼 제약조건을 일정 수준 이상의 서비스 수준으로 하고, 목적함수를 비용의 최소화로 하는 모형이고, 또 다른 하나는 기존의 연구와는 반대로 제약조건을 최대 사용 가능 비용으로 하면서 목적함수를 서비스 수준의 최대화로 하는 모형이다. 기존의 연구는 비용보다는 서비스 수준을 제약 조건으로 하여 접근하였다. 비용을 제약조건으로 할 경우, 제약조건을 만족하는 해를 찾기가 매우 어렵기 때문이다. 하지만 현실적으로는 비용을 제약하면서 서비스 수준을 최대화 하는 모형이 꼭 필요하다.

따라서 본 논문에서는 미리 투자비용의 한도를 정해 놓고 이 한도 내에서 최대의 서비스 수준을 달성할 수 있는 설비의 위치를 결정하는 모형을 개발하고 이의 해법을 제시하고자 한다. 최대지역커버문제와 고정비를 가지는 입지선정문제 모두 라그랑지안 기법을 적용하면 좋은 결과를 얻을 수 있다.([5],[8]) 따라서, 본 논문에서도 라그랑지안 기법을 적용한 발견적 기법을 사용하여 해를 구하고자 하였다.

이 후 본 논문의 구성은 다음과 같다. 3장에서는 수리적 모형을 제시하고, 4장에서는 라그랑지안 기법으로 이완된 수리적 모형을 소개한 후, 커팅 알고리즘을 적용한 발견적 기법으로 문제의 해를 찾는 방법을 소개한다. 5장에서는 실험 및 결과 분석을 하고, 마지막으로 6장에서는 결론 및 향후 연구과제를 제시하겠다.

2. 수리적 모형

비용제약조건 하에서의 최대지역커버문제는 다음과 같은 수리적 모형으로 표현할 수 있다.

입력 변수

i	i번째 수요 지역
j	j번째 설비 후보 지역
f_j	j에 설비를 세울 때 필요한 고정비용
h_i	지역 i의 수요
d_{ij}	지역 i에서 지역 j까지의 거리
c	단위 수요 당 거리 비용
V	최대 투자 가능 비용(=총비용의 한계)
q_{ij}	노드 j에 세워진 설비가 노드 i에 있는 수요를 커버 하면 1, 아니면 0.

의사 결정 변수

X_j 설비가 후보지 j에 세워지면 1, 아니면 0.
Y_{ij} 노드 j에 있는 설비가 노드 i의 수요를 담당하면 1, 아니면 0.

수리적 모형

$$\max \sum_{ij} h_i q_{ij} Y_{ij} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i, \tag{2}$$

$$Y_{ij} \le X_j \quad \forall i,j, \tag{3}$$

$$\sum_j f_j X_j + c\sum_{ij} h_i d_{ij} Y_{ij} \le V, \tag{4}$$

$$X_j = 0,1 \quad \forall j, \tag{5}$$

$$Y_{ij} = 0,1 \quad \forall i,j, \tag{6}$$

식(1)은 커버하는 수요의 총합을 최대화 하는 목적함수로 주어진 제약조건 하에 최고의 서비스 수준을 이루기 위한 식이다. 식(2)는 모든 수요를 충족시켜야 한다는 제약식이며, 식(3)은 입지후보지 j가 선택되었을 때만 그곳에서 서비스를 받을 수 있다는 제약식이다. 식(4)는 투자 비용 제약조건으로 고정비와 운송비를 합한 총 비용이 미리 정한 투자 비용을 초과해서는 안 된다는 제약식이다. 마지막으로 식(5)와 식(6)은 의사결정변수의 이진 정수 조건을 표현한 제약식이다. 이 수리적 모형은 최대지역커버문제나 고정비를 가지는 설비의 입지 선정 문제와 마찬가지로 규모가 큰 실제 문제에서는 최적해를 찾는 것이 매우 어렵다. 예를 들면 100개의 고객 노드와 100개의 설비 후보 지역에 대한 문제는 10,000개 이상의 제약식과 변수도 구성된 정수계획법문제가 되어 최적화 계산에 장시간이 소요된다. 따라서 라그랑지안 기법을 이용한 발견적 기법으로 문제의 해를 찾고자 하였다.

3. 발견적 기법

3.1 라그랑지안 기법으로 이완된 수리적 모형

본 논문에서는 식(2)와 식(4)를 라그랑지안 기법으로 이완(Relaxation) 시켰다. 이완된

수리적 모형은 다음과 같다.

이완된 수리적 모형 (Lagrangean Relaxed)

$$\max_{\gamma,\lambda}\max_{X,Y}\sum_j \frac{\gamma}{V} f_j X_j +$$

$$\sum_{ij}(h_i q_{ij} + \frac{\gamma c h_i d_{ij}}{V} - \lambda_i) Y_{ij} + \sum_i \lambda_i - \gamma \quad (7)$$

subject to

$$Y_{ij} \le X_j \quad \forall i,j, \quad (8)$$

$$X_j = 0,1 \quad \forall j, \quad (9)$$

$$Y_{ij} = 0,1 \quad \forall i,j, \quad (10)$$

$$\gamma \le 0, \quad (11)$$

$$\lambda_i \text{ 부호제약없음 } \forall i. \quad (12)$$

이완된 수리적 모형에서는 식(2)와 (4)가 이완되어 제약식이 아닌 목적함수에 포함되었으며 이를 위해 라그랑지안 승수(Lagrangean multiplier)인 γ와 λ_i가 새로이 도입되었다. 발견적 기법은 라그랑지안 기법으로 이완된 수리적 모형을 사용하여 전개된다.

3.2 발견적 기법의 알고리즘 개요

본 논문에서 사용한 발견적 기법의 알고리즘에 대한 개요는 다음과 같다.

단계 1. 초기해(Initial Solution) 계산
단계 2. 상한(Upper Bound) 계산
단계 3. 하한(Lower Bound) 계산
단계 4. 라그랑지안 승수 업데이트
단계 5. 종료조건 검사

발견적 기법은 단계 1에서 초기해를 구한 후 단계 2부터 단계 5의 과정을 종료조건이 만족 될 때까지 반복하게 된다. 본 논문에서는 단계 2부터 단계 5까지의 한번의 반복을 스텝이라 정의하기로 한다.

3.3 커팅 알고리즘(Cutting Algorithm)

커팅 알고리즘이란 발견적 기법의 단계 3에서 하한을 계산할 때 생기는 문제점을 해결하기 위해 개발한 알고리즘이다. 본 논문에서 적용한 라그랑지안 기법은 식 (2)와 (4)를 이완시키게 되고, 상한은 이 두 조건을 무시하고 구하게 된다. 상한에서 결정된 입지변수 X_j 값을 그대로 사용하여 하한을 구하게 되는데 하한은 이완된 두 식을 모두 만족시켜야 한다. 커팅알고리즘은 현재 스텝에서 두 조건 모두를 만족하는 해를 찾기가 어렵거나 불가능할 때, 모든 수요를 만족시켜야 한다는 제약조건인 식 (2)를 한시적으로 무시하고 비용제약인 식 (4)만 만족시켜서 강제적으로 하한을 구한 후 스텝을 진행하여 실행가능해를 찾겠다는 의도에서 개발하였다. 제약조건을 만족하지 않는 하한이라도 강제적으로 구하는 이유는 라그랑지안 기법의 진행에 하한이 꼭 필요하기 때문이다. 즉, 라그랑지안 기법을 적용하여 문제를 해결하기 위해서는 매 스텝마다의 하한이 꼭 필요한데, 본 문제의 특성상 어떤 스텝에서는 모든 제약조건을 만족하는 하한을 찾는 것이 매우 어렵거나 불가능하기 때문에 이의 해결방법으로 커팅 알고리즘을 개발한 것이다.

Nozick[8]은 이런 문제를 “오픈(open)” 노드를 계속 추가함으로써 해결하였다. 오픈한다는 것은 그 노드를 설비 입지로 선택한다는 의미이며, 따라서 해당 노드의 입지변수 X_j는 1이 된다. 즉, Nozick[8]의 문제에서는 비용이 제약조건이 아닌 목적함수 였으므로 커버제약조건만 만족시키면 되었고, 오픈 노드를 계속 추가하면 커버하는 수요는 무조건 같이 증가하기 때문에 매 스텝마다 실행가능해를 찾는 것이 가능하였다. 하지만 본 논문의 수리적 모형은 비용이 목적함수가 아닌 제약조건이기 때문에 오픈노드를 추가하는 단순한 방법만으로는 실행가능해를 찾기가 어렵다. 즉, 오픈 노드를 추가하면 총 비용은 늘어날 수도 있고 반대로 줄어들 수도 있다는 것이다. 다음의 예를 보면 그 사실을 확인 할 수 있다.

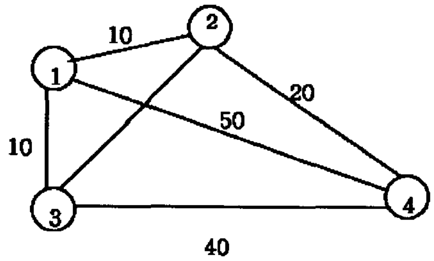


그림 1. 네트워크 예제

위의 네트워크에서 모든 노드의 수요는 1이고, 단위 당 운송비는 10, 설비를 세우는데 드는 고정비는 모두 100이라고 가정하자. 또한 비용제약조건 V는 400이라고 하자. 여기서 입지로 선택된 노드의 수요에 대한 운송비는 0이며, 각 수요 노드는 자신으로부터 가장 가까운 곳에 위치한 설비로부터 서비스를 받는다. 현재 스텝에서 상한을 구하기 위해 이완된 문제를 푼 결과 1번과 2번 노드가 설비 입지로 선택이 되었다면 총 비용은 고정비 200과 운송비 300을 더한 500으로 비용 제약 조건을 어기

게 된다. 하한을 구하기 위해 제약 조건을 만족하는 해를 구하려면 총 비용을 500보다 적게 만들어야 하고, 이를 위해 현재의 오픈 노드를 클로즈(close)하거나 새로운 노드를 오픈해야 한다. 클로즈는 오픈과는 반대의 의미로, 클로즈 되는 노드의 입지변수 X_j는 1에서 0으로 바뀐다. 1번 노드를 클로즈 했을 때 총비용은 600, 3번 노드를 새롭게 오픈 했을 때 총비용은 500으로 역시 제약조건을 만족하는 해를 찾을 수 없다. 예제를 통해 알 수 있듯이 단순히 오픈 노드를 클로즈하거나, 새로운 노드를 오픈하는 방법으로는 주어진 비용 제약을 만족하는 해를 찾기가 어렵다. 총비용은 고정비와 운송비의 합으로 이루어지는데, 고정비를 줄이려면 운송비를 늘여야 하고, 운송비를 줄이려면 고정비를 늘려야 하므로 이런 문제가 발생한다. 이의 해결을 위하여 본 논문에서는 커팅알고리즘을 적용하였다. 커팅알고리즘을 이용하면 이런 문제가 발생했을 경우 하한을 강제적으로 구할 수 있다. 즉, 커팅알고리즘은 모든 제약조건을 만족하는 하한은 구하지 못하나, 해의 실행불가능성(Infeasibility)을 한시적으로 허용함으로써, 라그랑지안 기법의 스텝을 계속 진행할 수 있게 만드는 알고리즘이다. 커팅알고리즘은 본 논문의 문제 뿐만 아니라 라그랑지안 기법을 이용하는 다른 문제에도 응용될 수 있는 방법이기에 시사하는 바가 적지 않다고 할 수 있다.

커팅 알고리즘의 또 하나의 장점은 모든 제약조건을 만족하는 해 찾기가 불가능한 문제 즉, 실행불가능 문제(Infeasible Problem)에 대해서도 적절한 대안을 제시 할 수 있다는 것이다. 만약 발견적 기법이 최종적으로 종료될 때까지 실행가능해를 구하지 못하였다면, 커팅알고리즘의 실행 결과로 얻어진 해를 대안으로 제시 할 수 있다. 커팅알고리즘을 실행하면 서비스를 제공받지 못하는 노드(Unserved Node)가 생기는데, 이를 이용하면 모든 제약 조건을 만족시키기 위해 서비스 대상에서 제외시켜야 할 노드의 파악이 가능하고, 이 지점에 대한 비용을 계산하면 추가로 투자해야 할 비용이 얼마인지 계산 할 수도 있다. 커팅 알고리즘은 발견적 기법의 단계 3에서 사용하며, 구체적 실행 방법은 다음 절에 제시한다.

3.4 발견적 기법의 알고리즘

발견적 기법의 단계별 세부사항은 다음과 같다.

단계 1. 초기해 계산

가장 많은 수요를 커버 할 수 있는 노드 하나를 오픈 한다. 오픈 한다는 것은 그 노드를 설비 입지로 선택한다는 의미이며, 따라서 해당 노드의 입지변수 X_j는 1이 된다. 모든 수요 노드를 현재 오픈 된 노드로부터 서비스를 받도록 한 후 Y_{ij}를 계산하고 이로부터 목적함수 값을 구한다. 이 값이 비용 제약조건을 만족하면 이것이 초기해가 된다. 만족하지 않으면 커팅알고리즘을 통하여 비용제약조건에 맞게 해를 수정하여 사용한다. 초기해는 라그랑지안 승수 계산에서 초기 하한으로 사용된다.

단계 2. 상한(Upper Bound) 계산

이완된 수리적 모형의 최적해를 구하면 그것은 본래 문제의 상한이 된다. 이완된 문제의 최적해를 구하는 과정은 다음과 같다.

입지변수 X_j 의 계산

모든 j에 대하여 다음을 계산한다.

$$K_j = \frac{\gamma}{V} f_j + \sum_i \max(0, h_i q_{ij} + \frac{\gamma c h_i d_{ij}}{V} - \lambda_i)$$

여기서 $K_j > 0$ 이면 $X_j = 1$(즉, 노드 j를 설비의 입지로 선택)로, 그렇지 않으면 $X_j = 0$로 한다.

할당변수 Y_{ij} 의 계산

모든 j에 대하여 할당변수 Y_{ij}는 $X_j = 1$이고, $h_i q_{ij} + \frac{\gamma c h_i d_{ij}}{V} - \lambda_i > 0$ 이면 1로, 그렇지 않으면 0으로 한다.

목적함수 계산

위에서 계산한 X_j와 Y_{ij}를 목적함수에 대입하여 목적함수 값을 구할 수 있다. 이 값은 이완된 문제의 최적해인 동시에 본래 문제의 상한이 된다.

단계 3. 하한(Lower Bound) 계산

하한은 본래 문제에 대한 해가 되어야 하기 때문에 이완시켰던 제약식을 다시 만족하도록 하는 작업이 필요하다. 하한은 이완된 문제의 최적해를 이용하여 찾는데 과정은 다음과 같다.

단계3.1. 이완된 문제의 해를 찾는 과정에서 선택된 입지변수 즉, X_j=1인 j를 오픈한다.

단계3.2. 각 수요노드를 자신과 가장 가까운 오픈노드에 연결하고 총비용을 계산한다.

단계3.3. 총비용이V와 같거나 V보다 적다면 4로 간다. 그렇지 않다면 5로 간다.

단계3.4. 이 해는 실행가능한 해이므로 본래 문제의 목적함수, 즉 식(1)에 값들을 대입하여 하한을 구하고 단계4로 넘어간다.

단계3.5. 이 해는 실행 불가능한 해이므로 다음 과정을 거쳐 하한을 구한다. 이 과정이 커팅알고리즘이다.

(1) 우선 고정비를 V보다 적게 만들기 위해 오픈 노드 중 커버할 수 있는 노드의 개수가 적은 것부터 차례로 클로즈한다(Facility Cutting). 즉, X_j=1인 X_j를 순서대로 하나씩 0으로 만든다. 고정비의 합이 V보다 적어지면 다음으로 넘어간다.
(2) 현재의 오픈 된 노드를 가지고 운송비를 포함한 총 비용을 계산한다. 총비용이 V보다 적다면 (4)로 간다. 그렇지 않으면 (3)으로 간다.
(3) 운송비를 줄이기 위해 수요 노드를 순서대로 하나씩 없앤다(Demand Cutting). 커팅 순서는 그 노드의 수요를 서비스 하는데 필요한 운송비가 큰 것부터 차례로 커팅한다. 이 때 커팅 된 노드는 서비스를 받지 못하며, 이 노드의 수요는 본 문제의 목적함수 값, 즉 커버하는 수요(covered demand)에서 제외시킨다. 총비용이 V보다 적어질 때 까지 커팅하고 총비용이 V보다 적어지면 다음으로 넘어간다.
(4) 현재까지 계산된 목적함수 값을 하한으로 취하고, 서비스를 받지 못하는 노드 및 그 수요의 합을 기록한 후 단계4로 넘어간다.

단계 4. 라그랑지안 승수들의 업데이트
Crower[1]와 Carmerni et al.[3]의 방법에 따라 승수들을 업데이트 하면 다음과 같다.

$$t^n = \frac{\beta^n(UB - LB^n)}{\sum_i(\sum_j Y_{ij}^n - 1)^2 + ((\sum_j f_j X_j^n + c\sum_{ij} h_i d_{ij} Y_{ij}^n)/V - 1)^2} \tag{13}$$

$$\mu_i^n = \varphi\mu_i^{n-1} + (\sum_j Y_{ij}^n - 1) \quad \forall i, \tag{14}$$

$$\lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n - t^n \mu_i^n \quad \forall i, \tag{15}$$

$$\upsilon^n = \varphi\upsilon^{n-1} + ((\sum_j f_j X_j^n + c\sum_{ij} h_i d_{ij} Y_{ij}^n)/V - 1), \tag{16}$$

$$\gamma^{n+1} = \min(0, \gamma^n + t^n \upsilon^n) \tag{17}$$

t^n은 n번째 스텝의 스텝 사이즈(Step size)로써, 상한과 하한의 차이가 줄어드는 정도에 영향을 준다. 스텝사이즈의 분자 부분인 UB^n및 LB^n은 각각 n번째 스텝의 상한과 하한이며, β^n은 n 번째 스텝의 스텝사이즈 파라미터(Parameter)로 $0 < \beta^n \le 2$ 를 만족하는 스칼라(Scalar) 값이다. β^n의 초기값은 모든 실험에서 2로 하였다. β^n은 스텝이 진행되면서 바뀌는데, Crowder[3]와 Nozick[8]이 사용한 방법을 참조하여 변화시켰다. 이 방법은 초기에 a, b, c, d라는 네 변수를 정하여 처음 b 번째 스텝까지는 β^n을 a로 두다가 이 후 a와 b를 c로 나누어서 새로운 a, b를 만든 다음 같은 과정을 반복 하다가 $b<d$가 되면, 매 d번째 스텝마다 β^n을 c로 나누어서 계속 진행시키는 방법이다. 본 논문의 실험에서 a는 2, b는 6*노드 수, c는 2, d는 40으로 정하였다. 스텝사이즈의 분모 부분은 라그랑지안 기법으로 이완된 제약식에 대한 놈(Norm)이다.

식(14)와 (15)는 수리적 모형의 제약조건 식(2)를 이완시켜 추가 된 파라미터인 λ_i에 대한 업데이트 방법이며, 식(16)과 (17)은 식(4)를 이완시켜 추가된 파라미터 γ의 업데이트 방법이다. φ는 가중요소(weighting factor)로 역시 상한과 하한의 갭에 영향을 미치며, 모든 실험에서 0.4로 가정하였다.

단계 5. 종료조건의 검사
알고리즘의 종료조건은 다음과 같다.

(1) 스텝이 지정된 횟수에 도달
(2) 갭이 미리 정한 값보다 작아졌을 때
(3) t 가 0.001 보다 작아졌을 때

단계 2에서 단계 5의 과정을 반복하다가, 위 종료 조건 중 하나라도 만족하게 되면 알고리즘은 종료하게 되며, 커팅 된 노드가 발생하지 않은 스텝 중에서 즉, 실행가능해(feasible solution)중에서 가장 큰 하한을 최적해로 취한다. 만약 모든 스텝에서 커팅 된 노드가 발생하였다면 이 문제는 본 논문의 알고리즘으로는 실행 불가능이라 판단한다. 여기서 갭이란 상한과 하한의 차이를 퍼센티지로 표시한 것이다.

4. 실험

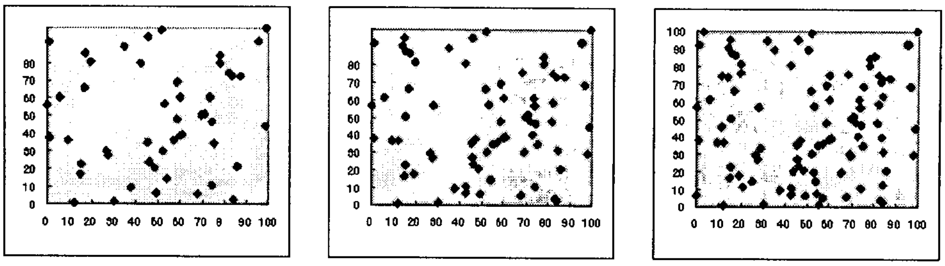
본 논문에서 소개된 알고리즘은 마이크로소프트사의 비주얼 C++로 구현하였으며 펜티엄 1.4 GHz PC에서 실험 하였다.

4.1 테스트 문제

알고리즘의 검증을 위하여 임의로 3종류의 테스트 노드를 생성하였다. 생성한 노드는 다음과 같으며 이를 좌표축상에 나타내면 그림 2와 같다.

(a) 100X100 상에서 임의로 50개 노드를 생성.
(b) 100X100 상에서 임의로 75개 노드를 생성.
(c) 100X100 상에서 임의로 100개 노드를 생성.

세 경우 모두 고정비는 10,000, 단위당 운송비는 1로 주었으며 각 지점의 수요는 평균이 5, 표준편차가 1인 범위에서 임의로 생성하였다. 75노드의 경우 50노드 경우의 모든 노드를 포함하면서 25노드가 추가된 것이며



(a) 50 노드 (b) 75 노드 (c) 100 노드

그림2. 실험 예제의 고객 분포 형태

100노드는 이에 25노드를 더 추가한 것이다. 따라서 노드수가 많아지는 것은 면적 당 노드의 밀도가 높아지는 것이고 수요 노드의 분포가 집중되는 것으로 해석할 수 있다.

현실적으로 최대 수요 커버를 목적으로 입지 후보지 중에서 적절한 위치를 선택할 때는 다음 두 가지 경우를 생각해 볼 수 있다. 하나는 주어진 비용한도(이하 V라 함)내에서 일정 수준의 커버리지를 달성하기 위해 적절한 커버가능거리(이하 S라 함)를 결정해야 하는 경우이고, 또 다른 하나는 S가 미리 결정되어 있는 경우에 일정 수준의 커버리지를 목표로 적절한 비용 산정하는 경우이다. 본 논문에서는 이 두 가지 상황을 모두 고려하여 실험을 설계했다. 첫번째 실험은 적절한 S의 결정에 대한 실험으로 V를 고정시키고 S를 바꾸어가며 실험을 하였다. 두 번째 실험은 적절한 비용 수준에 대한 실험으로 S를 고정시키고 V를 바꾸어가며 실험을 하였다. 실험의 세부적인 사항은 다음과 같다.

실험 1. V가 50,000일 때 S를 10부터 100까지 10단위로 변화시키며 커버리지 변화 관찰

실험 2. S가 30일 때 V를 20,000에서 70,000까지 만 단위로 변화시키며 커버리지 변화 관찰

여기서 커버리지란 총 수요 대비 커버하는 수요의 퍼센티지를 말하며, 목적함수 값과 정비례한다. 50노드, 75노드, 100노드 각각에 대한 종료 갭은 4%, 3%, 2%이며, 종료스텝은 각각 50,0000회, 350,000회, 20,0000회이다. 갭은 상한과 하한의 차이를 퍼센트로 표시한 것이다. 각 노드 수별로 갭이 지정 수준 이하가 되거나 지정 스텝까지 진행하게 되면 알고리즘을 종료한다.

4.2 결과 분석

표1은 실험 1에 대한 결과값이다. 표1에는 노드 수 별로 S 변화에 따른 최고 커버리지, 상한과 하한 및 이 둘의 갭을 나타내었으며, 이 해를 실행하기 위해 드는 총 비용(Cost), 종료 스텝(Iterations), 문제를 푸는데 걸리는 시간(Time), 설비의 입지로써 결정된 노드 번호(Facility numbers)를 차례로 제시하였다. 표2는 실험 2에 대한 결과값으로 노드 수 별로 V 변화에 따른 결과를 제시하였으며 그 순서는 표1과 같다.

실험 1에서는 S가 작아짐에 따라 커버리지도 적어졌다. 또한 같은 S에서는 노드 수 별로 비슷한 커버리지를 달성하였는데 이는 노드 수가 많은 경우 수만 증가하였을 뿐 노드가 분포된 형태는 비슷하여 커버하는 수요와 커버하지 못하는 수요의 비율이 노드수가 많아져도 일정하게 유지되기 때문이다. 여기서 고객의 분포가 비슷하고, 밀도만 높아지는 경우 비용이 충분하다면 커버리지는 오직 S에만 의존한다는 사실을 알 수 있다.

실험 1과 마찬가지로 실험 2에서도 V가 적어짐에 따라 커버리지가 줄어들었으며 이것은 비용 한계가 줄어들면서 설비의 수가 줄어들었기 때문이다. 반면, 그 정도는 노드 수별로 다르게 나타나 노드수가 많을 수록 V의 감소에 따른 커버리지의 감소가 커졌다. V가 적어지면 고정비를 줄이기 위해 설비 수를 줄여야 하는데 노드수가 많아지면 한 설비가 커버하는 수요가 증가하지만 커버하지 못하는 수요가 더 크게 증가하기 때문이다. 실험 1에서는 모든 노드의 경우에 S가 일정 수준 이상이 되면 모든 수요를 커버하는 100%커버리지를 달성하였으며, 같은 100%커버리지를 달성했더라도, S가 큰 경우에는 더 적은 비용으로 가능한 해를 찾아 낼 수 있었다. 모든 실험에서 S가 80이상으로 증가하면 필요한 비용이 50,000 보다 훨씬 적기 때문이다. 여기서 비용과 S의 적절한 관계를 제시할 수가 있는데 비용한도가

표1. 실험 1의 결과

N	S	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Iterations	Time (min)	Facility numbers
	100	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
	90	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
	80	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
	70	100.00	242.00	242	0.00	47,836	645	1.79	3 ,14 ,15 ,35
50	60	100.00	242.00	242	0.00	46,460	658	1.69	9 ,13 ,17 ,39
	50	100.00	242.00	242	0.00	45,529	57,159	132.93	17 ,42 ,43 ,45
	40	98.35	242.00	238	1.65	45,177	24,231	59.16	4 ,19 ,29 ,49
	30	90.50	227.42	219	3.70	44,443	262,437	647.80	2 ,19 ,20 ,44
	20	64.88	173.70	157	9.61	45,133	500,000	1003.14	3 ,4 ,10 ,49
	10	32.64	84.61	79	6.62	46,185	500,000	728.62	5 ,23 ,38 ,43
	100	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.01	3
	90	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.00	3
	80	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.00	3
	70	98.64	368.00	363	1.36	23,640	1	0.00	3
75	60	100.00	368.00	368	0.00	49,944	688	5.16	60, 62, 67, 71
	50	100.00	368.00	368	0.00	47,845	6,665	29.39	2, 20, 42, 57
	40	98.91	368.00	364	1.09	48,276	8,666	29.44	6, 34, 49, 55
	30	91.30	346.35	336	2.99	47,122	39,250	95.94	6, 25, 34, 75
	20	64.95	250.07	239	4.43	46,825	350,000	1163.39	5, 6, 24, 38
	10	34.51	133.92	127	5.17	47,164	350,000	989.67	5, 6, 20, 38
	100	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.00	3
	90	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.00	3
	80	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.00	3
	70	98.59	496.00	489	1.41	37,420	2,097	30.36	3 ,15
100	60	98.99	496.00	491	1.01	44,210	285	6.14	3 ,62, 71
	50	100.00	496.00	496	0.00	41,506	156,342	1292.48	24, 42, 45
	40	98.59	496.00	489	1.41	49,635	14,397	83.93	49, 53, 88, 97
	30	93.35	467.73	463	1.01	49,062	11,248	75.41	19, 53, 58, 76
	20	67.34	340.80	334	1.99	48,963	1,208	15.38	6, 10, 42, 81
	10	27.62	137.13	137	0.10	49,977	70,735	621.22	5, 6, 20, 38

표2. 실험 2의 결과

N	V	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Iterations	Time (min)	Facility numbers
	70,000	94.21	241.51	228	5.59	63,946	500,000	719.70	6, 21, 25, 31, 39, 50
	60,000	95.45	239.27	231	3.45	53,826	90,822	167.00	2, 21, 32, 44, 50
50	50,000	90.50	227.42	219	3.70	44,443	262,437	647.80	2, 19, 20, 44
	40,000	79.75	206.23	193	6.42	35,400	500,000	967.66	2, 7, 34
	30,000	64.05	169.26	155	8.42	26,919	500,000	767.55	7, 34
	70,000	99.46	368.00	366	0.54	66,050	29,247	126.03	2, 17, 21, 25, 44, 45
	60,000	97.01	364.03	357	1.93	56,250	19,571	56.52	2, 19, 20, 25, 44
75	50,000	91.30	346.35	336	2.99	47,122	39,250	95.94	6, 25, 34, 75
	40,000	83.97	318.44	309	2.96	38,163	33,060	150.36	2, 34, 75
	30,000	40.76	154.56	150	2.95	24,828	33,033	129.91	38
	70,000	100.00	496.00	496	0.00	67,651	79,222	370.03	21, 58, 61, 83, 88, 90
	60,000	98.39	489.53	488	0.31	58,546	27,469	192.45	21, 58, 76, 83, 90
100	50,000	93.55	467.73	464	0.80	49,333	11,508	79.63	19, 58, 76, 83
	40,000	64.72	324.05	321	0.94	34,668	16,663	118.05	34, 75
	30,000	35.69	177.00	177	0.00	29,879	1,537	25.82	20

50,000이라면 S를 80이상으로 할 필요가 없다는 것이다.

실험 2에서도 역시 V가 일정수준 이상이 되면 100% 커버리지에 도달했다. 이미 100% 커버리지에 도달했는데도 비용을 늘이면 더 이상 커버리지는 증가하지 않고 총 비용만 증가하였는데 이 역시 앞서와 마찬가지로 비용한계를 높게 준 경우로 적은 비용으로 같은 수준의 커버를 할 수 있는데도 불구하고 많은 비용을 써 비용의 낭비를 가져온 것이다.

설비의 입지로 선택된 노드를 살펴보면 실험1에서는 세 노드 경우 모두 S가 80이상으로 충분히 큰 경우 3번 노드만을 선택하여 100%커버리지를 달성하였으나 S가 작아져서 여러 곳을 선택해야 할 경우엔 3번 노드 외에 다른 노드들의 조합으로 선택되었다. 이는 S가 작아지면 한 곳이 아닌 여러 곳에 설비를 분산시켜야 좀 더 많은 커버리지를 달성할 수 있음을 보여준다. 반면 실험 2에서는 V가 적어짐에 따라 설비의 수도 감소하였으며 이것이 전체 커버리지의 감소로 이어졌다.

실험 1과 2 모두 대부분의 문제는 주어진 스텝에 도달하기 전에 갭 종료조건을 만족하여 종료되었다. 실험 1에서는 대부분이 100초 내외로 매우 빠른 시간 내에 최적해에 가까운 해를 제시해 주었으며, 실험 2에서도 모든 경우에 1000초를 넘지 않았다. 실험 1에서는 S가 작아질수록 시간이 오래 걸렸는데 이는 S가 작기 때문에 생긴 상한과 하한의 큰 갭을 줄이기 위해 시도해 보아야 하는 결정변수 조합의 수가 늘어났기 때문으로 볼 수 있다. 반면 실험 2에서는 V 변화에 따른 시간의 변화는 별로 없었으나 50노드의 경우가 다른 노드의 경우에 비해 훨씬 많은 시간을 소요했다. 이는 50노드인 경우 총수요가 작아서 상한과 하한의 갭을 줄이기가 쉽지 않았기 때문이다.

5. 결론 및 향후 연구 과제

본 논문은 최소의 비용과 최고의 서비스 레벨이라는 두 가지 상충되는 목적을 가진 문제를 어떻게 조절하여 설비의 입지를 결정할 것인가에 대한 매우 현실적인 문제를 수리적으로 모형화 하고, 이를 효과적으로 풀 수 있는 라그랑지안 기법과 커팅알고리즘을 사용하는 발견적 기법을 제시하였다.

발견적 기법은 본 논문에서 정의한 문제의 대부분에 대해 최적값에 가까운 답을 빠른 시간 안에 찾아 내었다. 또한 실험은 주어진 비용과 서비스 수준 하에서 커버리지 거리를 얼마로 할 것인지에 대한 결정, 또는 주어진 커버리지 거리와 서비스 수준 하에서 최적의 비용은 얼마가 될 것인지에 대한 계산이 가능함을 보여 준다.

이 후 연구과제는 본 연구의 수리적 모형의 제약식 중 다른 것을 라그랑지안 기법으로 이완시켜 발견적 기법을 통해 해결해 보는 것과, 라그랑지안 기법을 이용하는 다른 발견적 기법에 커팅알고리즘을 적용하는 것이다.

참고문헌

[1]Carmeni, P.M., Fratta, L., Maffioli, F., "On improving relaxation method by modified gradient techniques", *Mathematical Programming Study* 3(1975), pp.26-34.

[2]Church, R.L., ReVelle, C.S., "The Maximal covering location problem", *Papers of the Regional Science Association* 32(1974), pp.101-118.

[3]Crowder, H., *Computational Improvements for Subgradient Optimization*, Symposia Mathematica, Academic Press, New York, 1976.

[4]Daskin, M., *Network and Discrete Location Models, Algorithms and Applications*, Whiley, New York, 1995.

[5]Galvao, R., ReVelle, C., "A comparison of lagrangean and surrogate relaxation for the maximal covering location problem", *EJOR* 124(2000), pp.377-389.

[6]Goicoechea, A., Hansen, D., Duckstein, L., *Multiobjective decision analysis with engineering and business applications*, Wiley, New York, 1982.

[7]Held, M., Wolfe, P. and Crowder, H., "Validation of subgradient optimization", *Mathematical Programming* 6(1974), pp.62–88.

[8]Nozick, L.K., "The fixed charge facility location problem with coverage restrictions", *Transportation Research* Part E 37 (2001), pp.281-296.

[9]Nozick, L.K., Turnquist, M.A., "Integrating inventory impacts into a fixed charge model for locating distribution centers", *Transportation Research* Part E 31E(3)(1998), pp.173-186.

[10]Mirchandani, P.B., Francis, R., L, *Discrete Location Theory*, Wiley, New York, 1990.

[11]Mirzain, A., "Lagrangian relaxation for the star-star concentrator location problem: approximation algorithm and bounds", *Networks* 15(1985), pp.1-20

[12]Parker, R.G., Radin, R.L., *Discrete Optimization. Academic Press*, New York, 1988.

[13]ReVell, C., Church, R., Schilling, D., "Application of the location set covering problem", *Geographical Analysis* 8(1976), pp.65-76.

[14]Shilling, D.A., ReVell, C., Cohon, J., Elzinga, D.J., "Some models for fire protection locational decisions", *EJOR* 5(1980), pp.1-7.