

Lagrangian 보우텍스방법에서의 압력장계산

김 광 수^{*1}, 이 승 재^{*2}, 서 정 천^{*3}

Computation of pressure fields in application of the Lagrangian vortex method

K. S. Kim , S. J. Lee and J. C. Suh

A vorticity-velocity integro-differential formulation of incompressible Navier-Stokes equations is described, focusing on a scheme for calculating pressure fields in application of the Lagrangian vortex method in connection with panel methods. It deals with the dynamic coupling among velocity, vorticity and pressure, and the Helmholtz decomposition of the velocity field. through a comparative study with the Eulerian finite volume method, we provide an extensive understanding of the Lagrangian vortex methods for numerical simulations of viscous flows around arbitrary bodies.

Key Words: vorticity-velocity formulation, pressure, Lagrangian vortex method, panel method, Eulerian finite volume method

1. 서 론

물체 주변의 점성유동장을 수치해석하기 위한 여러 가지 해석법 중에서 Navier-Stokes 식을 primitive 변수로 이산화하는 방법이 가장 대표적이다. 그러나, 강력한 와류유동인 경우, 와도를 기본변수로 하는 것이 속도변수를 이용하는 것보다 유리한 점이 있다. 비관성 및 관성좌표계에서의 지배방정식 형태가 같고 와도가 집중적으로 발생하는 물체 주변에 대하여 한정된 계산영역을 택할 수 있다는 점들이 그 예라고 할 수 있다[1, 2, 3].

특히, 프로펠러와 같이 복잡한 형상을 가지는 물체 주변의 유동해석은 격자생성방식이 매우 중요하나, 또한 많은 어려움으로도 작용하는데, 비압축성 점성 유동장에 대하여, 속도-와도 정식화 형태인 Lagrangian 보우텍스방법은 격자계가 필요없다는 점에서 최근 활발한 연구가 이루어지고 있다. 그러나, Lagrangian 보우텍스 방법을 포함한 대부분의 속도-

와도 정식화를 이용한 수치해석법에서는 압력을 거의 다루고 있지 않다.

본 연구진에 의한 기존 연구에서, 와도, 속도, 압력의 동적연성관계와 속도장의 Helmholtz 분해에 근거한 와도-속도 정식화를 기존의 패널 방법과 연계시키는 미분-적분형의 점성유동해석 방법으로 수치 처리하는 확장된 Lagrangian 보우텍스 방법을 제시한 바 있다[4, 5].

본 연구에서는 Lagrangian 보우텍스 방법을 이용하여 압력장을 계산하는 방법을 제시하고자 한다.

2. Lagrangian 보우텍스방법

2차원 비정상, 비압축성 유동장에서, 보우텍스 방법은 이산화된 와도장을 표현하는 보우텍스 블랍(blob)을 기본요소로 택하고, 블랍이 생성되어 발달되어 가는 과정을 다음과 같이 Lagrangian 개념으로 택한다.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = u$$

*1,*2 학생회원, 서울대학교 대학원 조선해양공학과
(kshiny@hanmail.net, guinepig@hanmir.com)

*3 정회원, 서울대학교 조선해양공학과
(jungshuh@plaza.snu.ac.kr)

N 개의 보우텍스 blob (순환세기 $\Gamma = \omega h^2$) 에 대한 순정함수(η_ϵ)가 도입된 와도장,

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j(t) \eta_\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (2)$$

에 대하여, 순정된 Biot-Savart 적분식을 이용하여 회전성 속도성분을 계산한다.

$$\mathbf{u}_\omega = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \times \Gamma_j \mathbf{k} \quad (3)$$

여기서, $\mathbf{K}_\epsilon(\mathbf{r}, t) = G(|\mathbf{r}|/\epsilon) \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^2$, ϵ 는 순정반경이며, $G(s) = (1 - \exp(-s^2/2))$ 이다. 식 (3)에 의하여 회전성 속도성분이 얻어지고 물체면에서의 비침투조건이 만족되도록 패널 방법을 적용하여 포텐셜 성분을 계산한 후, 입자위치를 갱신한다. 이때 시간 전진은 Adam-Bashforth기법 (혹은 2차 Runge Kutta기법)을 사용한다.

식 (1)에서 확산항은 다음과 같이 입자강도교환 (Particle Strength Exchange)의 이산화식으로 계산한다.

$$\nabla^2 \omega \approx \frac{2}{\epsilon^2} \int \eta_\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\omega(\mathbf{y}) - \omega(\mathbf{x})) d\mathbf{y}$$

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{2\nu S}{\epsilon^2} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j - \Gamma_i) \eta_\epsilon(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (4)$$

여기서, S 는 보우텍스 블랍의 면적 ($= h^2$), Γ 는 순환세기이다. 식 (4)를 사용할 때, 안정성과 효율을 감안하여 계산 입자로부터 일정거리(보통 5ϵ) 내에 위치한 주변입자에 한하여 합산한다. 계산 입자가 경계면 근처에 위치한 경우에는 주변 입자를 경계면에 관한 경상점(image point)에 가상 입자를 추가시켜 그 영향을 포함시킨다. 구해진 와도플럭스는 경계면으로부터 식(1)의 확산항에 해당하는 와도입자가 받는 순환의 변화량으로 산정된다. 보다 자세한 내용과 3차원 확장 정식화에 관련된 내용은 참고문헌[6, 7, 8]를 참고하기 바란다.

3. 압력방정식

2차원 비압축성(밀도 $\rho=1$ 로 택함)점성유동장에서 Poisson 방정식 형태의 압력방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \left(p + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right)$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \cdot \nabla \times \nu \boldsymbol{\omega}$$

벡터등식에 따라 식을 정리하면, 최종 압력방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + p \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$$

만약, 비점성, 비회전성의 포텐셜 유동인 경우 위 식은 베르누이 방정식이 된다. 3차원 유동이라 할지라도 동일하게 적용되며, 다음의 보존형태로 표현이 된다.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + p \right) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$$

계산의 편의를 위해 전체 압력수두를 $H = p + 1/2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ 로 표현하고, 압력방정식과 N-S 식의 법선방향 힘 평형 성분인 동적압력경계조건을 나타낼 수 있다.

$$\cdot \text{압력방정식 } \nabla^2 H = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$$

$$\cdot \text{동적압력경계조건}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \right)$$

$$- \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega})$$

2차원에 대한 Green 스칼라등식과 2차원 Green함수의 특성을 이용하면 다음 식이 유도된다.

$$\phi(\mathbf{x}) = \oint \left[\phi \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} G \right] dl_y$$

$$+ \int_s (\nabla^2 \phi) G dS_y, \quad G = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (5)$$

식 (5)에 ϕ 대신 압력수두 H 를 이용하면,

$$H(\mathbf{x}) = \oint_c \left[H \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial H}{\partial n} G \right] dl_y + \int_s (\nabla^2 H) G dS_y$$

다. 다시 압력방정식과 동적압력경계조건을 대입하여 정리하면 식 (6)을 얻을 수 있다.

$$H = \oint_c H \mathbf{n} \cdot \nabla G dl - \oint_c \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dl$$

$$+ \oint_c \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) G dl \quad (6)$$

$$+ \int_s \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dS$$

식 (6)의 두 번째항 $\oint_c \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dl$ 은 고착조건에 의해서 경계면에서 $\mathbf{u} = 0$ 이고, 무한원방에서 와도값 $\boldsymbol{\omega} \approx 0$ 이므로 무시될 수 있다. 물체표면을 여러 패널로 나누고, 각 panel에서는 압력수두 H 가 일정하다고 가정하면, 식 (7)과 같이 이산화될 수 있다.

$$H_i = \sum_j \left[H_j \oint_{c_j} \mathbf{n} \cdot \nabla G dl + \oint_{c_j} \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) G dl + \sum_k \int_{s_k} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dS \right] \quad (7)$$

각 패널에서 접선 방향의 와도변화가 일정하다고 가정하면, 식 (7)의 두번째 적분항에서 접선방향의 와도변화를 다이폴의 세기 σ 로 나타내고, 적분기호 밖으로 나올 수 있다. 포텐셜 유동에서 패널 방법으로 속도를 구하는 것과 유사한 방법으로 다음과 같이 행렬식이 구성된다.

$$\left. \begin{aligned} H_i &= \sum_j (A_{ij} H_j + \sigma_j C_{ij}) + \sum_k S_{ik} \\ A_{ij} &= \int_{c_j} \mathbf{n} \cdot \nabla G dl, \quad G = \frac{1}{2\pi} \ln r \\ \sigma &= \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \\ C_{ij} &= \int G dl \\ S_{ik} &= \int_{s_k} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dS \\ \therefore \sum_j (\delta_{ij} - A_{ij}) H_j &= \sum_j (\sigma_j C_{ij}) + \sum_k S_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

계산영역에서 와도와 속도분포를 정확히 알고 있다면, H 는 식 (8)에서 역행렬을 취하여 간단히 구할 수 있다. A_{ij} , B_{ij} 선적분 결과는 간단한 연산을 통해 쉽게 구할 수 있다. S_{ik} 는 아래와 같이 정리될 수 있다.

$$S_{ik} = \int \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dS = \oint \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dl - \int (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla G dS \quad (9)$$

앞서 말한바와 같이, 식 (9)에서 첫 번째 항인 $\oint \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) G dl$ 은 고착조건에 의해서 무시될 수 있다.

$$S_{ik} = - \int (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla G dS \quad (10)$$

식 (10)에 라그랑지안 보오텍스 방법에서 이용한 이산화된 와도장 식 (2)를 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \left(\nabla G = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \right) \\ \int (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla G dS \\ = \sum_{i=1}^N \frac{u_y \Gamma_i (x-x_i)}{|\mathbf{r}|^2} \int \eta_i dS - \sum_{i=1}^N \frac{u_x \Gamma_i (y-y_i)}{|\mathbf{r}|^2} \int \eta_i dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{u_y \Gamma_i (x-x_i) - u_x \Gamma_i (y-y_i)}{|\mathbf{r}|^2} \right] \int_0^R \int_0^{2\pi} \eta_i r dr d\theta \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{u_y \Gamma_i (x-x_i) - u_x \Gamma_i (y-y_i)}{|\mathbf{r}|^2} \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

이 다. 매 시간간격에서 갱신된 와도입자들의 세기와 속도를 식 (7)-(11)에 적용함으로써 압력장을 구할 수 있다.

보다 자세한 내용 및 3차원 확장 정식화에 관련된 내용은 참고문헌[8]을 참조하기 바란다.

4. 유동해석 결과

4.1 2차원 실린더 주위의 압력장

본 수치해석 기법을 순간적으로 출발하는 2차원 실린더 주위의 점성유동해석문제에 적용해보았다. 이 문제는 단순하고 독특한 형상이면서도 복잡한 유동 특성을 포함하고 있기 때문에, 수치기법 개발시 검증용 기준 문제로서 적합하다.

본 연구진에 의한 기존 연구에서, 와도, 속도, 압력의 동적연성관계와 기존의 패널 방법과 연계시키는 미분-적분형의 점성유동해석 방법으로 격자계를 가지는 Eulerian 유한체적법을 정립하고 검증한 바 있다[8, 9, 10]. 본 연구에서는 Lagrangian 보오텍스 방법을 이용한 압력장 계산결과를 Eulerian 방법에서의 압력장 계산 결과와 서로 비교하기로 한다. 계산에 사용된 입력변수와 와도장, 속도장 결과는 참고문헌[4]와 동일하므로 본 연구에서는 생략하기로 한다.

Fig. 1은 레이놀즈 수 550일 때, 현재 수치해석 기법과 Eulerian 기법으로 계산된 물체표면에서의 압력값을 비교한 그림이다. 비슷한 결과를 얻었으나, Lagrangian의 결과에서 최대, 최소값이 조금 작게 나타나고 있다. Fig. 2 와 Fig. 3 은 각각 Lagrangian 기법과 Eulerian 기법으로 계산된 압력 contour의 결과이다. 실린더 후류에서 보오텍스 생성으로 인한 낮은 압력장 생성 등과 같이, Lagrangian방법의 결과에서 전반적인 경향은 Eulerian 방법의 것과 거의 유사하나, 물체 앞과 뒤 쪽에서의 압력 contour의 형상이 다소 다르게 나타나고 있다. 원인으로서는 앞서 설명한 식 (9)의 S_{ik} 항의 계산에서, Eulerian 기법과 현재 기법의 결과값 차이에 있다. S_{ik} 는 블랍의 속도, 와도, 그리고 순정

함수를 갖고 계산을 수행하게 되는데, Lagrangian 보오틱스 방법에서는 N개의 입자들이 물체 표면위로 잘 정렬되지 못하고, 임의의 위치에서 입자들의 대류 및 확산이 수행되며, 따라서 물체 표면 와도값 계산시 주파수 노이즈가 포함되게 된다. 다소 매끄럽지 못한 와도장의 분포가 압력장 계산에 영향을 끼치고 있으며, 이것이 Eulerian 계산결과와의 미묘한 차이를 일으키는 원인으로 생각된다.

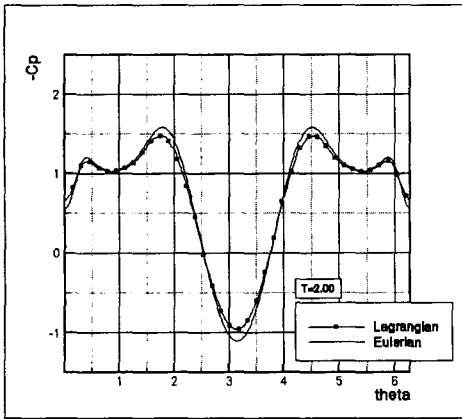


Fig.1 Comparison of $-C_p$ on Body Surface for $Re=550$, $T=2.00$

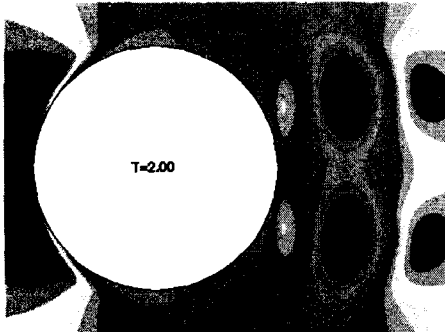


Fig.2 Pressure Contour for $Re=550$, $T=2.00$ (Lagrangian Method)

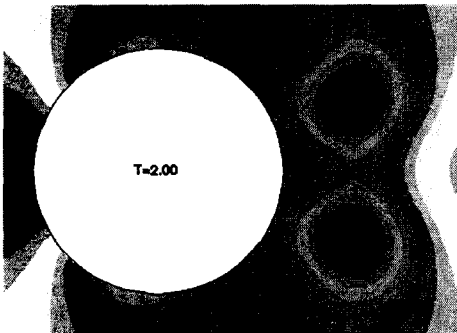


Fig.3 Pressure Contour for $Re=550$, $T=2.00$ (Eulerian Method)

4.2 3차원 구 주위의 압력장

3차원 유동문제에 대한 수치 정식화는 stretching 항 등 몇 가지 사항만 고려하면 2차원 정식화에서 직접 확장이 가능하다. 2차원 문제에서와 마찬가지로 3차원 문제의 검증문제로서 낮은 레이놀즈수를 가지는 구 주위의 유동 문제를 택하였다. 낮은 레이놀즈수 유동을 택한 이유는 Creeping 유동(Stokes flow) 문제와 같이 해석해가 존재하고, 레이놀즈수 200 이하의 유동은 축방향 대칭성을 유지하므로 계산부담이 비교적 적은 편이며, 다른 수치해석 결과와도 비교가 용이하기 때문이다[11]. Fig. 5는 직경이 1인 구의 표면에 계산격자를 생성하고, 계산 영역을 나타낸 그림이다.

계산에 사용된 레이놀즈수는 $Re=1$, $Re=50$, $Re=100$, 3가지 경우에 대하여 수행하였다. $Re=1$ 인 경우, Stokes flow의 해석해와 비교하였고, $Re=50$ 과 $Re=100$ 의 경우 Johnson & Patel[11]의 수치 결과와 압력을 중심으로 비교하였다.

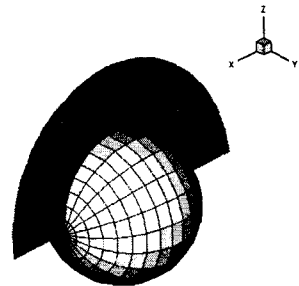


Fig. 4 Sphere discretization and computational domain for axi-symmetric flow

case 1: $Re=1$

Fig. 5는 물체표면에서의 압력 계수를 Stokes flow의 정상해석해와 비교한 그림이다. 그림에서 x축의 θ 는 실린더 후류면에서 시계반대 방향으로의 각도값이다. 계산 시간이 증가할 수록 해석해로 수렴하는 경향을 잘 나타내고 있다. 본 수치 기법을 통한 해석결과가 완전히 정상상태로 도달하지 못한 사실을 고려하면 비교적 만족스런 결과를 보이고 있다. Fig. 6은 압력장을 해석해와 비교한 그림이다. 역시, 계산 결과가 정상상태에 도달하지 못하였기에 직접 비교가 불가능하지만, 낮은 레이놀즈수를 가지는 유동이 정상상태에 이르는 시간이 짧다는 점을 고려하면, 유사한 경향을 보인다고 할 수 있다.

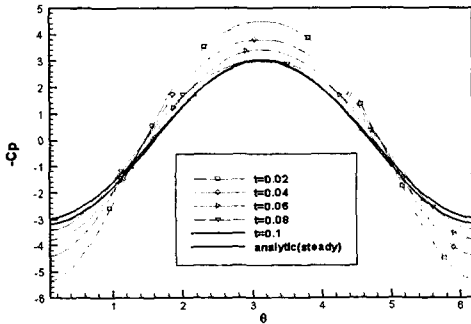


Fig.5 Comparison of the computed pressure coefficient at body surface with the solution of Stokes flow for Re=1

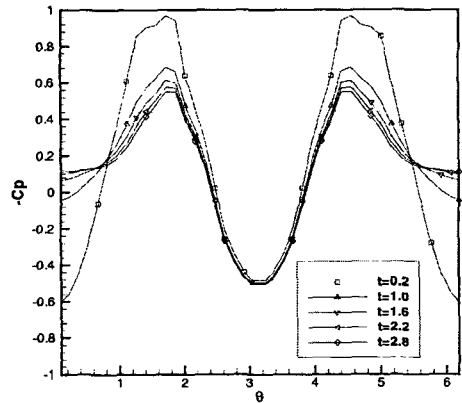


Fig.7 Pressure coefficient at body surface at various instants for Re=50

Analytic Pressure Contour Present calculation(t=0.1)

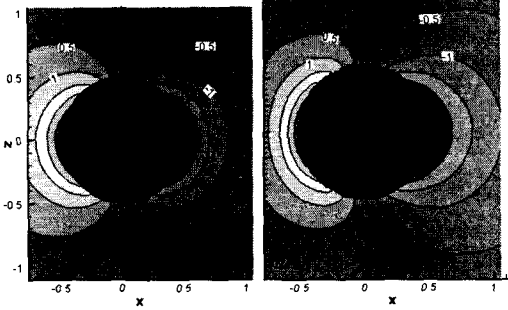
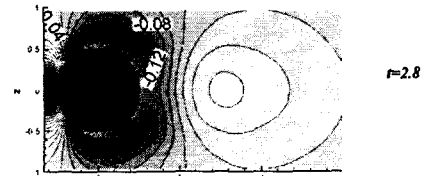


Fig.6 Comparison of the pressure field with the solution of Stokes flow for Re=1



Johnson & Patel(1999) steady state

Fig.8 Comparison of the computed pressure field with the numerical solution of Johnson & Patel for Re=50

case 2: Re=50

Fig. 7은 레이놀즈 수가 50일 때, 물체 표면에서의 시간에 따른 압력계수 분포의 변화를 나타낸 그림이다. 시간이 흐를수록 압력계수가 수렴하는 양상을 잘 보이고 있다. Fig. 8은 압력장을 Johnson & Patel[11]의 정상 수치해와 비교를 한 그림이다. 같은 레벨의 압력계수의 분포가 일부 다른 양상을 띠고 있지만, 앞서 지적했듯이, 본 수치기법의 결과가 아직 정상 상태에 도달하지 못한 것을 감안하면 크게 벗어난 결과를 나타낸 것은 아니라고 생각한다. 레이놀즈수가 약 20 이상일때 실린더 후류에서 separation으로 인한 보텍스가 생성이 되기 때문에 실린더 어깨부근에서 낮은 압력 분포를 이루고 있다.

case 3: Re=100

레이놀즈 수 100일 때의 압력장 계산 결과가 Fig. 9 와 Fig. 10 에 나타나 있다. 이 경우는 레이놀즈수 50일 때와 크게 다른 점은 없다. 다만 레이놀즈수가 커질수록 정상상태에 도달하는 시간이 많이 걸리기 때문에 계산을 좀 더 오랫동안 수행을 하였다. Fig. 9는 물체 표면에서의 압력계수 분포를 나타낸 그림이고, Fig. 10은 압력장을 Johnson & Patel[11]의 결과와 비교한 그림이다. 역시 separation에 기인한 보텍스의 생성으로 말미암아 실린더 후류면 어깨부근에서 낮은 압력분포를 이루고 있다.

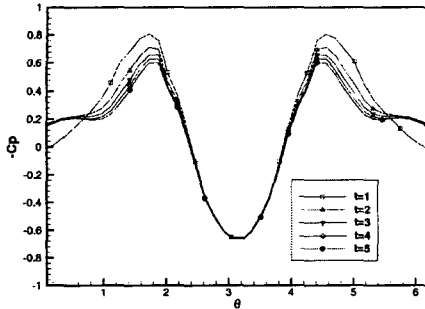


Fig.9 Pressure coefficient at body surface at various instants for $Re=100$

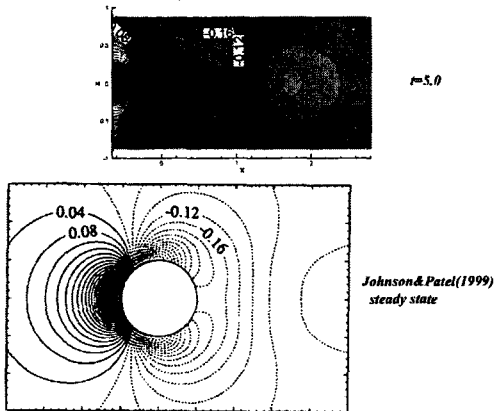


Fig.10 Comparison of the computed pressure field with the numerical solution of Johnson & Patel for $Re=100$

5. 결론

본 연구에서는 속도-와도 정식화에서, 특히 Lagrangian 보오텍스 방법에서 거의 다루고 있지 않은 압력변수에 대하여, 압력방정식을 기존 포텐셜 유동에서 잘 정립되어 있는 패널기법을 혼용하여 수치 처리하는 방법을 제시하였다. 본 수치기법을 검증하기 위하여 2차원 실린더와 3차원 구 주변의 압력장을 기존의 결과와 비교해 보고, 본 기법의 타당성을 확인하였다. 이는 속도-와도-압력 세가지 변수를 모두 고려하는 개선된 Lagrangian 보오텍스 방법이 어느 정도 정립이 되었음을 의미하고 있으며, 앞으로 난류 모델링과 3차원 유동문제에서의 수치가속화 기법에 대하여 좀더 연구할 계획이다.

후 기

이 논문은 2003년도 한국과학재단의 첨단조선공학 연구센터과제와 학술진흥재단 중점연구소 과제와 연

관하여 연구되었음.

참고문헌

- [1] Lighthill, M.J., Introduction, Boundary layer theory, *Laminar boundary layers*, edited by J. Rosenhead, Oxford univ. press, New York (1963).
- [2] Wu, J.Z. and Wu, J.M., "Introductions between a solid surface and viscous compressible flow field," *J.F.M.* Vol. 254 (1987), p.183-211.
- [3] Speziale, C.G., "On the advantage of the vorticity-velocity formulation of the equations of fluid dynamics," *J.C.P.* Vol. 73, (1987), p.476-480.
- [4] 김광수, 이승재, 서정천, "와도-속도 정식화에서 Lagrangian 보오텍스법과 유한체적법의 비교," *전산유체공학회 추계학술대회(2002)*, p.47-52.
- [5] 서정천, 김광수, 이승재, "점성유동해석을 위한 와도방법의 고찰," *대한조선학회 추계학술대회(2002)*, p.514-519
- [6] Degon, P. and Mas-Gallic, S., "The weighted particle method for convection diffusion equation," *Math. Comput.*, Vol. 53, (1989), p.485-507.
- [7] Ploumhans, P., Winkelmann, G.S., Salmon, J.K., Leonard, A. and Warren, M.S., "Vortex methods for direct numerical simulation of three dimensional bluff body flows: Application to the sphere at $Re=300, 500$ and 1000 ," *J.C.P.*, Vol. 178, (2002) p.427-463.
- [8] 김광수, "A vorticity-velocity-pressure formulation for numerical solutions of the incompressible Navier-Stokes equations," 박사학위 논문, 서울대학교 (2003).
- [9] Suh, J.C. and Kim, K.S., "A vorticity-velocity formulation for solving the two dimensional Navier-Stokes equations," *Fluid Dyn. Res.* Vol. 25, (1999), p.195-216.
- [10] 김광수, 서정천, "와도를 기저로한 초기 순간 출발하는 실린더 주위의 점성유동해석," *대한조선학회 논문집*, Vol. 35, (1998), p.1-10.
- [11] Johnson, T.A. and Patel, V.C., "Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300," *J.F.M.*, Vol. 378, (1999), p.19-70.