

그래프 에지를 이용한 매크로-스타(Macro-star)와 팬케익(Pancake) 그래프간의 임베딩

민준식^o, 최은복^{*}, 이형욱^{**}

^o 경동대학교 컴퓨터공학과

^{*} 전주대학교 정보기술컴퓨터공학부

^{**} 순천대학교 사범대학 컴퓨터교육과

jmin@k1.ac.kr, ebchoi@jeonju.ac.kr, oklee@sunchon.ac.kr

Embedding between Macro-star and Pancake Graphs Using the Graph edge

요약

n -차원 스타 그래프와 팬케익 그래프의 노드 개수는 $n!$ 개로서, 하이퍼큐브가 갖는 좋은 성질을 가지면서 하이퍼큐브보다 망 비용이 적은 값을 갖는 상호연결망이다. 본 논문에서는 스타 그래프와 팬케익 그래프가 동일한 노드 개수를 가질 때, 두 그래프의 에지 정의를 이용하여 스타 그래프 S_n 을 팬케익 그래프 P_n 에 연장을 4, 확장을 1에 임베딩 가능함을 보이고, 팬케익을 매크로-스타에 임베딩 하는 비용이 $O(n)$ 임을 보인다.

1. 서론

오늘날 과학과 공학 분야의 문제들은 많은 계산을 필요로 하므로 기존의 컴퓨터보다 더욱 빠른 계산 능력을 가지는 병렬컴퓨터를 요구하게 되었다. 병렬 컴퓨터의 다중컴퓨터시스템은 지역 메모리를 갖는 각 프로세서와 프로세서를 연결하는 상호연결망으로 되어 있으며, 프로세서간의 메시지 전송은 상호 연결망을 통한 메시지 전송(message passing)에 의해 이루어지고 계산은 데이터 구동(data driven) 방식을 취한다[2]. 따라서 효율적인 상호연결망의 설계와 메시지 전달 알고리즘이 전체 시스템의 성능에 직접적인 영향을 미친다. 상호연결망을 평가하는 망 척도는 분지수, 지름, 대칭성, 확장성, 고장 허용도, 방송 및 임베딩 등이 있다[3,5,7].

임베딩(embedding)은 상호연결망 G 의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망 H 의 프로세서와 통신링크들로 사상하는 것으로서 상호연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 상호연결망 H 에서 효율적으로 실행시킬 수 있는지를 연구하는 분야중의 하나이다. 임베딩의 평가 척도는 연장을(dilation), 밀집율(congestion), 확장을(expansion) 등이 있다[6,7].

본 논문에서는 Cayley 그래프로 널리 알려진 매크로-스타(Macro-star) 그래프[2]와 팬케익(pancake) 그래프[1,3,4]가 동일한 노드 개수를 가질 때, 두 그래프의 에지 정의를 이용하여 상호간의 임베딩을 분석한다. 연구의 주요 결과는 매크로-스타 그래프를 팬케익 그래프에 연장을 4, 확장을 1에 사상 가능하다. 이러한 결과는 매크로-스타 그래프에서 이미 개발된 알고리즘을 팬케익 그래프에서도 활용 가능함을 의미한다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이미 제

안된 그래프의 정의와 특징을 살펴보고, 3장에서는 매크로-스타 그래프와 팬케익 그래프 사이의 임베딩을 분석하고 결론을 맺는다.

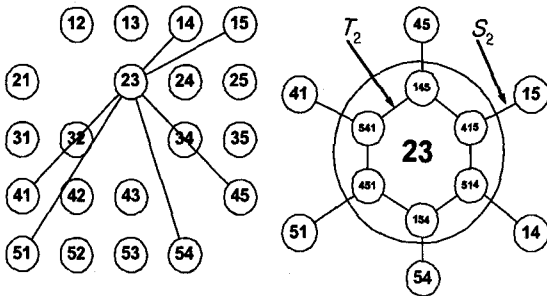
2. 관련 연구

상호 연결망은 각 프로세서를 노드로 프로세서들간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프 $G=(V,E)$ 로 표현된다[5]. 여기서 $V(G)$ 는 노드들의 집합 즉 $V(G)=\{0,1,2,\dots,N-1\}$ 이고, $E(G)$ 는 에지의 집합으로써 $V(G)$ 내의 임의의 두 노드 v 와 w 의 쌍 (v,w) 으로서 에지 (v,w) 가 존재할 필요충분 조건은 노드 v 와 w 사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 지금까지 제안된 상호 연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면 $n \times k$ 개 노드를 갖는 매쉬 부류, 2^n 개 노드를 갖는 하이퍼큐브 부류, $n!$ 개 노드를 갖는 스타그래프 부류로 나눌 수 있다.

매크로-스타(Macro-star) 그래프는 스타(star) 그래프를 일반화한 그래프로써 스타 그래프의 망 비용(network cost)을 개선한 상호연결망이다. 매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$ 은 $(n!+1)!$ 개의 노드와 $(n!+1)!(n!+1)$ 개의 에지로 구성된 연결망이다. 각 노드의 주소는 $k=(n!+1)$ 개의 서로 다른 심벌의 순열로 표현되고, 노드 v 와 w 의 연결관계는 아래의 2가지 에지 발생기 T_j, S_i 를 적용하여 생성된 순열들 사이에 에지가 존재한다. k 개의 서로 다른 심벌 집합을 $\langle k \rangle = \{1,2,\dots,k\}$ 이라 하고, $\langle k \rangle$ 에 대한 심벌의 순열을 $U=u_{1:k}=u_1u_2\dots u_i\dots u_k$, $u_i \in \langle k \rangle$ 이라 할 때 매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$ 은 다음과 같이 정의된다[2].

$$V(MS(l,n)) = \{U = u_{1:k} \mid u_i, u_j \in \langle k \rangle, u_i \neq u_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq k\},$$
$$E(MS(l,n)) = \{(U, V) \mid U, V \in V(MS(l,n)) \text{ satisfying } U = T_j(V) \text{ or } U = S_i(V), 2 \leq j \leq n+1, 2 \leq i \leq l\}$$

에지 발생기 $T_j(U) = u_j u_{2j-1} u_1 u_{j+1} u_k$ 는 순열 $U = u_{1:k}$ 에서 첫 번째 심벌 u_1 과 u_j 를 서로 교환하여 생성된 순열을 연결하는 에지이고, 에지 발생기 $S_n(U_{1:k}) = u_1 u_{(i-1)n+2in-1} u_{n+2(i-1)n+1} u_{2n+1} u_{in+2k}$ 는 순열 $U = u_{1:k}$ 에서 심벌 시퀀스 u_{2n+1} 과 $u_{(i-1)n+2in+1}$ 를 서로 교환하여 생성된 순열을 연결하는 에지이다. 에지 발생기 S_n 를 간단히 S_i 라 한다. 여기서 심벌 시퀀스 $u_{(i-1)n+2in+1}$ 를 클러스터라 하고, 한 클러스터를 구성하는 원소의 개수는 $MS(l,n)$ 에서 n 개이다. (그림 1)은 매크로-스타 그래프 $MS(2,2)$ 를 두 번째 클러스터를 기준으로 구성된 노드를 표현했다. (그림 1)의 우측 큰 원은 두 번째 클러스터의 심벌이 23으로 구성된 노드들로써, 145로 표현된 노드의 순열을 모두 표현하면 14523이고, 순열 14523에서 에지 발생기 $T_2(14523)$ 에 의해 생성된 순열은 41523이고, 에지 발생기 $T_3(14523)$ 에 의해 생성된 순열은 54123이다. 그리고 어떤 순열 U 에 에지 발생기 T_j 와 S_i 를 순차적으로 적용한 경우 $S_i(T_j(U))$ 로 표현한다. 예를 들어 $S_2(T_2(14523))$ 에 의해 생성된 순열은 먼저 순열 14523에 에지 발생기 T_2 에 의해 41523을 생성하고, 순열 41523에 에지 발생기 S_2 를 적용하여 순열 42315에 도달하게 된다.



[그림 1] 매크로-스타 그래프 $MS(2,2)$

팬케익 그래프는 P_n 은 $n!$ 개의 노드와 $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성되고 노드 대칭성을 갖는다. n 개의 서로 다른 집합 $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고, $\langle n \rangle$ 의 순열 $p = p_1 p_2 \dots p_n$, $p_i \in \langle n \rangle$ 이라 하면 팬케익 그래프 P_n 은 다음과 같이 정의된다[1,5].

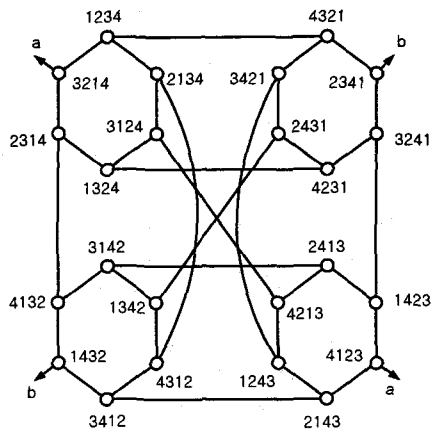
$$V(S_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_n) \mid p_i \in \langle n \rangle, i \neq j, p_i \neq p_j\}$$

$$E(S_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n) (p_1 p_i \dots p_1 p_2 p_3 \dots p_2 p_1 p_{i+1} p_{i+2} \dots p_n) \mid (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n) \in V(P_n), 2 \leq i \leq n\}$$

팬케익 그래프 P_n 은 해밀톤 싸이클을 포함하지만, 4-차원 이상의 팬케익 그래프는 길이가 홀수인 싸이클이 존재하기 때문에 이분 그래프(bipartite graph)가 아님이 알려져 있고, 전위함 문제, 정렬(sorting)과 합병(merging) 알고리즘에 대한 연구 결과가 있다[5]. 또한 팬케익 그래프에서 지름[3], 병렬 라우팅과 정렬[4], 임베딩[5], 방송, 부하균등문제 등이 발표되었다.

3. 임베딩 분석

그래프의 임베딩은 어떤 그래프 G 가 다른 그래프 H 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 f 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍 (ϕ, ρ) 을 말한다. ϕ 는 G 의 정점 집합 $V(G)$ 를 H 의 정점 집합 $V(H)$ 에 대응시키는 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e=(v,w)$ 에서 $\phi(v)$ 와 $\phi(w)$ 를 잇는 H 상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율, 밀집율, 확장율이 사용되고 있다[6,7]. 그래프 G 의 에지 e 의 연장율은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장율은 G 의 모든 에지의 연장율 중 최대값이다. 그래프 H 의 에지 e' 의 밀집율은 e' 에 포함되는 $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, 임베딩 f 의 밀집율은 H 의 모든 에지의 밀집율 중 최대 값이다. 임베딩 f 의 확장율은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점의 개수의 비를 말한다.



[그림 2] 4-차원 팬케익 그래프

본 연구에서는 매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$ 와 팬케익 그래프 P_n 사이의 임베딩을 분석한다. 임베딩 방법은 매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$ 와 팬케익 그래프 P_n 의 그래프 정의를 이용하여 연장율을 분석한다. 예를 들어 매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$ 를 팬케익 그래프 P_n 로 임베딩 할 경우, 매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$ 의 한 에지 (U,V) 에 의해 연결된 두 개 노드 U, V 와 동일한 주소를 갖는 팬케익 그래프 P_n 의 노드 U' 및 V' 로 각각 사상할 때, 팬케익 그래프 P_n 의 노드 U' 에서 노드 V' 까지 최단경로로 라우팅 하는데 필요한 팬케익 그래프 P_n 의 에지 개수로서 연장율을 나타낸다.

매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$ 의 노드 $S(S_1 S_2 \dots S_i \dots S_n)$ 에서 심벌 s_1 과 s_i 가 교환된 순열 $s_i s_2 \dots s_1 \dots s_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원 에지라 하고, C_i 로 표현한다($2 \leq i \leq$

n). 팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(p_1p_2...p_i...p_n)$ 에서 심볼 p_i 부터 첫 번째 심볼 p_1 까지 역순으로 생성된 순열 $p_i p_{i-1} p_{i-2} ... p_1 p_{i+1} ... p_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원 에지라 하고, D_i 로 표현한다($2 \leq i \leq n$). 스타 그래프 S_n 와 팬케익 그래프 P_n 의 정의에 의해 노드를 표현하는 주소의 심볼 p_i 와 s_i 는 n 개 심볼 $1, 2, \dots, n$ 중 하나이므로, 두 그래프의 노드는 동일한 주소를 갖는 노드로 일-대-일 사상할 수 있음을 알 수 있다. 스타 그래프 S_n 과 팬케익 그래프 P_n 에서 임의의 노드 U 에 i -차원 에지 C_i (또는 D_i)를 적용하여 생성된 노드를 V 라 하자. 이때 $V=C_i(U)$ 또는 $V=D_i(U)$ 로 표현한다. 만약 노드 U 에 스타 그래프의 차원 에지 C_i, C_j, C_k 를 순차적으로 적용하여 생성된 노드는 $C_k(C_j(C_i(U)))$ 로 표현하고, 팬케익 그래프도 동일하게 적용한다.

정리1 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 를 팬케익 그래프 P_{2n+1} 에 연장을 4, 확장을 1에 임베딩 가능하다.

증명 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 U 를 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 P 로 사상할 때 노드 U 에 연결된 에지 T_i 와 에지 S_j 에서 i 와 j 의 값에 따라 다음 경우로 나눈다.

경우1. 에지 T_i 에서 $i=2$ 또는 $i=3$

매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1})$ 와 첫 번째 클러스터에서 2-차원 에지에 의해 연결된 노드 $T_2(U)=u_2u_1u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 이다. 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 에서 2-차원 에지에 연결된 노드는 $D_2(P)=p_2p_1p_3...p_i...p_{2n+1}$ 이므로, 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 2-차원 에지와 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 2-차원 에지는 동일한 결과를 가짐을 알 수 있다. 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3u_4...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1})$ 와 3-차원 에지에 의해 연결된 노드는 $T_3(U)=u_3u_2u_1u_4...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 이다. 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 $P(p_1p_2p_3p_4...p_i...p_{2n+1})$ 에서 3-차원 에지에 연결된 노드는 $D_3(P)=p_3p_2p_1p_4...p_i...p_{2n+1}$ 이므로, 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 3-차원 에지와 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 3-차원 에지는 동일한 결과를 가짐을 알 수 있다. 따라서 연장은 1이다.

경우2. 에지 T_i 에서 $i=4$

매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1})$ 와 첫 번째 클러스터에서 4-차원 에지에 의해 연결된 노드 $T_4(U)=u_4u_2u_3u_1...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 이다. 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 에서 노드 $p_4p_2p_3p_1...p_{i-1}p_{i+1}...p_{2n+1}$ 는 서로 인접하지 않으므로 노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 에서 노드 $p_4p_2p_3p_1...p_{i-1}p_{i+1}...p_{2n+1}$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용할 차원 에지 D_i 를 구한다.

노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 에서 4-차원 에지 D_4 에 의해 인접한 노드 $D_4(P)=p_4p_3p_2p_1p_5...p_i...p_{2n+1}$ 이고, 노드 $D_4(P)$ 에서 3-차원 에지 D_3 에 인접한 노드

$D_3(D_4(P))=p_2p_3p_4p_1p_5...p_i...p_{2n+1}$ 이다. 노드 $D_3(D_4(P))$ 에서 2-차원 에지에 의해 인접한 노드 $D_2D_3(D_4(P))=p_3p_2p_4p_1p_5...p_i...p_{2n+1}$ 이고, 노드 $D_3(D_4(P))$ 에서 3-차원 에지에 의해 인접한 노드 $D_3(D_2D_3(D_4(P)))=p_4p_2p_3p_1p_5...p_i...p_{2n+1}$ 이다. 즉, 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 U 를 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 P 로 사상할 때, 노드 U 와 4-차원 에지에 의해 연결된 노드 $C_4(U)$ 와 동일한 주소를 갖는 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드는 노드 P 에서 차원 에지 D_4, D_3, D_2, D_3 를 순차적으로 적용하여 생성된 노드임을 알 수 있고, 이때 적용한 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 차원 에지 개수가 4개이므로 연장을 4이다.

경우3. 에지 T_i 에서 $5 \leq i \leq n$

매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1})$ 와 첫 번째 클러스터에서 i -차원 에지에 의해 연결된 노드는 $u_1u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 이다. 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 에서 노드 $p_i p_2 p_3 ... p_{i-1} p_1 p_i p_{i+1} ... p_{2n+1}$ 는 서로 인접하지 않으므로 노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 에서 노드 $p_i p_2 p_3 ... p_{i-1} p_1 p_i p_{i+1} ... p_{2n+1}$ 까지 라우팅을 위해 적용할 최단경로의 차원 에지 D_i 를 구하고, 그 결과를 이용하여 연장이 4 이하임을 보인다.

노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 에서 $(i-1)$ -차원 에지에 의해 생성된 노드 $D_{i-1}(P)=p_{i-1}p_i p_2 p_3 ... p_{i-2} p_1 p_i p_{i+1} ... p_{2n+1}$ 이고, 노드 $D_{i-1}(P)$ 에 차원 에지 $(i-2)$ -차원 에지를 적용한 노드 $D_{i-2}(D_{i-1}(P))=p_2 p_3 ... p_{i-3} p_i p_2 p_1 p_i p_{i+1} ... p_{2n+1}$ 이다. 노드 $D_{i-2}(D_{i-1}(P))$ 에 $(i-1)$ -차원 에지를 적용한 노드 $D_{i-1}D_{i-2}(D_{i-1}(P))=p_1 p_i p_{i-1} p_i p_2 p_3 ... p_3 p_2 p_i p_{i+1} ... p_{2n+1}$ 이고, 노드 $D_{i-1}(D_{i-2}(D_{i-1}(P)))$ 에 i -차원 에지를 적용한 노드 $D_i(D_{i-1}(D_{i-2}(D_{i-1}(P))))=p_1 p_2 p_3 ... p_{i-3} p_i p_2 p_1 p_i p_{i+1} ... p_{2n+1}$ 이다. i -차원 에지가 5 이상인 경우 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 P 에서 차원 에지 $D_{i-1}, D_{i-2}, D_{i-1}, D_i$ 를 순차적으로 적용하여 생성한 노드 $p_1 p_2 p_3 ... p_{i-3} p_i p_2 p_1 p_i p_{i+1} ... p_{2n+1}$ 는 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 U 와 i -차원 에지에 의해 인접한 노드 $u_1u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 과 동일한 노드임을 알 수 있고, 이때 적용한 차원 에지 개수는 4개이므로 연장을 4이다($5 \leq i \leq n$).

경우4. 에지 S_j 에서 $j=2$

매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 은 2개의 클러스터로 구성되어 있고, 노드 $U(u_1u_2u_3u_4u_5...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1})$ 에서 첫 번째 클러스터와 두 번째 클러스터가 교환된 노드를 연결하는 에지 S_2 에 의해 연결된 노드 $S_2(U)=u_1u_4u_5u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 이다. 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 $P(p_1p_2p_3...p_i...p_{2n+1})$ 와 $p_1p_4p_5p_2p_3...p_i...p_{2n+1}$ 는 서로 인접한 노드가 아니므로, 노드 P 에서 노드 $p_1p_4p_5p_2p_3...p_i...p_{2n+1}$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용할 에지 개수를 통해 연장을 분석한다.

노드 P 에서 3-차원 에지에 의해 연결된 노드 $D_3(P)=p_3p_2p_1p_4p_5p_6...p_i...p_{2n+1}$ 이고, 노드 $D_3(P)$ 에서 5-

차원에지에 의해 연결된 노드 $D_5(D_3(P))=p_5p_4p_1p_2p_3p_6\dots p_i\dots p_{2n-1}$ 이다. 그리고 노드 $D_5(D_3(P))$ 에 3-차원에지에 의해 연결된 노드 $D_3(D_5(D_3(P)))=p_1p_4p_5p_2p_3\dots p_i\dots p_{2n-1}$ 이다. 따라서 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 P 에서 차원에지 D_3, D_5, D_3 를 순차적으로 적용하여 생성된 노드 $D_3(D_5(D_3(P)))=p_1p_4p_5p_2p_3\dots p_i\dots p_{2n-1}$ 는 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 U 에서 에지 S_2 에 의해 연결된 노드 $S_2(U)=u_1u_4u_5u_2u_3\dots u_i\dots u_{2n-1}$ 와 동일한 노드임을 알 수 있고, 이때 적용한 에지 개수는 3개로서 연장을 3임을 알 수 있다. □

정리2 팬케익 그래프 P_{2n+1} 을 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 으로 임베딩 비용은 $O(n)$ 이다.

증명 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 $P(p_1p_2p_3\dots p_i\dots p_{2n+1})$ 와 $2n$ 개의 차원에지에 의해 $2n$ 개의 노드가 인접해 있지만, 본 증명에서는 노드 P 와 $(2n+1)$ -차원에지에 의해 인접한 노드 $D_{2n+1}(P)$ 가 연장을 $O(n)$ 을 가짐을 보이도록 한다. 팬케익 그래프 P_{2n+1} 의 노드 $P(p_1p_2p_3\dots p_i\dots p_{2n+1})$ 에서 $(2n+1)$ -차원에지에 의해 연결된 노드는 $D_{2n+1}(P)=p_{2n+1}p_{2n}p_{2n-1}\dots p_i\dots p_2p_1$ 이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3\dots u_i\dots u_{2n}u_{2n+1})$ 와 노드 $U'=u_{2n+1}u_{2n}u_{2n-1}\dots u_i\dots u_2u_1$ 는 서로 인접하지 않으므로, 노드 $U'=u_{2n+1}u_{2n}u_{2n-1}\dots u_i\dots u_2u_1$ 에서 노드 $U(u_1u_2u_3\dots u_i\dots u_{2n+1})$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용할 매크로-스타 그래프의 차원에지 개수가 n 개 이상임을 보인다.

매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U'=u_{2n+1}u_{2n}u_{2n-1}\dots u_i\dots u_2u_1$ 에서 심볼들을 2개 클러스터로 나누면 첫 번째 클러스터의 심볼은 $u_{2n}u_{2n-1}u_{2n-2}\dots u_{n+1}$ 이고, 두 번째 클러스터의 심볼은 $u_nu_{n-1}u_{n-2}\dots u_2u_1$ 이다. 노드 U' 의 첫 번째 심볼 u_{2n} 과 첫 번째 클러스터의 심볼 $u_{2n}u_{2n-1}\dots u_n$ 이 역순으로 위치해야 하므로 차원에지 $T_i, 2 \leq i \leq n+1$ 를 적용한다. 노드 U' 에서 $(n+1)$ -차원에지에 인접한 노드 $T_{n+1}(U')=u_{n-1}u_{2n}u_{2n-1}\dots u_{n+2}u_{2n+1}u_nu_{n-1}\dots u_2u_1$ 이고, 노드 $T_{n+1}(U')$ 의 첫 번째 심볼 u_{n-1} 은 두 번째 클러스터에 있어야 할 원소이고, 첫 번째 클러스터의 심볼 u_{2n} 부터 u_n 까지 역순으로 정렬하는 데는 차원에지 T_i 가 2번씩 사용되어야 한다($2 \leq i \leq n+1$). 노드 U' 에서 첫 번째 클러스터가 역순으로 정렬되면 첫 번째 클러스터와 두 번째 클러스터를 에지 S_2 를 이용하여 교환하고 이전의 과정을 반복해야 한다. 노드의 심볼을 정렬하는 과정에서 적용한 차원에지 개수는 클러스터를 구성하는 심볼개수가 짝수이면 $3n-4$ 개이고, 심볼개수가 홀수이면 $3(n-1)$ 개이다. 따라서 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U'(=u_{2n+1}u_{2n}u_{2n-1}\dots u_i\dots u_2u_1)$ 에서 노드 $U(u_1u_2u_3\dots u_i\dots u_{2n+1})$ 까지 라우팅 하는데 적용되는 에지 개수는 $3(n-1)$ 개이므로 연장이 $O(n)$ 임을 알 수 있다. □

4. 결론

본 논문에서는 상호 연결망의 주요 성질인 노드 대칭성, 재귀적 구조, 최대 고장허용도 등을 가지면서 하이퍼큐브 보다 망비용이 개선된 스타(star) 그래프와 팬케익 그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 본 연구의 임베딩 방법은 각 그래프가 동일한 노드 수를 가질 때 그래프의 정의 즉, 에지 생성 규칙을 통해 인접한 두 노드를 사상하고자 하는 대상 그래프에서 사용되는 에지 정의로 표현하였다. 그래프 정의를 통해 임베딩 분석이 가능한 이유는 스타 그래프와 팬케익 그래프가 노드 대칭적인 성질이 있기 때문이다.

본 논문의 연구 결과는 스타 그래프 S_n 을 팬케익 그래프 P_n 에 연장비용 4, 확장비용 1에 임베딩 가능하고, 팬케익 그래프 P_n 을 스타 그래프 S_n 으로 임베딩 비용이 $O(n)$ 임을 보였다. 이러한 결과는 스타 그래프에서 개발된 알고리즘을 팬케익 그래프에서 상수의 추가적인 비용으로 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다.

참고문헌

- [1] P. Berthome, A. Ferreira and S. Perennes, "Optimal Information Dissemination in Star and Pancake Networks," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst., Vol. 7, No. 12, pp. 1292-1300, 1996.
- [2] C. H. Yeh and E. A. Varvarigos, "Macro-Star Networks: Efficient Low-Degree Alternatives to Star Graphs," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol. 9, No. 10, pp. 987-1003, October 1998.
- [3] H. Mohammad and I. Hal, "On the Diameter of Pancake Network," Journal of Algorithms, No. 25, pp. 67-94, 1997
- [4] K. Qiu, H. Meijer and S. G. Akl, "Parallel Routing and Sorting on the Pancake Networks," Lecture Notes in Computer Science, No. 497, Springer-Verlag, pp. 235-242, 1991.
- [5] K. Qiu, S. G. Akl and H. Meuer, "On Some Properties and Algorithms for the Star and Pancake Interconnection Networks," Journal. Parallel and Distributed Computing 22, pp. 16-25, 1994.
- [6] J-S. Jwo, S. Lakshmirarahan, and S. K. Dhall, "Embedding of Cycles and Grids in Star Graphs," Proc. of IEEE, Vol. 5, pp. 540-547, 1990.
- [7] A. K. Gupta and S. E. Hambrusch, "Multiple Network Embeddings into Hypercubes," J. Parallel and Distributed Computing 19, pp. 73-82, 1993.