



# Eulerian-Lagrangian 방법에서 입자 및 유동 격자계 분리를 통한 2상 유동의 효율적 계산

박 순 일<sup>\*1</sup>, 이 진 규<sup>\*2</sup>, 장 근 식<sup>\*3</sup>

## Efficient Computation of Two-Phase Flow by Eulerian-Lagrangian Method Using Separate grids for the Particles and Flow Field

S. I. Pak, J. K. Lee, K. S. Chang

When the Eulerian-Lagrangian method is used to analyze the particle laden two-phase flow, a large number of particles should be used to obtain statistically meaningful solutions. Then it takes too much time to track the particles and to average the particle properties in the numerical analysis of two-phase flow. The purpose of this paper is to reduce the computation time by means of a set of particle grid separate to the flow grid. Particle motion equation here is the simplified B-B-O equation, which is integrated to get the particle trajectories. Particle turbulent dispersion, wall collision, and wall roughness effects are considered but the two-way coupling effects between gas and particles are neglected. Particle laden 2-D channel flow is solved and it is shown that the computational efficiency is indeed improved by using the current method

**Key Words:** particle laden two-phase flow, Eulerian-Lagrangian method, particle grid, 2-D channel flow, efficient computation

### 1. 서 론

입자가 혼합되어 흐르는 2상 유동은 공기 이송장치, 미분탄 연소기, 산업분야의 공장 내에서 발생하는 분진을 제거하는 집진장치, 로켓 추진 노즐, 건물 내의 소방 시설인 천정 스프링클러, 자동차 엔진 실린더 내부의 액적 분사 등 많은 분야에서 일어나고 있으며 이러한 장치들의 설계를 위해 유동현상의 파악과 그 해석이 절실하며 이에 따른 실험적, 수치적인 연구가 활발히 진행되고 있다. 입자 혼합 2상 유동의 수치적 해석방법은 기체와 입자의 유동을 모두

연속체로 가정하여 해석하는 Eulerian-Eulerian Method (또는 two-fluid model)과 개개의 입자를 추적하면서 해석하는 Eulerian-Lagrangian Method로 나눌 수 있다.[1]

본 논문에서는 개개의 입자궤적을 추적하면서 입자의 속도 등을 통계적인 방법으로 평균하면서 구하는 후자의 방법에 대해 연구하고자 한다. 이 방법은 기본적 특성상 지배방정식을 완성하기 위한 가정이 필요하지 않으며 또한 입자간의 충돌, 분열 등의 현상을 적용하기가 쉬운 장점이 있다. 그러나 통계적으로 의미 있는 해를 얻기 위해서는 많은 수의 입자들을 유동장 내에 흘려보내어 모두 추적함으로써 계산 시간이 많이 요구되는 단점이 있다. 본 연구는 입자 추적 및 통계적 평균값 계산을 위한 별도의 입자 격자계를 도입함으로써 계산 시간을 줄이는 데 목적이 있다.

\*1 학생회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

\*2 정회원, 국방과학연구소

\*3 종신회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

\*E-mail : paksunil@kaist.ac.kr

## 2. 지배방정식 및 수치해석 기법

### 2.1 지배방정식

#### 2.1.1 기체 유동 지배 방정식

기체 유동은 정상, 비압축성이며 지배 방정식은 시간평균 Navier-Stokes 방정식으로 질량과 운동량에 대한 보존 방정식은 식(1)과 같다.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (\mu + \mu_t) \nabla^2 \bar{u} \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + (\mu + \mu_t) \nabla^2 \bar{v}$$

위의 식에서  $\mu_t$ 는 난류 점성항으로 난류 모델링을 사용하여 결정한다. k- $\epsilon$  난류 모델링에서 난류 점성항은 다음과 같다.

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2)$$

여기서 k와  $\epsilon$ 은 난류 운동에너지와 소산율이며  $C_\mu$ (=0.09)는 상수이다.

난류 지배방정식으로 벽함수(wall function)를 사용한 k- $\epsilon$  model를 사용하였으며 k와  $\epsilon$ 의 방정식은 다음과 같다.

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla k \right) = (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \nabla^2 k + \mu_t \Phi - \rho \epsilon$$

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \epsilon \right) = (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}) \nabla^2 \epsilon + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \mu_t \Phi - \rho C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3)$$

여기서  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$ 는 상수로써 각각 1.0, 1.3, 1.44, 1.92 이며  $\Phi$ 는 아래의 식과 같다.

$$\Phi = \mu_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

#### 2.1.2 입자 운동 방정식

입자 운동 방정식은 Basset, Boussinesq, & Oseen 이 유도한 B-B-O 방정식을 사용한다. 본 연구에서는 기체와 고체의 압력차가  $10^{-3}$ 배 이상차이가 나므로 B-B-O 방정식에서 virtual mass force, Basset force, pressure gradient force에 관련된 항은 무시하고 공기역학적 항력과 중력만을 고려하였고 입자는 구형이라고 가정한다. 그 결과식을 표현하면 다음과 같다.

$$m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho A_p (\vec{u} - \vec{v}_p) |\vec{u} - \vec{v}_p| + m_p \vec{g} \quad (5)$$

여기서  $\vec{v}_p$ 는 입자의 속도,  $\vec{u}$ 는 현재 입자가 위치한 지점에서의 기체 속도이고  $C_D$ 는 항력계수이다. 구형에 대한 입자의 항력계수  $C_D$ 는 Clift et al.[2]이 제시한 다음의 식을 사용한다.

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) & \text{if } Re_p \leq 1000 \\ 0.424 & \text{if } Re_p > 1000 \end{cases} \quad (6)$$

여기서 Reynolds number는 다음과 같이 정의된다.

$$Re_p = \frac{\rho d_p |\vec{u} - \vec{v}_p|}{\mu} \quad (7)$$

위 식(5)를 해석적으로 직접 풀어 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{\vec{u} - \vec{v}_p}{\tau} + \vec{g} \quad (8)$$

여기서  $\tau = \rho_p d_p^2 / 18\mu f$  로서 입자이완시간 (particle relaxation time)이라고 하며,  $f = C_D Re / 24$ ,  $\rho_p$ 는 입자의 밀도이고  $d_p$ 는 입자의 지름이다.

적분 시간동안 기체의 속도가 일정하다고 하고 식(8)을 적분하면 다음과 같다.

$$\vec{v}_p = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}_0) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) + \vec{g} \tau \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)\right] \quad (9)$$

여기서  $v_{p0}$ 는 입자의 초기속도이고  $\Delta t$ 는 시간 간격이다. 식(9)에 의해서  $\Delta t$ 후의 입자속도를 구하고 난 후에 다음 식을 통해서 입자의 위치를 결정하게 된다.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_p \quad (10)$$

## 2.2 수치해석 기법

기체 유동장을 먼저 수치해석한 후 여기에 입자들을 유동장 내로 흘려보내 입자들의 궤적과 속도를 구한다. 이 때 기체 유동 해석을 위한 기체 유동장 격자계와 입자 유동 해석을 위한 입자 격자계를 따로 형성하여 기체 유동장은 기체 유동장 격자계를 사용하여 구하고 입자 운동은 입자 격자계만을 이용하여 계산한다. 입자 격자계의 격자점에서의 기체 유동장 값들은 기체 유동장 격자계의 격자점 값들을 선형 내삽하여 구한다. 본 연구에서는 입자 격자계를 도입함으로써 유동장 내에 띄우는 총입자수를 줄이면서도 통계적으로 의미 있는 입자 유동값을 구할 수 있다는 것을 보여주는데 목적이 있으므로 입자의 기체에 대한 영향(two-way coupling)은 무시하도록

한다.

기체 유동에 대한 수치해석 기법으로는 속도와 압력에 대해 등차(equal order)의 일차원 내삽함수(interpolation function)를 사용한 유한 요소법을 사용하고 속도에 대한 한번의 내연적 예측(implicit predictor)와 두 번의 외연적 보정(explicit corrector)을 하는 PISO(Pressure-Implicit Operator-Splitting) 알고리즘을 사용한다.

입자 유동은 식(5)를 적분하여 속도를 구하고 식(10)을 적분하여 그 위치를 구함으로써 입자를 추적하고 이런 입자들의 유동들을 통계적으로 평균하여 유동장 내에서의 입자 유동장 값들을 구한다. 이런 방법을 라그랑지 법(Lagrangian Approach)이라고 한다. 식(5)에서 기체 속도는 평균속도와 난동 속도로 나눌 수 있다. 난동 속도성분은 DNS (Direct Numerical Simulation)계산을 해서 구해야 하나 이는 실제로 거의 불가능하므로 Gosman & Ioannides[3]이 제안한 eddy interaction model에 근거한 방법으로 구한다. 구체적 방법에 대해서는 아래 항 2.2.1에서 설명하도록 하겠다.

또한 입자는 벽면과 충돌을 하므로 이에 대한 모델링도 필요하다. 이에 대해서는 아래 항 2.2.2에서 설명하겠다.

### 2.2.1 입자의 난류 확산 모델

eddy interaction model은 기체유동장을 eddy들의 연속이라고 가정하여 입자들이 연속된 eddy들을 지나가는 것으로 본다. 그리고 이 eddy들은 등방성(isotropic)을 지녔다고 가정하면 난동속도는 Gaussian 분포를 나타낸다.

기체 평균 속도에 입자가 eddy들을 지날 때 생기는 난동 속도를 더한 기체 속도를 식(5)에 대입하여 입자의 속도를 구함으로써 입자의 난류 확산을 모델링한다.

$$u = \bar{u} + u' \tag{11}$$

$$v = \bar{v} + v'$$

여기서 난동속도  $u', v'$ 는 아래 식(12)와 같이 표준편차가  $\sigma$ 인 Gaussian분포로부터 통계적 절차 또는 몬테카를로 방법에 의해 무작위 추출하여 구하게 된다.

$$\sigma = (2k/3)^{1/2} \tag{12}$$

여기서  $k$ 는 입자가 위치한 지점에서의 기체 난류 운동 에너지이다.

입자는 난류 유동장의 eddy를 만날 때마다 새로운 난동 성분의 영향을 받게 되고 그 때마다 위에서 설명한 방식으로 새로운 난동 속도를 구하게 된다. 그러면 다음으로 생각해야 할 문제가 입자가 turbulent eddy를 지나는데 걸리는 시간이 구하는 것이다. 이런 시간을 구하는 방식은 여러 가지가 있으나 Nichols가 제안한 방식[4]을 따르도록 한다.

$k-\epsilon$  난류 모형으로부터 계산된 난류 운동 에너지와 소산에너지로부터 eddy life time과 eddy length scale를 구하면 다음 식과 같다.

$$t_e = 3C_\mu k / \epsilon \tag{13}$$

$$l_e = 1.65 C_\mu^{3/4} k^{3/2} / \epsilon$$

입자와 eddy간의 상호 작용 시간은 eddy life time과 length scale에 의해 결정된다. 입자가 시간  $t_e$  이상 eddy와 상호 작용하거나 또는 eddy중심과 입자간의 거리가  $l_e$ 보다 크게 되면 입자는 새로운 eddy와 만나므로 새로운 난동 속도를 앞에서 설명한 방식으로 구한다.

### 2.2.2 벽면 충돌 모델

입자가 벽면에 부딪힐 때 입자와 벽면사이의 마찰력은 무시하고 또한 입자는 완전 탄성 충돌하는 것으로 가정한다. 그러나 벽면의 거칠기에 의한 입자 유동의 변화는 상당히 크게 나타나므로 이에 대한 모델링이 필요하다. Sommerfeld & Huber[5]가 제안한 모델을 사용한다.

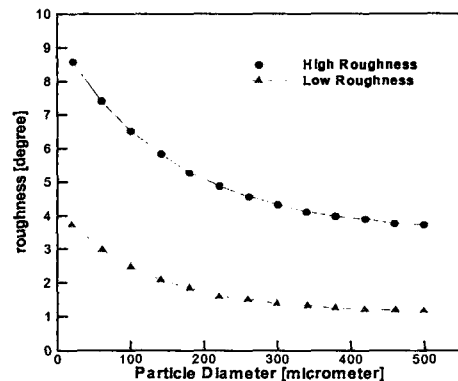


Fig. 1 Values of  $\Delta v$  versus particle diameter

입자의 입사각은 실제 입사각과 벽면 거칠기에 의한 거칠기각(roughness angle)으로 이루어진다고 가정하여 표면 거칠기를 모델링한다. 또한 표면 거칠기각은 표준 편차가  $\Delta v$  인 정규분포(normal distribution)로 근사할 수 있다. 입자의 크기와 표준 편차  $\Delta v$ 의 관계는 Fig. 1의 그래프를 사용한다.[6]

$$\alpha' = \alpha + \xi \Delta v \quad (14)$$

여기서  $\alpha'$ 은 표면 거칠기를 고려한 입자의 입사각,  $\alpha$ 는 실입사각,  $\Delta v$ 는 표면 거칠기각의 표준편차이고  $\xi$ 는 표준 정규분포를 가지는 랜덤 변수이다.

### 3. 수식 해석 결과

#### 3.1 2차원 채널 유동

높이가 35 mm 인 수평 2차원 채널 속에 밀도는  $2500 \text{ kg/m}^3$  이고 직경이 각각  $60 \mu\text{m}$ ,  $100 \mu\text{m}$ ,  $195 \mu\text{m}$  인 입자를 흘려보내는 경우를 수치 해석하였다. 입구에서 기체 평균 속도는  $18.5 \text{ m/s}$  이다. 채널의 길이는 높이의 30배로 하였으며 201\*51 기체 유동 격자계를 사용하였다.

채널 입구에서 기체는 완전 전개된 난류 속도 분포를 주었으며 실험 결과[7]에 근거하여 입자의 유입

체 유동의 흐름의 영향이 적고 또한 벽면에 충돌한 입자들은 계속해서 상하벽면을 충돌하면서 왕복함으로써 입자들이 서로 잘 섞이므로 입자들의 평균속도는 채널 단면에서 거의 비슷하게 된다.

세 가지 경우 모두 벽면 거칠기를 고려했을 때

실험 결과와 좀더 가까워지는 것을 볼 수 있다. 특히 입자의 크기가 작을수록 벽면 거칠기를 고려했

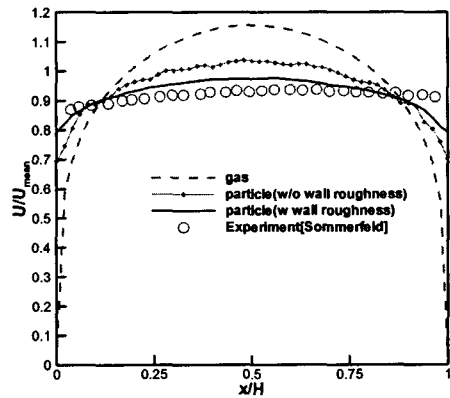


Fig. 3 Vertical profile of velocity( $D_p=100\mu\text{m}$ )

을 때와 그렇지 않을 때의 계산 결과 차이가 심하게 나타난다. 이것은 입자의 크기가 작을수록 벽면 거칠기의 효과가 크기 때문에 나타나는 현상이다. 같은 벽면 거칠기를 가진 벽면이라도 아주 큰 입자의 경우는 그 벽면이 매끈하게 느껴지는 것과 같은 이치라 하겠다. 입자가 거친 벽면에 부딪히게 되면 반사각이 입사각보다 크게 되는 경우가 많다. 이런 현상

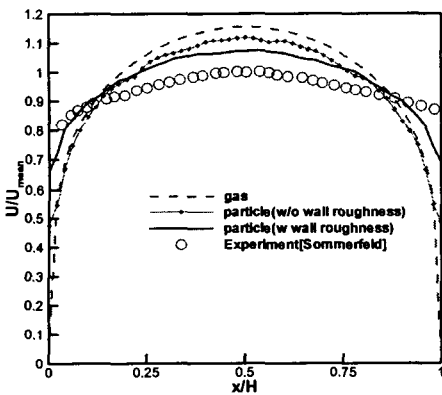


Fig. 2 Vertical profile of velocity( $D_p=60\mu\text{m}$ )

속도는 평균속도에 RMS 속도를 표준 편차로 하는 Gaussian 분포의 입자 난동 속도를 더하였다.

Fig. 2 - Fig. 4은 벽면 거칠기를 고려했을 때와 하지 않았을 때의 결과들을 나타낸다. 우선 입자의 크기가 클수록 입자의 속도는 평평해지는 것을 볼 수 있다. 입자의 크기가 클수록 관성이 커지므로 기

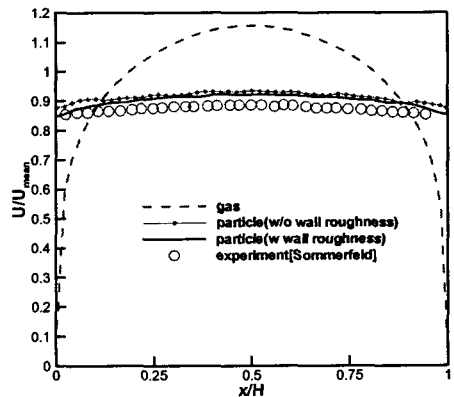


Fig. 4 Vertical profile of velocity( $D_p=196\mu\text{m}$ )

을 그림자 효과(shade effect)라고 한다. 이런 현상으로 인해 벽면과 평행한 입자의 모멘텀은 수직인 방향으로 전달되게 된다. 이로 인해 입자들의 상하 충돌 횟수는 늘어나면서 서로 잘 섞이게 된다. 이런 경향은 Fig. 2 와 Fig. 3 에서 벽면 거칠기를 고려했을 때 입자의 속도 분포가 더 평평해지는 것으로 확인할 수 있다. 입자 크기가 195  $\mu\text{m}$ 인 경우에는 입자 판성이 매우커서 이미 충분히 서로 잘 섞여 있고 또한 입자가 크므로 벽면 거칠기의 효과는 적기 때문에 벽면 거칠기를 고려하지 않았을 때와 거의 비슷한 결과를 보여주고 있다.

### 3.2 입자격자계 도입한 경우

입자 유동에서 입자들의 유동 값은 통계적으로 평균하여 구하므로 정확한 해를 구하기 위해 필요한 입자의 수를 정량적으로 측정할 수 있는 방법이 필요하다. Graham & Moyeed[8]가 이용한 통계학의 신뢰구간 개념을 적용하여 해의 정확성을 정량화하였다. 95%의 신뢰도를 가지고 신뢰구간을 구하면 다음과 같다.

$$\bar{U} - t_{n-1, 0.025} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq U \leq \bar{U} + t_{n-1, 0.025} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

$t_{n-1, 0.025}$  는 입자의 반복계산횟수  $n$ 에 대한 95% 신뢰도의 t-분포 값이고  $S$  는 표본 표준편차이다. 실제 입자 유동 값은 95%의 신뢰도를 가지고 윗 식의 범위에 속한다. 윗 식의 구간이 좁을수록 입자 유동은 통계적으로 정확한 값을 가지므로 신뢰 구간의 길이  $S_{max}$ 가 작을수록 해는 정확해진다.

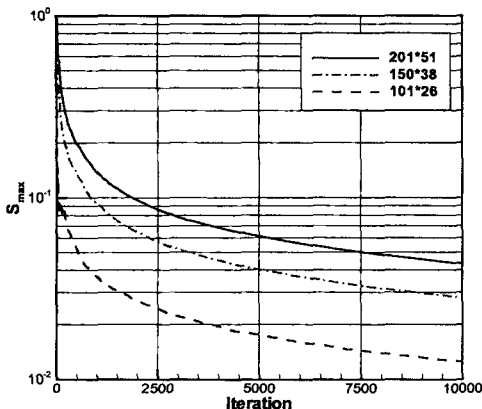


Fig. 5 Confidence interval versus iteration of particle flow calculation

Fig. 5는 201\*51, 150\*38, 101\*26 세가지 종류의 등간격 입자 격자계를 생성하여 수치해석을 했을 때 입자 계산 반복 횟수에 따른 신뢰구간의 크기변화를 나타내었다.

입자의 격자, 즉 제어체적이 클 경우에는  $S_{max}$ 가 빠르게 감소하는 것을 볼 수 있다. 계산횟수의 증가는 입자수를 증가시켜주는 것과 같은 역할을 하고  $S_{max}$ 의 감소는 그만큼 정확한 해를 구한 것을 나타내므로 Fig. 5 는 입자 유동 격자계의 격자를 크게 함으로써 정확한 해를 얻기 위해 필요한 계산 입자수를 줄여 계산 효율을 향상시킬 수 있다는 결과를 보여주고 있다.

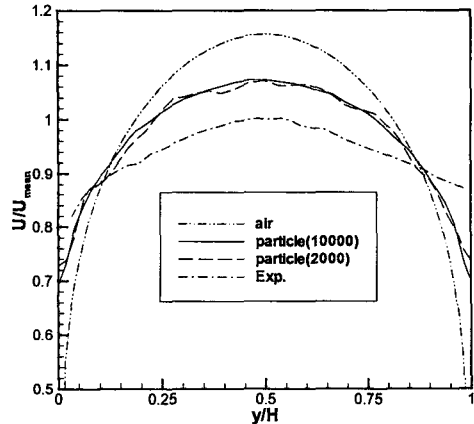


Fig. 6 Vertical profile of velocity ( particle grid : 201\*51)

Fig. 6는 201\*51, Fig. 7는 150\*38, Fig. 8은 101\*26 의 입자 격자를 적용하였을 때 각각 10,000 번, 2,000번의 반복계산에 대한 결과로써 세 경우 모두 비교적 정확한 해를 보여준다. 단지 Fig. 8을 보면 벽면 근처에서 입자 속도가 다소 느려지는 것을 볼 수 있는데 이것은 입자 격자계를 크게 하면서 각 격자점에서의 기체 유동장 값을 선형 내삽함으로 해서 생기는 것으로 판단된다.

Fig. 6 은 입자격자계의 제어체적을 작게 한 경우로 반복 횟수를 2000으로 하게 되면 입자속도분포에 약간이 진동이 생김이 볼 수 있는데 이것은 입자수가 작음으로 해서 생기는 해의 불안정성이다. 그러나 Fig. 8에서 보는 바와 같이 입자 격자계를 크게 했을 경우는 2000번의 반복 계산만으로도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

입자 격자계를 지나치게 크게 하게 되면 기체 유

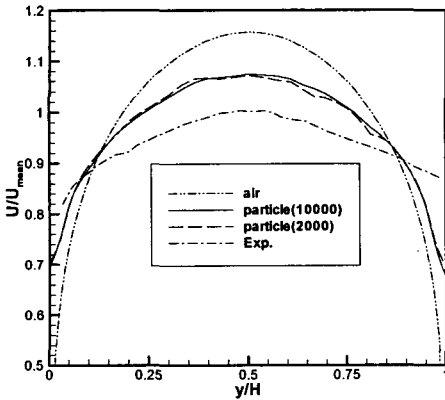


Fig. 7 Vertical profile of velocity ( particle grid : 150\*38)

동장 값의 선형 내삽으로 구한 입자 격자점에서의 기체 유동장 값이 부정확하게 되는 문제를 야기시키므로 적절한 입자 격자계의 선택이 필요하다.

Fig. 5 - Fig. 8의 결과로부터 입자 격자계를 적절한 수준까지 크게 생성시켜 계산하면 적은 수의 입자라도 정확한 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

입자가 섞인 2차원 채널의 2상 유동에 대해서 전산 해석을 수행하였다. 벽면의 표면 거칠기를 고려함으로써 좀 더 정확한 해를 구할 수 있었다. 또한 입자 유동 해석을 위해 별도의 입자격자계를 도입함으로써 적은 반복계산, 즉 입자의 수를 적게 하면서도 비교적 정확한 해를 구할 수 있었다.

입자와 기체간의 상호 영향을 고려하여 계산하는 two-way coupling의 경우 입자격자계를 도입했을 경우 그 영향에 대해 알아보는 것도 필요하다고 판단된다.

#### 후 기

본 연구는 1999.12-2001.11 동안에 한국과학기술원의 BK-21 산학협력과제의 하나로서 포항제철(주)의 지원을 받았다. 동회사의 지원이 없었으면 과제의 시작은 물론 지금까지 저자들에 의한 관련기술의 연구 개발도 불가능했을 것이다. 동회사의 지원에 감사료를 표하는 바입니다.

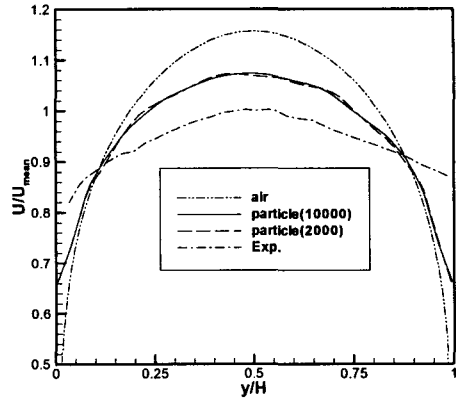


Fig. 8 Vertical profile of velocity ( particle grid : 101\*26)

#### 참고문헌

- [1] Crowe C., Sommerfeld M., and Tsuji Y., *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, CRC Press, (1998).
- [2] Clift, R., et al., *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York, (1973)
- [3] Gosman A.D., Ioannides E., "Aspects of computer simulation of liquid-fuelled combustors", AIAA-81-0323, (1981)
- [4] Kim Y.M., Shang H.M., Chen C.P., "Physical Model Improvement Study in Multi-phase Reacting Flows", NAS8-38609 D.O. 6, (1992).
- [5] Sommerfeld M., Huber N., "Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions", Int. J. of Multiphase Flow, Vol.25, (1999), p.1457-1489.
- [6] Lain S., Sommerfeld M., Kussin J., "Experimental studies and modelling of four-way coupling in particle-laden horizontal channel flow", Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol.23, (2001), p.647-656.
- [7] Kussin J., Sommerfeld M., "Investigation of particle behaviour and turbulence modification in particle laden channel flow", Proc. Internation Congress for Particle Technology, Nuremberg, German, Session 12-046, (2001)
- [8] Graham D.I., Moyeed R.A., "How many particles for my Lagrangian simulation?", Power Technology, Vol.125, (2002), p.179-186