

# Fractional Step Method을 이용한 원형 실린더 주위의 난류 유동해석

박 금 성<sup>\*1</sup>, 박 원 규<sup>\*2</sup>

## Turbulent Flow Analysis of a Circular Cylinder Using a Fractional Step Method

K. S. Park and W. G. Park

As computer capacity has been progressed continuously, the studies of the flow characteristics have been performing by the numerical methods actively. Recent numerical simulation has a tendency to require the higher-order accuracy in time, as well as in space. This tendency is more true in LES and acoustic noise simulation. In this study, 3-dimensional unsteady incompressible Navier-Stokes equation was solved by numerical method using the fractional step method with the fourth order compact pade scheme to achieve high accuracy. To validate the present code and algorithm, 3D flow-field around a cylinder was simulated. The drag coefficient and lift coefficient were computed and, then, compared with experiment. The present code will be tailored to LES simulation for more accurate turbulent flow analysis.

**Key Words:** 나비에-스톡스 방정식(Navier-Stokes equation), 스마고린스키 모델(Smagorinsky model), 컴팩트 파데 방법(Compact Pade' scheme), 다단계 스텝 방법(Fractional step Method)

### 1. 서 론

최근 컴퓨터의 발달과 더불어 DNS, LES, 난류계산, CAA 등의 좀더 복잡한 문제들이 전산유체역학에 의해 다뤄지고 있으며, 이러한 계산을 위한 고차의 scheme 개발에 대한 관심이 고조되고 있다. 고 정확도의 scheme 개발에는 격자를 조밀하게 만들거나 scheme 자체의 정확도를 높이는 방법도 있지만 계산

시간과 그에 따른 비용을 생각하면 크게 실용적이지 못하다. 뿐만 아니라, LES 난류해석의 경우, 기본 유동 계산 코드의 정확도와 강인성이 향상되어 있어야 원하는 고정도의 LES 난류해석이 가능해진다.

본 연구에서는 4단계 Fractional step 방법을 통해 비정상상태의 문제를 해결하였는데, 이 방법은 기존의 SIMPLE 방법에 비해 계산 시간을 상당히 절약할 수 있으므로 3차원 비정상 유동처럼 복잡한 문제 일수록 그 시간 절감 효과가 뛰어나다고 생각된다. 이상의 방법들을 실린더 주위의 유동계산에 적용하였는데 실린더는 그 형상이 단순함에도 불구하고 매우

\*1 학생회원, 부산대학교 대학원 기계공학과

\*2 종신회원, 부산대학교 기계공학부

복잡한 유동구조를 포함하고 있기 때문에 실험연구가 대부분이고 수치연구 결과는 층류영역에서 많이 이루어져 왔다. 본 연구에서는 복잡한 실린더 주위의 유동장을 해석함으로써 Compact scheme 과 Fractional step방법을 이용하여 개발된 프로그램에 대한 검증을 시도하였다

## 2. 지배 방정식 및 수치해석 기법

### 2.1 지배 방정식

실린더 주위를 지배하는 3차원 비정상상태 비압축성 점성유동의 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식을 무차원화한 후 일반 좌표계로 변화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \partial \frac{F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial G_v}{\partial \xi} \quad (1)$$

여기서  $q$ 는 유동벡터이며  $E, F, G$ 는 대류항이고,  $E_v, F_v, G_v$ 는 점성항을 의미한다.

### 2.2 수치해석 방법

#### 2.2.1 4단계 Fractional Step Method

Navier-Stokes 방정식인 식(1)을 풀기 위해 Kim 과 Moin[1], Choi 와 Moin[2]에 의해 사용된 4단계 Fractional step method를 적용하였다. 1단계에서는 연속방정식을 제외한 운동량 방정식을 종속변수 ( $u, v, w$ )에 대해서 시간에 대해 전개한다. 여기서 \* 단계는 중간 단계속도를 의미하며, 이때 운동량 방정식에서 압력항은 계산에서 제외된다.

제 1단계 : 운동량 방정식을 \*단계에 대해 푼다.

$$\frac{1}{\Delta t} (\bar{q}^* - \bar{q}^{n+m}) + \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{E}^{n+m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{F}^{n+m} + \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{G}^{n+m} = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{E}_v^{n+m} + \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{F}_v^{n+m} + \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{G}_v^{n+m} \quad (2)$$

제 2단계 : \*\*단계에 대해서 보정속도 관계식을 푼다.

$$\frac{u_i^{**} - u_i^*}{\Delta t} = \nabla p^n \quad (3)$$

제 3단계 :  $n+1$ 단계의 압력에 대한 Poisson 방정식을 푼다.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot u^{**}}{\Delta t} \quad (4)$$

제 4단계 :  $n+1$  단계의 속도값을 구한다.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{**}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (5)$$

여기서 식(2)에서  $m=0$ 이면 외재적 방법이 되며,  $m=1/2$ 이면 내재적 방법의 Crank-Nicolson 방법이 된다. 본 연구에서는  $m=0$ 인 외재적 방법을 채택하였다. 압력에 대한 Poisson 방정식인 식(4)는 Cartesian 좌표계에서는 일반적으로 HSMAC[3]방법을 이용해서 풀지만, 이것을 일반 좌표계에서 그대로 적용하면 수렴성과 정확도가 떨어지게 된다. 본 연구에서는 압력에 대한 Poisson 방정식을 일반 좌표계로 변환한 후 ADI 방법을 이용하여 풀었다. 특히 원형 실린더와 같이 유동 박리가 발생하는 복잡한 유동장에서는 ADI 방법이 HSMAC 방법에 비해 정확도가 우수하다.

#### 2.2.2 Compact Pade' scheme

본 연구에서는 영역에 대한 수치해석의 정확도를 높이기 위해 Lele[4]가 제안한 4차/6차 정확도의 Compact Pade' 방법을 식(2)-(5)의 공간상에 대한 편미분항에 적용하였는데, 임의의 함수  $f$ 에 대한 일차 편미분  $f'$ 을 Compact scheme에 의해 얻어진 값이라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$af'_{j-1} + f'_j + af'_{j+1} = a \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + b \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4\Delta x} \quad (7)$$

여기서 만약  $a=1/4, a=3/2, b=0$ 으로 택하면 4차 정확도가 되며,  $a=1/3, a=14/9, b=1/9$ 를 택하면 6차의 정확도를 가지는 Compact scheme이 된다.

2차 편미분에 대해서는 다음의 관계식이 성립한다.

$$af''_{j-1} + f''_j + af''_{j+1} = a \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} + b \frac{f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}}{4\Delta x^2} \quad (8)$$

여기서  $f''$ 는 Compact scheme에 의해 구해진 2차 편미분 값이 되며,  $\alpha=1/10, a=6/5, b=0$ 으로 택하면 4차 정확도가 되며,  $\alpha=2/11, a=12/11, b=3/11$ 를 택하면 6차의 정확도가 된다. 이때 Compact scheme을 적용하기 위해서는 경계에서의 특별한 처리가 필요한데, 여기에서 발생한 오차가 유동의 내부 영역으로 확대되어 들어가지 않으면서 전체적으로 원하는 정확도를 유지하는 수치적 처리가 필요하게 된다. 본 연구에서는 Shang[5]의 4차/5차의 편향 차분화와 low-pass spatial filter를 도입하였다.

### 2.3 난류모델, 초기 및 경계조건

난류모델로 표준 Smagorinsky[6] 모델을 적용하였으며, 초기조건은 자유 유동 조건을 부여하였다. 경계조건은 유입경계에 있어서 자유 유동 조건을 부여하였고, 유출 경계의 경우는 속도는 Compact scheme의 수치 정확도를 유지하기 위한 외압과 압력은  $p=p_\infty$ 로 부터 구하였다. 고체 표면에서는 접촉 조건(no slip)과 압력에 대해 Neumann 조건을 부과하였는데 이것 역시 Compact scheme에 의한 4차 정확도를 유지하도록 하였다. 원형 실린더의 z 방향 실린더(축 방향)로는 주기적 조건을 적용하였다.

## 3. 결과 및 고찰

### 3.1 Compact Scheme에 대한 검증

본 연구에서 사용된 Compact scheme의 알고리즘을 Re수 2,800의 원형 실린더 주위의 유동장에 대한 계산으로 검증을 시도하였다. Fig. 1은 Re수 2,800인 실린더 표면의 압력계수를 Wille에 의한 실험[7]과 Quick방법 그리고 Compact scheme에 의한 방법을 비교한 것으로 Compact scheme에 의한 표면 압력 계수가 Quick방법보다 실험값에 근접하고 있음을 알 수 있다.

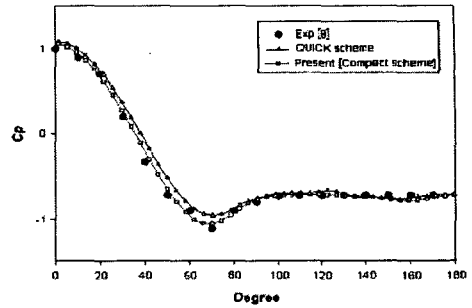


Fig. 1 Comparison of Cp at Re = 2,800

### 3.2 원형 실린더 주위의 유동해석

#### 3.2.1 격자계 구성

본 논문에서 유동계산에 사용된 실린더의 형상은 Fig. 2와 같고 격자의 개수는 개 이다. 계산의 최대 반경은 25D(D=직경)으로 결정하였다.

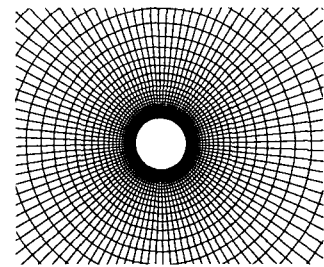


Fig. 2 Computation grid of Cp at Re = 2,800

#### 3.2.2 결과 및 고찰

본 연구에서는 실험값[8]이 있는 Re=3,900에서 수행하였으며, 실린더 표면주위의 압력계수 및 유동장 내의 다양한 물리량을 실험값과 비교하였다.

Fig.3은 실린더 표면주위의 시간평균에 의한 압력 계수를 나타낸 것이다. Ong 등의 실험결과와 비교하였다. 본 연구의 3차원 해석결과를 실험에 의한 결과와 비교해 볼 때 실험적인 오차범위 내에서 대체로 일치하고 있음을 볼 수 있으나 실린더 뒤쪽 재순환영역 부근에서 다소 차이가 있음을 볼 수 있다. 이것은 Moin등[9]의 LES에 의한 수치해석 결과를 고려할 때 실린더 뒷면 재순환영역의 격자가 충분히 조밀하지 못하다는 것과 재순환 영역내부의

난류해석의 정확한 예측이 이루어지지 못했기 때문으로 판단된다.

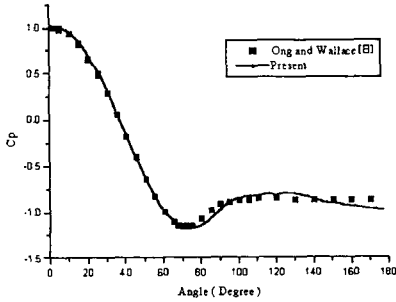
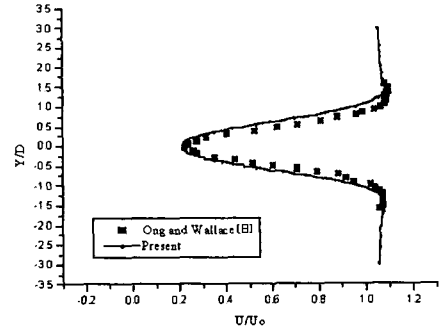


Fig. 3 Pressure Coefficient on the cylinder surface

Fig. 4에서는 재순환 영역의 뒤쪽의 일정한 위치에서 실린더의 길이방향과 평행하게 자른 단면에 따른  $U/U_0$ 의 값의 시간 평균에 대한 분포를 나타낸 것이다. 실린더 후미에 근접한 유속의 변화가 심한 영역에서는 대체로 잘 일치하고 있으나 유동의 진행방향으로 갈수록 진행방향의 중앙단면에서 다소 차이를 볼 수가 있다. 이는 실린더 재순환 영역을 거치고 난 뒤 진행방향으로 갈수록 중앙 단면 부근의 평균속도 회복이 제대로 이루어지지 않았기 때문이며, 표준 Smagorinsky 모델의 한계로 여겨진다.

Fig. 5은 Reynolds stress중 전단응력에 대한  $X/D=6.0$ 에서의 시간평균 계산결과를 나타내고 있다. 비교적 실험결과와 거의 일치하는 계산 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.



(b)  $x/D=2.02$

Fig. 4 Comparison of the time-averaged  $U/U_0$  with experiment

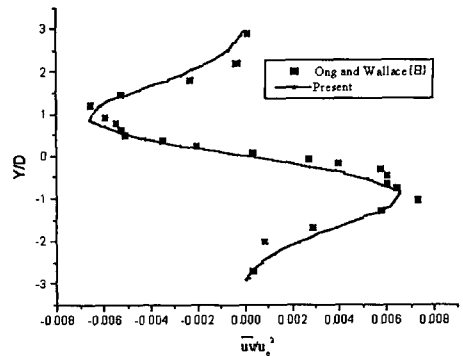
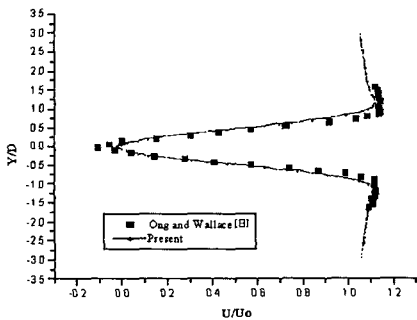


Fig. 5 Comparison of the time-averaged Reynolds stresses with experiment( $X/D=6.0$ )



(a)  $x/D=1.54$

Fig. 6부터 8은  $x/D=1.54$ 인 지점에서 실험적으로 측정된 Reynolds stress 성분과 계산 결과를 비교한 것이다. Fig. 6에서 Streamwise Reynolds stress 성분( $\overline{u'u'}$ )은 비교적 실험값과 비슷한 경향을 보이고 있다. Fig. 7에서는 전단 성분( $\overline{u'v'}$ )의 결과를 보이고 있으며, 실험값보다 아래에 위치하고 있음을 볼 수 있다. 이는 그리드의 영향으로 mean-flow의 차이로 인해 발생한다고 생각된다. Figure. 8은 근접한 와류에서 3차원적인 감소량을 나타내고 있다. 계산결과의 오차는 앞으로 그리드의 밀도성등을 높인다면 더 좋은 결과를 얻을수 있으리라 생각된다.

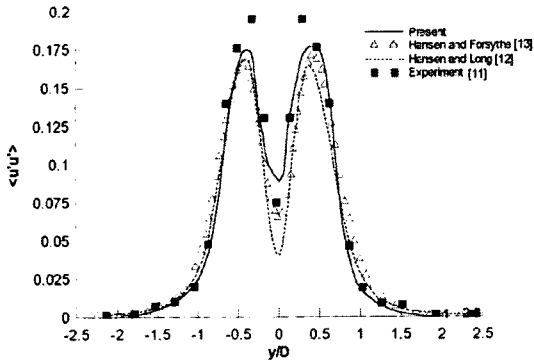


Fig. 6 Streamwise Reynolds Stress in the  $x/D=1.54$  Plane

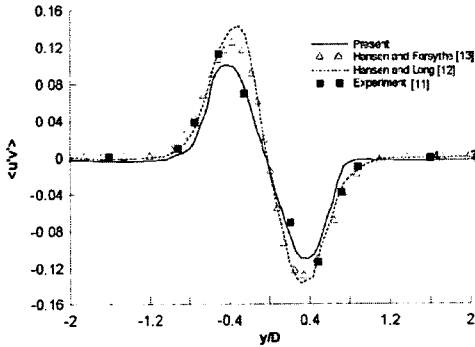


Fig. 7 Shear Reynolds Stress in the  $x/D=1.54$  Plane

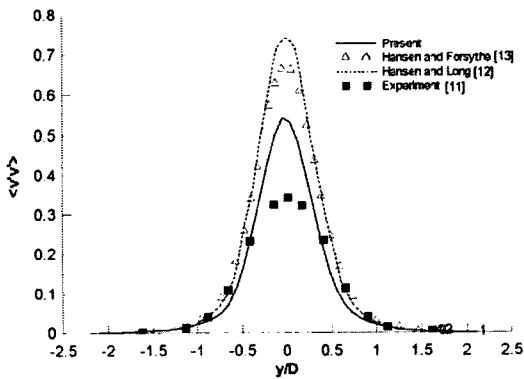


Fig. 8 Lateral Reynolds Stress in the  $x/D=1.54$  Plane

Fig. 9에서는 난류 유동시 instantaneous vorticity를 보여주고 있다. 두개의 전단 경계층이 Cylinder로부터 박리되고 있으며, karman vortex의 발달과정을

볼 수 있다. 또한, 전단 경계층에서 불안정하게 생성된 볼텍스들은 유동 흐름 전에 주요 볼텍스들과 혼합되고 있다. Fig. 10은 vorticity의 isosurface를 보여주고 있다.

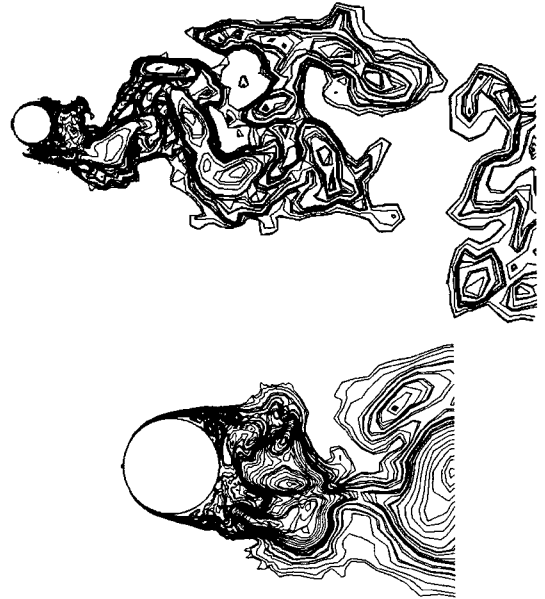


Fig. 9 Separating shear layers and development of Karman vortex street in the flow over a circular cylinder at  $Re=3,900$ . Shown are contours of instantaneous vorticity



Fig. 10 Isosurface of instantaneous vorticity magnitude in the flow over a circular cylinder at  $Re=3,900$

#### 4. 결론

본 연구에서는 Compact Pade 유한 차분화를 이용한 고차 정확도의 Fractional step method를 적용한 수치해석코드를 개발하였다. 실험값이 있는  $Re=3,900$ 의 실린더 주위의 유동에 대해 해석함으로써 프로그램 검증에 대체로 만족할 만한 결과를 얻었으며, 향후 좀더 정확한 난류해석 등의 보완 연구와 함께 다양한 유동장에 대한 해석을 통해 프로그램의 완성도를 높일 계획이다.

#### 참고문헌

- [1] Kim, J. and Moin, P., "Application of a Fractional Step Method in Incompressible Navier-Stokes Equation", J. Comp. Phys., Vol. 59, (1985), pp. 308-323.
- [2] Choi, H. and Moin, P., "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow", J. Comp. Phys., Vol. 113, (1994), pp. 1-4.
- [3] Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", Phys. Fluids, Vol.8, (1965), pp. 2182-2189.
- [4] Lele, S.K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution", J. Comp. Phys., Vol.103, (1992), pp.16-42
- [5] Shang, J. S., "High-Order Compact-Difference Schemes for Time-Dependent Maxwell Equations", J. Comp. Phys., Vol. 153, (1999), pp. 312.
- [6] Smagorinsky, J., "General Circulation Experiments with the Primitive Equations", Monthly Weather Review, Vol. 91, (1963), pp 91.
- [7] Wille, R., "Karman Vortex Streets", Advances in Applied Mechanics, Vol.6, (1960), pp.273-287.
- [8] Ong, L. and Wallace, J., "The Velocity Field of the Turbulent Very Near Wake of a Circular Cylinder", Exp. Fluids, Vol. 20, (1994), pp. 441-453.
- [9] Kravchenko A.G. and Moin P., "Numerical Studies of Flow over a Circular Cylinder  $Re_d*3,900$ ", Physics of fluids, Vol.12, (2000), pp.403-417
- [10] Rogers, S.E. and Kwak, D., "Upwind Differencing Scheme for the Time-Accurate Incompressible Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, Vol.28, (1990), pp.253-262
- [11] Louenco, L., and Shih, C., "Characteristics of the Plane Turbulent Near Wake of a Circular Cylinder", A Particle Image Velocimetry Study, Private Communication, (1993), (data taken from reference 14)
- [12] Hansen, R.P. and Long, L.N., "Large-Eddy Simulation of a Circular Cylinder on Unstructured Grids", AIAA 2002-0982, (2002).
- [13] Hansen, R.P. and Forsythe, J.R., "Large and Detached Eddy Simulations of a Circular Cylinder Using Unstructured Grids", AIAA 2003-0775, (2003).
- [14] Mittal, R., "Large-eddy Simulation of Flow Past a Circular Cylinder". Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University, (1995).
- [15] Beaudan. P. and Moin, P., "Numerical Experiments on the Flow Past a Cylinder at Sub-Critical Reynolds Number". Report No. TF-62, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, (1994).
- [16] 구분국, 박금성, 박원규, 전호환, "Smagorinsky model을 이용한 날개주위의 LES 난류유동해석", 대한조선학회 2003년도 춘계 학술대회 논문집, (2003). pp.198-203.
- [17] 정상희, 박금성, 박원규, "Fractional Step 방법과 Compact Pade 차분화를 이용한 원형 실린더 주위의 난류 유동해석", 한국 전산유체 공학회 지, (2003). (계재확정)