



임의의 비정렬 격자계에서의 국지적 선형 재구성 기법

이 경 세^{*1}, 백 제 현^{*2}

A Locally Linear Reconstruction scheme on arbitrary unstructured meshes

K. S. Lee and J. H. Baek

A field reconstruction scheme for a cell centered finite volume method on unstructured meshes is developed. Regardless of mesh quality, this method is exact within a machine accuracy if the solution is linear, which means it has full second order accuracy. It does not have any limitation on cell shape except convexity of the cells and recovers standard discretization stencils at structured orthogonal grids. Accuracy comparisons with other popular reconstruction schemes are performed on a simple example.

Key Words: 재구성기법(reconstruction scheme), 유한체적법(finite volume method), 비정렬격자(unstructured mesh)

1. 서 론

전산유체역학이 초기의 학문적인 영역에서 벗어나 복잡하고 실용적인 문제에의 적용으로 발전하면서, 양질의 격자 생성작업은 정교화된 격자생성 도구들의 성능이 향상되어 왔음에도 불구하고 전체적인 해석작업의 상당 부분을 차지하는 노동집약적이고 많은 경험을 요구하는 과정으로 남아 있다. 형상의 복잡도가 증가함에 따라 멀티블록 방법등을 통해 정규격자를 사용할 수 있으나, 현재와 같이 전체 시스템의 유동장이 점점 더 주된 관심사가 되어가고 있는 상황에서는 멀티블록 형태의 정렬격자를 사용하여 격자를 제작하는 데 있어 과거보다 더욱 많은 노력이 요구되고 있다. 이런 이유로 인해 오래 전부터 비정렬격자를 사용한 전산유체해석에 대한 연구는 꾸준히 진행되어 왔다.

그러나, 비정렬격자의 이산화과정이 정렬격자에 비해 가변적이고 복잡하며 심지어 정확도에 있어서도 상대적으로 열세에 있다는 점은 비정렬격자의 사

용을 어렵게 만드는 요인이다. 이에 현재까지 다양한 방법론들이 연구되어 왔다. 2차 정확도를 목적으로 하는 경우 최소자승법 계열의 방법[1][2], Inverse distance weighting 방법[3], Inverse area weighting 방법[4], FEM에서와 같이 선형 shape function을 사용하는 방법[5], Laplacian weighting 방법[6], Pseudo-Laplacian weighting 방법[7][8], Gauss 정리를 이용한 방법[9]등이 있다. 그러나 비정렬격자에서의 유동해석에 관한 많은 연구들이 정상 유동장의 해석에 국한되는 경우가 많아 DNS나 LES와 같은 높은 정도를 요구하는 분야에서는 적용하기 곤란한 실정이다. 따라서, 비정렬격자를 이용한 유동해석을 보다 범용적으로 사용하기 위해서는 비정상 유동해석을 위한 고정도의 이산화 기법의 개발이 필수적이다.

본 연구에서는 비정렬 격자의 cell-centered 유한체적법에서 완전한 2차 정확도와 함께 비정상 해석을 위한 행렬식을 얻기에 용의한 새로운 재구성 기법을 개발하고, 열전도의 확산이나 Navier-Stokes 방정식의 점성항등의 형태로 다양한 물리현상의 지배방정식에 자주 등장하는 Laplacian operator의 이산화를 그 일례로서 적용하여 기존의 방법들인 Inverse distance weighting 방법 및 Laplacian

*1 학생회원, 포항공과대학교 대학원 기계공학과

*2 종신회원, 포항공과대학교 기계공학과

*E-mail : jhbaek@postech.ac.kr

weighting 방법과 정확성을 비교한다.

2. 본론

2.1 재구성 방법의 필요성

유한체적법은 보존형의 지배방정식을 제어체적에서 적분하여 그 표면에서의 플럭스들의 관계식을 통해 지배방정식을 이산화하는 방법이다.

일반적으로 제어면에서의 변수의 분포는 이차 정확도를 갖는 선형근사가 가장 선호된다. cell-centered 유한체적법에서는 대개의 경우 셀 중심의 값과 vertex의 정보를 통해 변수의 분포를 근사화하여 셀의 각 제어면의 질량중점에서의 값을 구하기 때문에 기존의 정보인 셀 중앙의 값들로 vertex들의 값을 재구성해야할 필요성이 있다.

2.2 재구성 방법들

본 절에서는 비교대상이 되는 두가지 재구성 기법을 먼저 간단히 소개하고 개발된 국지적 선형재구성기법(Locally Linear Reconstruction;LLR)을 설명한다. 마지막으로 위의 세 방법을 통해 vertex에 재구성된 변수값으로 구배를 재구성하는 공통된 방법을 설명한다.

2.2.1 재구성 기법의 조건

재구성은 내삽법의 일종이므로 내삽법이 가져야 하는 특성들 또한 지니고 있어야 한다. 먼저 상수 field에서 정확해야 하므로 가중치인 계수들이 합이 1이어야 한다.

$$\sum_i C_i = 1 \quad (1)$$

또한 2차의 정확도를 목적으로 할 때 overshoot이나 undershoot을 방지하기 위해 재구성 값이 재구성에 사용된 값들의 최대값을 초과하거나 최소값보다 작아져서는 안된다. 이를 위해서는 모든 재구성 계수가 양이어야 한다(positivity). 즉,

$$C_i \geq 0 \text{ for all } i \quad (2)$$

물론, 계수가 음이 되더라도 특별한 문제가 없다면 사용할 수 있으나 급격한 구배의 변화가 있는 곳

에서의 과도한 오차가 발생할 가능성이 있으며, 압축성 유동장의 해석과 같은 상황에서는 압력이나 밀도가 음이 되는 문제가 생길 수 있으므로 보통 이러한 boundness 특성은 가능하면 만족하는 것이 바람직하다.

2.2.2 Inverse Distance Weighting(IDW)

자주 사용되는 재구성 방법이며 vertex 주위의 셀 중심값에 vertex와 셀 중심간의 거리의 역수를 가중치로 하여 재구성하는 기법이다[3].

$$\phi = \left(\sum_i \frac{\phi_i}{r_i} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{r_i} \right) \quad (3)$$

이 방법은 매우 단순하며 구현이 쉽고 계수가 항상 양수이므로 재구성의 boundness가 확실히 보장되는 장점이 있으나, 정렬격자와 같은 특정 격자에서만 이차 정확도를 보장하며 보통의 경우 일반적인 격자에서는 대략 1.85정도의 일차 정확도와 이차 정확도의 사이의 수렴도를 갖는다고 알려져 있다. 이와 유사하게 거리의 역수 대신 주변셀의 면적의 역수로 가중평균하는 방법도 있으나 특성은 IDW와 비슷하다.

2.2.3 Laplacian weighting(LW)

Laplacian weighting[6]은 물리적인 모델로 설명하자면 vertex 주위의 셀 중앙을 잇는 선으로 구성된 재구성 cell을 해석 영역으로 하고 경계면을 따라 구간별로 선형적인 온도분포를 갖는 온도장해석 문제로 치환해서 생각할 수 있다.

재구성 관계식의 도출과정의 단순화를 위해서 Fig.1과 같이 제어면의 두점과 재구성지점을 꼭지점으로 하는 삼각형들로 이루어진 가상적인 격자를 구성하고 재구성점을 제외한 외곽의 vertex들의 값을 경계조건으로 하면 재구성점과 경계조건으로 사용된 주위 셀들의 값의 관계를 얻을 수 있다. 유도의 편리함을 위해 선형 shape function을 사용하는 FEM을 이용해 재구성 관계식을 얻을 수 있다.

Fig.1에서 1점을 재구성점이라고 할 때 2,3점은 가상적인 온도장 문제의 경계조건이 된다. 이 요소에 대해서만 이산화를 하여 세점의 관계식을 얻으면 다음과 같다[9].

$$l_2^2 T_1 + (l_2 \cdot l_3) T_2 + (l_1 \cdot l_3) T_3 = 0 \quad (4)$$

위 식은 여러개의 삼각형 요소 중 하나에 관한 식이므로 모든 요소들에 대한 관계식의 합이 최종적인 재구성 관계식이 된다.

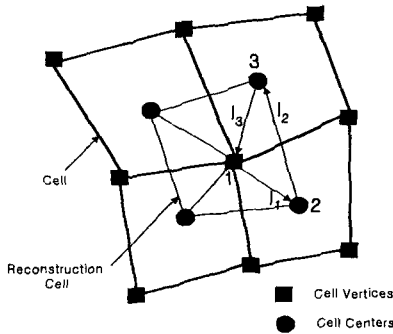


Fig. 1 4개의 삼각형 요소로 이루어진 재구성 셀

2.2.4 Locally Linear Reconstruction(LLR)

2차원 격자의 경우 3개의 선형 제약조건이면 해의 3차원적인 평면을 구성할 수 있다. 따라서 2차 정확도의 해의 재구성에서, 재구성셀이 4각형이상인 경우 1개 이상의 여분의 제약조건이 있는 상황이므로, 재구성 방법에 따라 선형 근사를 위한 많은 근사 관계식이 존재할 수 있다. LLR은 셀의 vertex에 대한 재구성 셀이 어떤 형태이던 간에 늘 하나 이상의 3점으로 이루어진 조합을 만들 수 있다는 사실에 기반한다. 조합이 다분히 임의적이 될 수 있지만, Fig.2와 같이 주어진 셀과 재구성하고자하는 vertex에 인접한 셀의 두 면을 각각 공유하는 두 개의 이웃 셀의 중점을 이러한 조합으로 삼는다. Fig.2는 재구성 셀이 4각형인 경우의 4개의 가능한 set 중 하나를 표현한 것이다. 1점은 주어진 셀의 중점이며 2,3점이 이와 인접한 두 셀의 중점이다.

1점에서의 구배를 $\nabla\phi$ 라 할 때, 2차의 에러항을 무시하면 다음과 같은 관계식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla\phi \cdot l_1 &= \Delta\phi_1 \\ \nabla\phi \cdot l_2 &= \Delta\phi_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{여기에서, } \Delta\phi_1 &= \phi_2 - \phi_1 \\ \Delta\phi_2 &= \phi_3 - \phi_1 \end{aligned}$$

위 두 식은 동시에 만족되는 선형식이므로 행렬의

형태로 표현할 수 있으며 다음과 같이 얻어진다.

$$[L][\nabla\phi] = [\Delta\phi] \quad (6)$$

여기에서 $[L]$ 는 순수하게 방향벡터로 인한 메트릭 항만을 포함하며 두 방향 벡터가 평행하거나 적어도 하나가 0인 경우가 아니면 역행렬을 가지므로 $[\nabla\phi] = [L]^{-1}[\Delta\phi]$ 으로 1점을 기준으로 한 구배를 구할 수 있다.

재구성점인 p점에서의 값은 1점을 기준으로 역시 같은 정확도로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\phi_p^1 = \phi_1 + r_1 \cdot \nabla\phi_1 + O(h^2) \quad (7)$$

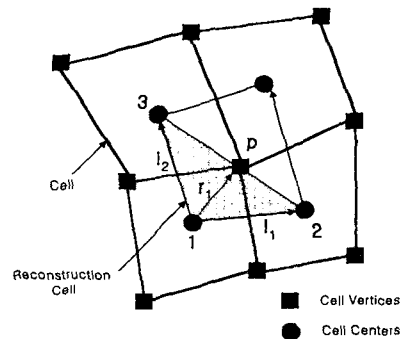


Fig. 2 재구성을 위한 조합들 중의 하나

위와 같은 재구성을 가능한 조합 모두에서 행하고 (Fig.2에서는 재구성셀에서 4개의 조합을 만들 수 있다.) 이들의 가중평균을 취하면 최종적인 p점에서의 재구성 관계식을 구할 수 있으며 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\phi_p = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_i w_i \phi_p^i \quad (8)$$

여기에서 w_i 는 각 재구성 삼각형들의 최종적인 재구성값에 대한 기여도의 가중치이며 단순히 1을 사용해도 무방하지만 면적이나 삼각형의 각점과 재구성점 간의 거리들의 곱의 역수등을 선택할 수도 있다.

그러나 약간의 전개를 거치고 난 후 각 vertex의 계수에 대해 살펴 보면, 재구성을 위한 삼각형 내에

재구성점이 포함되지 않으면 계수가 음이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 계수들의 positivity를 보장하기 위해서는 재구성 삼각형 중 재구성점을 포함하는 삼각형에 대한 것만 선택적으로 취하고 외삽을 하게 되는 삼각형들의 기여는 버리거나 대폭 가중치를 낮추는 방법을 사용하여야 한다. 양질의 격자에서는 이러한 방법만으로도 충분히 전 영역에서 재구성의 positivity를 만족시킬 수 있으나 완벽한 방법은 아니다.

LLR의 효과적인 구현을 위해서는 재구성셀을 vertex-wise로 구성하고 재구성 관계식을 얻기보다는 cell-wise로 각 셀의 vertex들로의 재구성 기여를 전 셀에 대해 계산한 후 최종적으로 주변 셀로부터 얻어진 기여를 합산하는 것이 더 용의하다. cell-wise의 방식은 셀의 형태가 이미 알려진 정보이기 때문에 임의적일 수 있는 재구성셀의 형태에 대한 새로운 정보를 추출해야할 필요가 없으며 임의의 형태를 가진 격자에서도 구현이 쉬워진다.

이때, 이산화된 행렬을 얻기 위해 재구성 관계식을 기억장소에 저장해야 하고 구배의 재구성을 위해 심볼릭 연산을 해야 하지만 실질적인 해석의 과정과 완전히 분리될 수 있는 부분이므로 크게 문제가 되지 않는다.

2.2.5 셀 표면의 구배 재구성 방법

전술한 세 방법들로부터 얻어진 vertex 값들을 바탕으로 셀 표면에서의 구배의 재구성 기법은 앞서 LLR기법에서 국지적인 구배를 구하던 방법과 동일한 방법을 사용한다. 즉 이차원의 경우를 예로 들었을 때, Fig.3과 같이 한면에 접한 양쪽의 셀 중앙 값과 표면의 양단의 재구성된 vertex값 4개를 기반으로 하여 2개의 서로 독립적인 특정방향으로의 구배를 구하고 이를 통해 구배 벡터를 구한다.

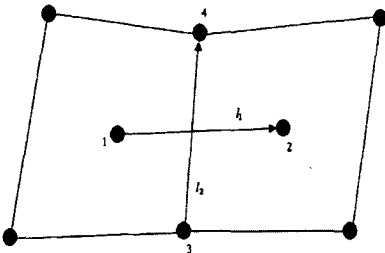


Fig. 3 셀 표면에서의 구배 재구성을 위한 두 방향

2.2.6 경계조건의 구현

본 연구에서는 경계조건을 만족시키기 위해 경계면 안쪽에 가상셀을 사용하였다. 가상셀은 가상셀과 경계셀의 중심간의 중점이 경계면에 놓이도록 가상셀을 위치시키는 방법으로 얻어진다.

경계면에 놓여 있는 vertex들은 가상셀을 포함하여 재구성된다. 따라서 앞서 설명한 세 방법은 재구성 관계가 모두 다르므로 경계조건을 구현하기 위한 이산화식 또한 서로 다른 형태를 지니게 된다.

3. 계산결과

정확도를 테스트하기 위한 해석영역은 2차원 원형이며 미세화를 통한 수렴율을 측정하기 위해 사각형 셀들로 이루어진 비정렬 격자를 만들었다. 미세화는 사각형셀의 각 면을 이등분하여 4개의 사각형으로 분할함으로써 미세화하며, 초기 격자는 Fig.6과 같이 420개의 셀로 이루어져 있다. 미세화는 3단계까지 총 4개의 격자를 대상으로 수치실험을 하였다. 아래 Table.1에 각 격자의 셀과 vertex수를 나타내었다.

Table. 1 수렴을 평가를 위한 격자들

	mesh 0	mesh 1	mesh 2	mesh 3
cell	420	1613	6321	24768
vertex	387	1548	6192	25025

해석을 위한 문제는 이차정확도를 유지하는지 명확히 알 수 있도록 해가 이차곡면을 갖도록 만들었다. 즉 상수 소스항을 가진 Poisson 문제이며 경계조건은 parabolic 해의 경계면에서의 정해를 부여하였다. 보다 복잡한 문제를 통해 수렴율을 측정할 수도 있으나 정확한 수렴율을 알기 위해 매우 많은 미세화 단계를 거쳐야 하며 격자의 skewness에 대한 민감도를 쉽게 관찰할 수 있도록 최대한 단순한 해를 갖는 문제에 대해 수치실험을 수행하였다. LLR의 경우 선형해에서 round off 오차를 제외하고는 정확하므로 선형해를 갖는 문제는 제외되었다.

오차는 L_1 norm을 사용하였으며 미세화 단계가 다르면 각각의 해석에 사용된 셀의 개수가 다르므로 각 미세화 단계들의 상대적인 비교를 위해 다음과 같이 정규화하였다.

$$L_1 = \frac{\sum_i |\phi_{exact} - \phi_i|}{\sum_i |\phi_{exact}|} \quad (9)$$

Table.2-4는 각 방법의 오차 및 수렴율등을 나타낸 것이다. LLR의 경우 예상한 바와 같이 정확한 이차정확도를 가짐을 확인 할 수 있다. 그러나 이에 반해 다른 두 방법은 보다 격자가 미세해지면 1차정확도에도 미치지 못하는 것을 볼 수 있는데 이는 두 방법이 선형해를 정확히 만족시키지 못하는 재구성 방법임을 의미하며 재구성점이 정렬격자에서 많이 벗어나게 되는 점들에서 오차가 상대적으로 충분히 감소하지 못함으로 인해 생기는 현상이다. 즉 격자의 질이 양호하지 못한 곳에서 이 두 방법은 격자 비의 존재로의 수렴시에 문제점을 안고 있다는 것을 의미한다.(Fig. 5)

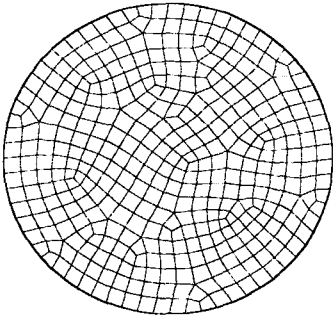


Fig. 4 수렴율 평가를 위한 초기 격자

이런 현상을 피하고 보다 현실적인 문제에서의 수렴율을 얻기 위해서는 단순히 초기 격자를 미세화하기 보다는 특성길이를 반으로 하는 격자를 계속 다시 생성하거나 이차곡면을 해로 갖는 문제보다는 지수함수와 같은 고차항 성분이 포함된 해를 갖는 문제에서 수렴율을 판정하는 것이 효과적일 것이다. 그러나 해상도가 충분한 영역에서 고차항들의 영향이 상대적으로 매우 적어지게 되면 이러한 현상은 피할 수 없게 된다. 즉 국지적인 격자의 미세화를 통해 격자비의존해를 얻기가 어려워지게 된다.

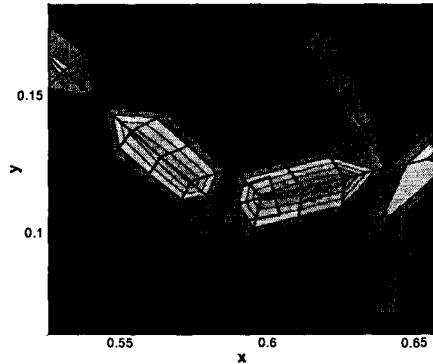


Fig. 5 LW의 오차분포도와 재구성셀

Table. 2 Inverse distance weighting(IDW)

	오차	감소비	수렴율
mesh 0	1.231e-3		
mesh 1	3.383e-4	3.367	1.863
mesh 2	2.695e-4	1.255	0.328
mesh 3	1.727e-4	1.560	0.641

Table. 3 Laplacian weighting(LW)

	오차	감소비	수렴율
mesh 0	1.289e-3		
mesh 1	2.840e-4	4.533	2.180
mesh 2	2.490e-4	1.142	0.192
mesh 3	1.686e-4	1.477	0.563

Table. 4 Locally linear reconstruction(LLR)

	오차	감소비	수렴율
mesh 0	1.499e-3		
mesh 1	3.623e-4	4.137	2.05
mesh 2	8.908e-5	4.067	2.02
mesh 3	2.209e-5	4.033	2.01

4. 결 론

Cell-centered 유한 체적법을 위한 이차 정확도를 가지는 재구성 기법을 개발하였다. 개발된 방법은 완전한 이차 정확도를 가지며 격자의 형태에 크게 구애받지 않아 hybrid 타입의 격자에서도 어려움없이 적용이 가능하다. 또한, 삼차원확장이 보다 직관적이며, 재구성시 boundness를 보장하기 위한 positivity principle을 만족시킬 수 있다. 개발된 재구성 기법을 단순한 2차 parabolic 해를 갖는 문제에 적용하여 기존의 재구성기법들 중 IDW 및 LW과 비교하였다. 수치실험의 결과 이차곡면의 해에서 기존의 두 방법은 이차정확도에 못 미치는 수렴율을 얻은 반면 LLR은 정확한 이차 수렴율을 보여 주었다.

참고문헌

- [1] Kobayashi, M.H. and Pereira J., "A Conservative Finite Volume Second Order Accurate Projection Method on Hybrid Unstructured Grids," *Journal of Computational Physics*, vol.150,(1999),p40-75.
- [2] Barth, T.J., "Recent Developomets in High Order K-Exact Reconstruction on Unstructured Meshes," *AIAA paper 93-0668*, Jan. (1993).
- [3] Frink, N.T., "Upwind Scheme for Solving the Euler Equations on Unstructured Tetrahedral Meshes," *AIAA Journal*, vol.1, January, (1992).
- [4] Kim, D.J. and Choi, H.C., "A Second Order Time Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids," *Journal of Computational Physics*, vol.162, (2000).
- [5] Balgia, R.B., and Patankar, S.V., " A Control-Volume Finite Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer," *Numer. Heat Transfer*, vol.6, p245-261
- [6] Barth, T.J., "Aspects of Unstructured Grids and Finite Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations," *VKI Lecture Series*, (1995), p58-64.
- [7] Frink, N.T., "Recent Progress Toward a Three-Dimensional Unstructured Naver-Stokes Flow Solver," *AIAA 94-0061*, Jan.,(1994).
- [8] Holmes, D.G. and Connell, S.D., "Solution of the 2D Naver-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids," *AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference*, June,1989.
- [9] Ferziger J.H. and Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, (1996), p.217-222