소프트웨어 신뢰도 성장 모델 및 MLE에 의한 파라미터 산출 방법

최규식*
*건양대학교 정보전자통신공학부
e-mail : che@konyang.ac.kr

SRGM and Parameter Calculation Method using MLE

Che Gyu Shik*
*Dept of Information and Communication, Konyang University

요약

컴퓨터시스템은 여러 가지 복잡하고 민감한 시스템을 제어하는데 광범위하게 쓰이고 있다. 최근에 와서는 운영시스템, 제어프로그램, 적용프로그램과 같은 여러 가지 소프트웨어 시스템이 더욱더 복잡화 및 대형화되고 있기 때문에 신뢰성이 높은 소프트웨어 시스템을 개발하는 일이 매우 중요하며, 소프트웨어 제품개발에 있어서 소프트웨어의 신뢰도가 핵심사항이다. 1970년대 이후 소프트웨어의 신뢰성을 향상시키기 위한 여러 가지 소프트웨어의 신뢰도 모델이 제시되고 검토되었으며, 특히, 소프트웨어 개발 후 테스트단계에 적용하는 신뢰도를 추정하고 예측하는 모델이 많이 개발되었다. 소프트웨어가 주어진 시간간격동안 고장이 발생하지 않을 확률 즉, 신뢰도는 소프트웨어의 테스트과정을 계속해서 반복 및 수정하면 더욱 더 증가된다. 그러한 결함검출현상을 설명해주는 소프트웨어 신뢰도 모델을 소프트웨어 신뢰도 성장 모델(SRGM)이라 한다.

1. 서론

S/W 개발단계에서 테스트하는 구현 S/W 시스템에 대해서 고찰해보기로 한다. S/W 고장은 시스템내에 잔존하는 오류에 의해 발생되는 프로그램 운전이 원치 않게 중지되는 것으로 정의한다. SRGM 영역에서 아래와 같은 일반적인 가정을 도입한다.

○ S/W 시스템은 S/W 오류에 의해서 무작위 시간으로 발생되는 S/W 고장에 달려 있다. 즉, 언제나 S/W 고장이 발생될 수 있다.

○ S/W 고장이 발생될 때마다 이것을 일으키는 S/W의 오류를 즉시 제거하며, 새로운 오류는 도입되지 않는다.

2. SRGM

2.1 일반사항

S/W의 테스트에 의해서 검출되는 누적 오류수의 시간종속적 동태를 기술하는 데어 일반적으로 오류의 검출 시간 단위로서 역일 시간이나 장비의 실행시간과 같은 테스트 시간을 사용한다. $\{N(t), t\geq 0\}$를 시간간격(0, t)에서 검출되는 누적 오류(또는 고장)의 수를 나타내는 계수 공정이라 하면, NHPP의 평균치함수로 불리는 $N(t)$의 기대치는 m(t)로 정의한다. NHPP에 근거한 SRGM은 아래와 같이 쓴다.

$$\Pr\{N(t)=n\} = \frac{\{m(t)\}^n}{n!}\exp[-m(t)] \tag{2.1}$$

여기서,

$$m(t) = a[1-\exp(-bt)] \tag{2.2}$$

로 표현되고, $m(t)$를 다음과 같이 놓으면

$$m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx \text{ 또는 } \lambda(t) = \frac{dm(t)}{dt} \tag{2.3}$$

$\lambda(t)$는 NHPP의 강도함수라 하고 순간 오류검출비를 의미한다.

$a(=m(\infty))$를 최종적으로 검출될 기대누적오류의 수 즉, 산출할 최초의 기대오류라고 정의하면 다음과 같은 식을 쉽게 유도할 수 있다.

$$\lim_{t\to\infty} \Pr\{N(t)=n\} = \frac{a^n}{n!}\exp(-a), \quad n=0,1,2,\cdots \tag{2.4}$$

이는 $N(t)$가 오랜기간 동안 테스트를 한 후 평균치 a를 가진 Poisson을 따른다는 것을 의미한다. 매우 중요한 S/W 신뢰도 성장지수로서

테스트시각 t에서의 단위 오류당 단위 시간당 오류 검출비를 아래와 같이 정의한다.

$$d(t) = \lambda(t)/[a-m(t)] \tag{2.5}$$

$d(t)$와 $m(t)$ 사이는 다음과 같은 관계가 있다.

$$m(t) = a[1-\exp(-\int_0^t d(u)du)] \tag{2.6}$$

S/W의 테스트에서 신뢰도 성장면을 특징 짓는 다음과 같은 정의를 도입한다.

정의 1. $d(t)$가 t≥0에서 감소하지 않는다면 $m(t)$는

증가오류검출비(IEDR)(평균치)함수이다.
정의 2. $d(t)$가 $t \geq 0$에서 증가하지 않는다면 $m(t)$는 감소오류검출비(DEDR)(평균치)함수이다.

정의 3. $d(t)$가 $t \geq 0$에서 상수이면 $m(t)$는 상수오류검출비(CEDR)(평균치)함수이다.

IEDR(DEDR)로 특징지어지는 S/W 신뢰도 성장 공정은 테스트효율이 증가(감소)되는 것을 의미한다. S/W 신뢰도 계산에 대한 정량적인 척도를 유도할 때 아래와 같은 무작위변수를 정의한다.

$\overline{N}(t)$: 테스트시각 t에서 시스템에 잔존하는 오류의 수, $\overline{N}(t) = N(\infty) - N(t)$

X_k : $(k-1)$번째 고장과 k번째 고장사이의 시간간격, $k=1, 2, \cdots, n$

S_k : k번째 고장발생 시각, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$

이렇게 정의하면 $\overline{N}(t)$의 기대치와 분산(Var)은 아래와 같이 계산된다.

$$n_r \equiv E[\overline{N}(t)] = a \cdot \exp[-\int_0^t d(u)du] = Var[\overline{N}(t)] \qquad (2.7)$$

소위 S/W 신뢰도는 $S_{k-1} = t$로 주어진 X_k의 조건 생존 확률이며, 아래와 같이 표현한다.

$$R(x|t) \equiv \Pr\{X_k > x | S_{k-1} = t\} = \exp[a\{\exp(-\int_0^{t+x} d(u)du) - \exp(-\int_0^t d(u)du)\}] \qquad (2.8)$$

이는 k와 무관하다. S/W의 신뢰도는 $(t, t+x)$ 에서 고장이 발생하지 않을 확률을 표현한다.

2.2 기존의 SRGM

S/W 테스트 단계 기간 동안 S/W 오류 검출 공정에서 S/W의 시간 간격과 누적오류 검출 사이를 나타내는 S/W 신뢰도 성장 곡선을 관찰한다. S/W 신뢰도 성장 곡선에 대한 두 개 형태의 모양이 있다. 지수 및 S형 성장곡선이 그것이au, 지수 및 S형 S/W 신뢰도 성장곡선을 기술하는 SRGM은 각각 지수형 및 S형 SRGM이라 한다. NHPP에 근거를 둔 기존의 여러 가지 SRGM을 아래와 같이 간략하게 정리한다.

2.2.1 지수형 SRGM

고엘과 오꾸모또가 처음으로 NHPP에 근거한 SRGM을 제안하였다. 이 모델은 지수형 SRGM이라 부르며, S/W의 고장 현상을 기술해준다. 지수형 성장곡선을 보여주는 평균치함수는 아래와 같다.

$$m(t) = a[1-\exp(-bt)], \quad b > 0 \qquad (2.9)$$

여기서, b는 임의의 시각에서의 오류당 오류 검출비를 나타낸다.
정의에 의해서

$$\lambda(t) = \frac{dm(t)}{dt} = ab \cdot \exp(-bt) \qquad (2.10)$$

이며, 아래와 같은 이유 때문에 $m(t)$가 CEDR인 것이 분명하다.

$$d(t) \equiv d_m(t) = \frac{ab \cdot \exp(-bt)}{a - a[1-\exp(-bt)]} = b, \quad t \geq 0 \qquad (2.11)$$

2.2.2 수정지수형 SRGM

지수형 SRGM에 대한 (2.11)의 동차 오류 검출율과는 대조적으로 오류 검출 능력은 전 테스트 기간에 걸쳐서 비동차로 생각되며, 이는 앞에서 검출된 오류가 후에 검출되는 것과는 상이하기 때문이다. 그래서, Yamada와 Osaki는 두 가지 형태의 오류가 있다는 가정 하에 비동차 오류검출비 모델을 제안하였다. 여기서 두 가지 형태의 오류란 검출이 쉬운 형태의 오류(형태 1)와 검출이 어려운 형태의 오류(형태 2)를 말한다. 수정 지수형 SRGM이라 하는 이러한 NHPP 모델은 다음과 같은 평균치함수를 가진다.

$$m_p(t) = a\sum_{i=1}^{2} p_i[1-\exp(-b_i t)],$$
$$0 < b_2 < b_1 < 1, \quad p_1 + p_2 = 1, \quad 0 < p_1, \ p_2 < 1 \qquad (2.12)$$

여기서, b_1, b_2 : 두 가지 형태의 오류당 오류검출비

p_1, p_2 : 형태 1, 2의 오류내용부분 즉, $p_1 a$, $p_2 a$는 각각 형태 1, 2 오류의 예상 초기오류 내용이다.

$$\lambda(t) = \frac{dm(t)}{dt} = a\sum_{i=1}^{2} p_i b_i \cdot \exp(-b_i t) \qquad (2.13)$$

이므로, 테스트시각 t에서의 오류당 오류 검출비를 다음과 같이 쓴다.

$$d(t) \equiv d_p(t) = \frac{a\sum_{i=1}^{2} p_i b_i \cdot \exp(-b_i t)}{a - a\sum_{i=1}^{2} p_i\{1-\exp(-b_i t)\}} = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i \cdot \exp(-b_i t)}{p_1 . \exp(-b_1 t) + p_2 \cdot \exp(-b_2 t)} \cdot b_i \qquad (2.14)$$

$m_p(t)$가 DEDR 함수인 것은 명백하다.

2.2.3 지연 S형 SRGM

S/W 오류 제거 현상에서 테스트 공정이 S/W 고장 검출 공정 뿐만 아니라 S/W 오류 격리 공정으로도 구성된다는 것을 반드시 가정해야 한다. Yamada는 그러한 오류 검출 공정에 대해서 지연 S형 SRGM을 제안하였으며, 이 지연 S형 SRGM에서는 검출오류의 누적개수에 대한 관찰된 성장곡선이 S형이다. 이 NHPP모델은 아래와 같은 평균치 함수를 가진다.

$$m(t) = a[1-(1+bt)\exp(-bt)], \quad b > 0 \qquad (2.15)$$

$$\lambda(t) = \frac{dm(t)}{dt} = ab^2 t \cdot \exp(-bt) \qquad (2.16)$$

이 식은 S형 성장곡선을 보여주고 있다. 파라미터

b는 고장검출비(와 오류 격리비)를 나타낸다.

$$d(t) \equiv d_M(t) = \frac{ab^2 t \cdot \exp(-bt)}{a - a[1-(1+bt) \cdot \exp(-bt)]}$$

$$= \frac{b^2 t}{(1+bt)} \qquad (2.17)$$

이것이 테스트시각 t에서 단조증가이므로, $m(t)$는 IEDR함수이다.

2.2.4 굴곡 S형 SRGM

Ohba는 또다른 S형 SRGM을 제안하였다. 이 모델은 굴곡 S형 SRGM이며, 검출 오류 상호간의 종속성을 가진 S/W 고장 검출 현상을 기술한다. 오류 검출 공정에서 고장을 더 많이 검출하면 할수록 검출되지 않은 고장이 더욱 더 검출되기 쉽게 된다. 이 NHPP모델은 아래와 같은 평균치 함수를 가진다.

$$I(t) = a[1-\exp(-bt)]/[1+c \cdot \exp(-bt)],$$

$$b>0, \ c>0 \qquad (2.18)$$

$$\lambda(t) = \frac{dm(t)}{dt} = \frac{ab(1+c) \cdot \exp(-bt)}{[1+c \cdot \exp(-bt)]^2} \qquad (2.19)$$

이 식은 S형 성장곡선을 보여주고 있다. 파라미터 b와 c는 각각 고장검출비와 굴곡인자를 나타낸다.

$$d(t) \equiv d_I(t) =$$

$$\frac{ab(1+c) \cdot \exp(-bt)}{[1+c \cdot \exp(-bt)]^2} / \left\{ a - \frac{a[1-\exp(-bt)]}{1+c \cdot \exp(-bt)} \right\}$$

$$= \frac{b}{1+c \cdot exp(-bt)} \qquad (2.20)$$

이것이 테스트시각 t에서 단조증가이므로, $I(t)$는 IEDR함수이다.

2.2.5 결정론적 SRGM

S/W 시스템의 오류 내용을 산출하기 위해 상기에서 기술한 확률적 SRGM 외에 로지스틱 및 곰페르츠 성장곡선을 적합시켜 결정론적 SRGM을 널리 사용해왔다. 일본에서는 얼마간의 컴퓨터 제작업체와 컴퓨터 취급업체들이 로지스틱 및 곰페르츠 성장곡선모델을 적용하고 있다. 본래는 수요 경향, 경제성장, 또는 장래의 인구를 예측하기 위해 성장곡선을 개발하였다. 시각 t까지 검출되는 오류의 누적예측개수는 아래와 같은 로지스틱 성장곡선모델로 표현한다.

$$n_L(t) = k/[1+m \cdot \exp(-pt)],$$

$$m>0, \ p>0, \ k>0 \qquad (2.21)$$

또한, 곰페르츠 성장모델은 아래와 같이 표현한다.

$$n_G(t) = k \cdot a^{(b^t)}, \ 0<a<1, \ 0<b<1, \ k>0 \qquad (2.22)$$

k, p, m, a, b 는 점화분석에 의해서 산출하는 상수 파라미터이다. 두 모델에서 상수 k는 S/W 시스템에서 초기에 존재하고 있던 기대오류 내용이다.

2.3 MLE

평균치함수 $m(t)$가 파라미터 a는 물론 N개의 모델파라미터 w_i를 포함하는 것으로 가정한다. 여기서, $\boldsymbol{w} \equiv (w_1, w_2, \cdots, w_N)$이다. S/W 테스트 단계에서 n개의 고장발생시각 s_k에서 데이터집합이 관찰되었다고 하자.

여기서, $k=1,2,\cdots,n;\ 0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n$, $s \equiv (s_1, s_2, \cdots, s_n)$이다.

그러면, 주어진 s에서, $m(t)$를 가진 NHPP의 (N+1)개의 미지수 a와 w_i에 대한 likelihood function은 아래와 같다.

$$L(a, \ w|s) = \exp[-m(s_n)] \prod_{k=1}^{n} \lambda(s_k) \qquad (2.23)$$

이 함수에 자연대수를 취한다.

$$l(a, \ w|s) = \sum_{k=1}^{n} \ln \lambda(s_k) - m(s_n) \qquad (2.24)$$

그러면, (N+1)개의 MLE $\hat{a}$, $\widehat{w}_i$는 아래와 같은 likelihood 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\partial l(a, w|s)/\partial a = \partial l(a, w|s)/\partial w_i = 0, \quad i = 1,2,\cdots,N \qquad (2.25)$$

주어진 시간간격 $(0,t)$에서 검출된 누적오류의 수에 대한 데이터의 집합 y_k를 관찰하였으며, 여기서, $k=1,2,\cdots,n;\ 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ $y \equiv (y_1, y_2, \cdots, y_n)$이다. 그러면, 주어진 $(t, \boldsymbol{y})$에서, $m(t)$를 가진 NHPP의 (N+1)개의 미지수 a와 w_i에 대한 likelihood function은 아래와 같다.

$$L(a, \ w|t, y) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\{m(t_k) - m(t_{k-1})\}^{y_k - y_{k-1}}}{(y_k - y_{k-1})!}$$

$$\cdot \exp[-\{m(t_k) - m(t_{k-1})\}] \qquad (2.26)$$

$t_o = 0$, $y_o = 0$으로 하고 likelihood 함수에 자연대수를 취하면

$$l(a, \ w|t, y) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \ln[m(t_k) - m(t_{k-1})]$$

$$- m(t_n) - \sum_{k=1}^{n} \ln[(y_k - y_{k-1})! \qquad (2.27)$$

그러면, (N+1)개의 MLE $\hat{a}$, $\widehat{w}_i$는 아래와 같은 likelihood 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\partial l(a, w|t, y)/\partial a$$

$$= \partial l(a, w|t, y)/\partial w_i = 0, \ i = 1,2,\cdots,N \qquad (2.28)$$

S/W 오류데이터 (t,y)에 있어서 대형 샘플에 대한 산출 모델 파라미터의 분포를 유도할 수 있다. 샘플 크기 n이 충분히 크면 MLE $\hat{a}$, $\widehat{w}_i$는 점근 조인트 정규분포를 따른다. $\hat{a}$, $\widehat{w}_i$의 진정한 점근 covariance 마트릭스 Σ는 Fisher information 함수 $\boldsymbol{F}$의 역행렬로 주어진다. 산출 $\hat{\Sigma}$를 다음과 같이 구한다.

$$\hat{\Sigma} = F^{-1} \Big| \begin{array}{l} a = \hat{a} \\ w_i = w_i \end{array} \qquad (2.29)$$

이는 (N+1)×(N+1) 대칭행렬이다.

$\boldsymbol{F}$ 는 $E[-\partial^2 l(a, w|t, y)/\partial a^2]$, $E[-\partial^2 l(a, w|t, y)/\partial w_i^2]$,

$E[-\partial^2 l(a, w|t, y)/\partial a \partial w_i]$

$(= E[-\partial^2 l(a, w|t, y)/\partial w_i \partial a])$,

$E[-\partial^2 l(a, w|t, y)/\partial w_i \partial w_j]$로 주어진 인자를 가진다.

여기서, $i = 1, 2, \cdots, N, \ i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, N$ 이다. 점근특성과 함께 $(N+1)$개의 MLE $\hat{a}, \widehat{w_i}$를 이용하여 (2.7)의 $n_r(t)$과 (2.8)의 $R(x|t)$ 같은 S/W에 대한 정량적 척도의 근사 점추정 및 간격추정을 수행할 수 있다. $f(a, w_1 w_2, \cdots, w_n)$ 이 모델파라미터 a와 w_i의 함수를 표시한다고 하자. 그러면, $f(a, w_1 w_2, \cdots, w_n)$ 의 MLE $\hat{f}(a, w_1, w_2, \cdots, w_N)$가 다음과 같이 된다.

$$\hat{f}(a, w_1, w_2, \cdots, w_N) = f(\hat{a}, \widehat{w_1}, \widehat{w_2}, \cdots, \widehat{w_N}) \quad (2.30)$$

대형 샘플에 대해서는 $f(a, w_1 w_2, \cdots, w_n)$ 가 연속적으로 미분가능이면, $\hat{f}(a, w_1, w_2, \cdots, w_N)$ 가 근사적으로 정규분포된다. 진가의 점근 분산은 아래와 같다.

$$Var[\hat{f}(a, w_1, w_2, \cdots, w_N)]$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial w_1}, \frac{\partial f}{\partial w_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial w_N}\right) \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial w_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial w_N} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

그러므로, $\hat{f}(a, w_1, w_2, \cdots, w_N)$ 의 100γ퍼센트 신뢰도경계는 아래와 같다.

$$\hat{f}(a, w_1, w_2, \cdots, w_N) \pm K_r \sqrt{Var[\hat{f}(a, w_1, w_2, \cdots, w_N)]} \quad (2.32)$$

여기서, K_r은 표준정규분포의 100(1+γ)/2퍼센트 포인트이다. $n_r(t), R(x|t)$를 (2.32)의 $f(a, w_1 w_2, \cdots, w_n)$ 에 적용하면 점근 신뢰도 경계를 얻는다.

3. 결론

NHPP로 기술한 SRGM에 근거를 둔 S/W 신뢰도 산출에 대한 정량적인 기법을 고찰하였다. 그 중 가장 나은 통계적인 추론기법은 ML에 대한 방법이다. 기존 SRGM 즉, 지수형, 수정지수형, 지연 S형, 굴곡 S형 SRGM을 요약하였다.

S/W 신뢰도분석 결과를 S/W 개발 관리에 사용하는 것이 바람직하다. 이를 S/W 품질 보증 및 최적 S/W 발행문제 영역에서 여러 가지로 적용할 수 있다. Ohba와 Yamada는 S/W 품질평가를 위한 기법을 제안하였으며, 이는 포획-재포획 표본화 및 SRGM을 연합한 것이다. S/W 테스트를 언제 중단하고 S/W 시스템을 사용자에게 발행해야 하는가를 결정하는 최적 S/W 발행문제는 수많은 연구자들이 연구하였다.

참고문헌

[1] H. Ascher and H. Feingold, *Repairable Systems Reliability: Modeling, Inference, Misconceptions, and Their Causes*. New York: Marcel Dekker, 1984.

[2] W. D. Brooks and R. W. Motley, "Analysis of discrete software reliability models," Rome Air Development Center, New York, Tech. Rep. RADC-TR-80-84, 1980.

[3] E. H. Forman and N. D. Singpurwalla, "Optimal time intervals for testing hypotheses on computer software errors." *IEEE Trans. Rel.*, vol. R-28, pp. 250-253, Aug. 1979.

[4] A. L. Goel and K. Okumoto, "Time-dependent error-detection rate model for software reliability and other performance measures," *IEEE Trans. Rel.*, vol. R-28, pp 206-211, Aug. 1979.

[5] H. S. Koch and P. Kubat, "Optimal release time of computer software," *IEEE Trans. Software Eng.*, vol. SE-9, pp. 323-327, May 1983.

[6] B. Littlewood, "Theories of software reliability: How good are they and how can they be improved?" *IEEE Trans. Software Eng.*, vol. SE-6, pp. 489-500, Sept. 1980.