



다차원 유동의 정확한 수치해석 : 다차원 고차 내삽 기법

김 규 흥¹, 김 중 암², 노 오 현²

Accurate Computations for Multi-dimensional Flows : Multi-dimensional Higher order Interpolation Scheme

Kyu Hong Kim, Chongam Kim, and Oh-Hyun Rho

The new multi-dimensional higher order interpolation scheme called MHIS is developed. Firstly, multi-dimensional TVD condition is derived based on one-dimensional TVD condition. Using multi-dimensional TVD condition, 2nd, 3rd and 5th order MHIS are presented. By help of multi-dimensional TVD condition, it is possible to captured a discontinuity monotonically even in a multi-dimensional flow. It is verified through several test cases that the accuracy and the robustness of MHIS are enhanced in regions of shock discontinuities as well as boundary-layers.

Key Words: 다차원 수치기법(multi-dimensional scheme), 다차원 TVD 조건 (multi-dimensional TVD condition), 다차원 고차내삽기법(MHIS)

1. Introduction

현재 CFD 분야에 요구되는 응용 문제는 대부분 2차원 이상 3차원 비정상 유동인 반면 이를 해석하기 위한 수치기법이 대부분 1차원 유동 현상을 기반으로 개발되었다. 이런 이유로 기존의 수치기법으로 다차원 문제를 해석하게 되면 여러 가지 문제점이 발생된다. 다차원 유동에 적합한 다차원 수치기법 개발을 위한 노력이 1990년대 중반부터 시작되어 여러 가지 수치기법이 개발되었으나 현재까지 단조성, 효율성 면에서 특별한 장점을 보여주지 못하고 기존 수치기법이 주를 이루어 사용되고 있다. 다차원 수치기법은 다차원 유동 현상을 직접 고려하기 때문에 정확성 측면에서는 당연히 개선된 모습을 보여준다.

그러나 단조성 면에서 매우 심각한 모습을 보여주기 때문에 범용화 되지 못하고 있다. 특히 극초음속 유동과 같이 강한 충격파를 포함하는 유동현상에 적용하는 것은 거의 불가능에 가깝다. 이러한 문제점을 고려하여, 본 연구에서는 먼저 다차원 유동에서 단조성을 만족시킬 수 있는 다차원 TVD 조건을 도출할 것이다. 그리고 이를 통해 새로운 다차원 고차 내삽 기법을 개발할 것이다. MHIS(Multi-dimensional Higher order Interpolation Scheme)으로 명명한 이 수치기법의 특징은 다음과 같다.

1. The complete multi-dimensional monotonic characteristics by help of the multi-dimensional monotonic condition.
2. The higher order interpolation scheme. (More than third order interpolation scheme).
3. The same level of efficiency as MUSCL approach with TVD limiter.
4. Robust convergence characteristics by help of the multi-dimensional monotonic condition.

1 서울대학교 기계항공공학부

2 종신회원, 서울대학교 기계항공 공학부

(151-742 서울시 관악구 신림동 Tel : 02-880-1903)

* E-mail : aerocfd1@snu.ac.kr

여러 가지 수치실험을 통해 살펴본 바에 따르면, 앞서 발표한 공간차분법과 더불어 적용할 경우 기존 MUSCL과 Roe's FDS나 AUSMPW+에 비해 문제에 따라 3배에서 4배정도의 격자수 감소 효과를 얻을 수 있다.

2. 지배 방정식

보존형의 2차원의 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \right) \quad (1)$$

유동과 flux 벡터들은 다음과 같다.

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e_t + p)u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e_t + p)v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ e_v \end{pmatrix}, F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ f_v \end{pmatrix}$$

여기서 $e_v = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x$, $f_v = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y$ 이다. 열량적 완전 기체의 상태 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\rho \left(e_t - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) \quad (3)$$

공기의 경우 $\gamma = 1.4$.

3. 다차원의 TVD condition

$\Phi_{i-1,j+1}$	$\Phi_{i,j+1}$	$\Phi_{i+1,j+1}$
	Φ_3	Φ_2
$\Phi_{i-1,j}$	$\Phi_{i,j}$	$\Phi_{i+1,j}$
	Φ_4	Φ_1
$\Phi_{i-1,j-1}$	$\Phi_{i,j-1}$	$\Phi_{i+1,j-1}$

그림 1. 셀 (i,j) 주위의 물성치 분포

현재까지 다차원 유동 해석을 위해 개발된 대부분의 수치기법은 1차원 유동을 기반으로 개발되었다.

압축성 유동 해석시 가장 널리 쓰이고 있는 TVD 수치기법 역시 1차원 유동을 기반으로 개발되었으며 1차원 불연속면에서 단조성을 확보할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 다차원 유동 해석시 TVD 수치기법 역시 단조성을 보장하지 못하는 문제점을 가지고 있다. 이런 이유로 충격파와 같은 불연속면을 포함한 유동에서는 진동현상이 발생하게 되고 수렴성이나 정확성에 좋지 않은 영향을 미치게 된다. 본 연구에서는 1차원 TVD조건을 다차원으로 확장하여 다차원 TVD 조건을 도출하였다. 1차원 유동에서 단조성을 만족시키는 조건은 다음과 같다.

$$\phi_{i-1} < \phi_{i-\frac{1}{2}} < \phi_i$$

$$\phi_i < \phi_{i+\frac{1}{2}} < \phi_{i+1} \quad (4)$$

같은 방법으로 다차원 유동에 적용시켜 보면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_{\neq \text{ighbor}}^{\min} < \phi_{\text{gridpoints}} < \phi_{\neq \text{ighbor}}^{\max} \quad (5)$$

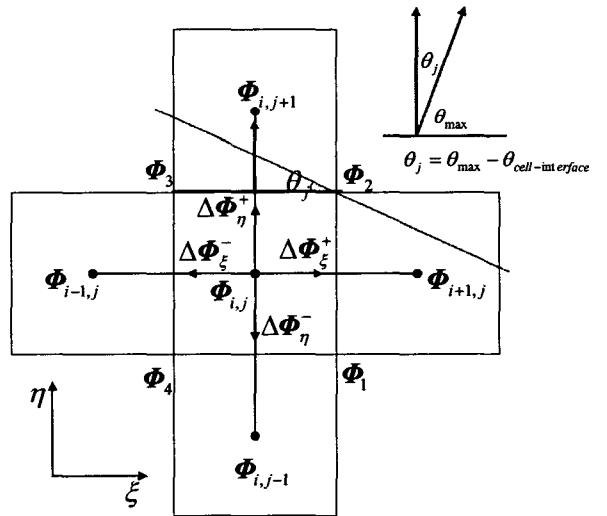


그림 2. 제어면에 대해 기울어진 불연속면

이를 그림 1에 적용시켜 보면,

$$\min(\phi_{i,j}, \phi_{i+1,j}, \phi_{i,j-1}, \phi_{i+1,j-1}) < \phi_i \quad (6a)$$

$$\max(\phi_{i,j}, \phi_{i+1,j}, \phi_{i,j-1}, \phi_{i+1,j-1})$$

$$\min(\phi_{i,j}, \phi_{i+1,j}, \phi_{i,j+1}, \phi_{i+1,j+1}) < \phi_2 \quad (6b)$$

$$\max(\phi_{i,j}, \phi_{i+1,j}, \phi_{i,j+1}, \phi_{i+1,j+1})$$

$$\min(\phi_{i,j}, \phi_{i-1,j}, \phi_{i,j+1}, \phi_{i-1,j+1}) < \phi_3 \quad (6c)$$

$$\max(\phi_{i,j}, \phi_{i-1,j}, \phi_{i,j+1}, \phi_{i-1,j+1})$$

$$\begin{aligned} \min(\phi_{i,j}, \phi_{i-1,j}, \phi_{i,j-1}, \phi_{i-1,j-1}) &< \phi_4 \\ \max(\phi_{i,j}, \phi_{i-1,j}, \phi_{i,j-1}, \phi_{i-1,j-1}) & \end{aligned} \quad (6d)$$

그림 4와 같이 불연속면이 제어면에 θ_j 만큼 기울어졌을 때 다차원 단조 조건을 만족시키는 조건을 구해보자.

$$\phi_{i,j-1} < \phi_1 < \phi_{i+1,j} \quad (7a)$$

$$\phi_{i,j} < \phi_2 < \phi_{i+1,j+1} \quad (7b)$$

$$\phi_{i-1,j} < \phi_3 < \phi_{i,j+1} \quad (7c)$$

$$\phi_{i-1,j-1} < \phi_4 < \phi_{i,j} \quad (7d)$$

여기서 각 셀에서의 θ_j 는 다음과 같다.

θ_j 는 불연속면 방향과 제어면과 이루는 각도로

$\theta_j = \theta_{\text{불연속면}} - \theta_{\text{제어면}}$ 이다.

$\theta_{\text{불연속면}}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\theta_{\text{불연속면}} = \tan^{-1} \left(\frac{\nabla \phi_{y,i,j}}{\nabla \phi_{x,i,j}} \right) \quad (8)$$

여기서 $\nabla \phi_{i,j} = \frac{1}{A_{i,j}} \int \phi \, n \, dl = \nabla \phi_{x,i,j} + \nabla \phi_{y,i,j}$

각 격자점에서 물성치값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{i,j} + \Delta \phi_{\eta}^+ + \Delta \phi_{\xi}^- \\ \phi_2 &= \phi_{i,j} + \Delta \phi_{\eta}^+ + \Delta \phi_{\xi}^+ \\ &= \phi_{i,j} + (1 + \tan \theta_j) \Delta \phi_{\eta}^+ \\ \phi_3 &= \phi_{i,j} + \Delta \phi_{\eta}^- + \Delta \phi_{\xi}^+ \\ \phi_4 &= \phi_{i,j} + \Delta \phi_{\eta}^- + \Delta \phi_{\xi}^- \\ &= \phi_{i,j} + (1 + \tan \theta_j) \Delta \phi_{\eta}^- \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\tan \theta_j = \frac{\Delta \phi_{\xi}^+}{\Delta \phi_{\eta}^+} = \frac{\Delta \phi_{\xi}^-}{\Delta \phi_{\eta}^-}$.

각 격자점에서 구해진 물성치가 단조성 조건 식 (7)을 만족시키는지 검토해보자. 먼저, $\Delta \phi_{\xi, \eta}^{\pm}$ 는 1차원 TVD 조건을 만족한다고 하면,

$$\phi_{i-1,j} < \phi_{i-\frac{1}{2},j} < \phi_{i,j} < \phi_{i+\frac{1}{2},j} < \phi_{i+1,j}$$

$$\phi_{i,j-1} < \phi_{i,j-\frac{1}{2}} < \phi_{i,j} < \phi_{i,j+\frac{1}{2}} < \phi_{i,j+1}$$

따라서, 격자점 1과 3에서는 다음과 같이 단조성 조

건 식(7a) 식(7c)를 만족시킨다.

$$\phi_{i,j-1} < \phi_{i,j-\frac{1}{2}} < \phi_1 < \phi_{i+\frac{1}{2},j} < \phi_{i+1,j}$$

$$\phi_{i-1,j} < \phi_{i-\frac{1}{2},j} < \phi_3 < \phi_{i,j+\frac{1}{2}} < \phi_{i,j+1}$$

격자점 2에서 단조성 조건을 만족시키지 못하는 경우를 찾아보면 다음 2가지 경우로 요약된다.

i) $r_L = \frac{\Delta \phi_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta \phi_{j-\frac{1}{2}}} > 1$ 이고 $r_R = \frac{\Delta \phi_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta \phi_{j+\frac{3}{2}}} > 1$

ii) $r_L = \frac{\Delta \phi_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta \phi_{j-\frac{1}{2}}} < 1$ 이고 $r_R = \frac{\Delta \phi_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta \phi_{j+\frac{3}{2}}} > 1$

격자점 2에서 모든 경우에 대해 단조성을 만족시키기 위해서는 식(10)을 만족시키는 조건을 도출해야 된다.

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \phi_{i,j} + (1 + \tan \theta_j) \Delta \phi_{\eta}^+ < \phi_{i+1,j+1} \\ &= \phi_{i,j} + \Delta \phi_{j+\frac{1}{2}} + \Delta \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $\Delta \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\tan \theta_{j+1}}{r_{R,j+1}} \Delta \phi_{j+\frac{1}{2}}$ 이고

정리하면,

$$\Delta \phi_{\eta}^+ \leq \left(1 + \frac{\tan \theta_{j+1}}{1 + \tan \theta_j} \right) \Delta \phi_{j+\frac{1}{2}} \quad (11)$$

각 경우에 대해 단조성 조건을 만족시키기 위해 $\Delta \phi_{\eta}^+$ 을 다음과 같이 수정하였다.

$$\Delta \phi_{\eta}^+ = 0.5 \min(\Delta \phi_{j+\frac{1}{2}}, \alpha \Delta \phi_{j-\frac{1}{2}}) \quad (12)$$

여기서 $1 < \alpha < 2$.

i) $r_L > 1$ 이고 $r_R > 1$,

$$\Delta \phi_{\eta}^+ \leq 0.5 \frac{\alpha}{r_L} \Delta \phi_{j+\frac{1}{2}} \quad (13a)$$

ii) $r_L < 1$ 이고 $r_R > 1$,

$$\Delta \phi_{\eta}^+ \leq 0.5 \alpha \Delta \phi_{j+\frac{1}{2}} \quad (13b)$$

정리하면,

$$1 \leq \alpha$$

$$\leq \min \left(2, 2 \max(1, r_L) \frac{\left(1 + \frac{\tan \theta_{j+1}}{\max(1, r_{R,j+1})} \right)}{(1 + \tan \theta_j)} \right)$$

여기서 최대값을 선택하면,

$$\alpha = \max \left(1, \min \left(2, 2 \max(1, r_L) \frac{\left(1 + \frac{\tan \theta}{\max(1, r_R)} \right)}{(1 + \tan \theta)} \right) \right)$$

최종적으로 다차원 TVD 조건은 다음과 같이 요약 된다.

1차원 TVD 조건

$$\max(0, \min(2, 2r))$$

다차원 TVD 조건

$$\max(0, \min(2, \alpha r))$$

4. MHIS(Multi-dimensional Higher Order Interpolation Scheme)

위에서 구해진 다차원 TVD 조건을 이용하여 다차원 유동에서 단조성을 확보할 수 있는 다차원 고차 내삽 기법인 MHIS(Multi-dimensional Higher Order Interpolation Scheme)을 개발하였다.

$$\phi_L = \phi_i + 0.5 \max(0, \min(2, \alpha_L r_L, \beta_L)) \Delta \phi_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\phi_R = \phi_i + 0.5 \max(0, \min(2, \alpha_R r_R, \beta_R)) \Delta \phi_{i+\frac{3}{2}}$$

2차 정확도 MHIS

$$\beta_L = \frac{1 + r_L}{2}, \beta_R = \frac{1 + r_R}{2}$$

3차 정확도 MHIS

$$\beta_L = \frac{1 + 2r_L}{3}, \beta_R = \frac{1 + 2r_R}{3}$$

5차 정확도 MHIS

$$\beta_L = \frac{-2f_{1,L} + 11 + 24r_L - 3f_{3,L}}{30}$$

$$\beta_R = \frac{-2f_{1,R} + 11 + 24r_R - 3f_{3,R}}{30}$$

여기서

$$f_{1,L} = \max \left(\left(0.5, \min \left(2, \Delta \phi_{j-\frac{3}{2}} / \Delta \phi_{j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right)$$

$$f_{3,L} = \max \left(\left(0.5, \min \left(2, \Delta \phi_{j+\frac{3}{2}} / \Delta \phi_{j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right)$$

$$f_{1,R} = \max \left(\left(0.5, \min \left(2, \Delta \phi_{j+\frac{5}{2}} / \Delta \phi_{j+\frac{3}{2}} \right) \right) \right)$$

$$f_{3,R} = \max \left(\left(0.5, \min \left(2, \Delta \phi_{j-\frac{1}{2}} / \Delta \phi_{j+\frac{3}{2}} \right) \right) \right)$$

5. 계산 결과

MHIS의 향상된 점을 파악하기 위한 수치실험으로 경사 접촉불연속면, vortex flow, 충격파/경계층 상호작용을 해석하였다.

5.1. contact discontinuity

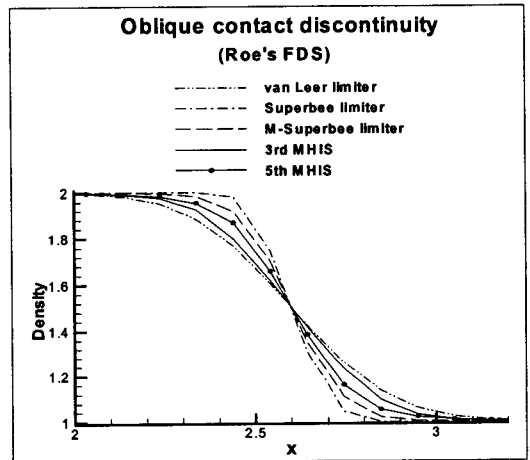


그림 3. 제어면과 경사진 접촉불연속면 (Roe's FDS)

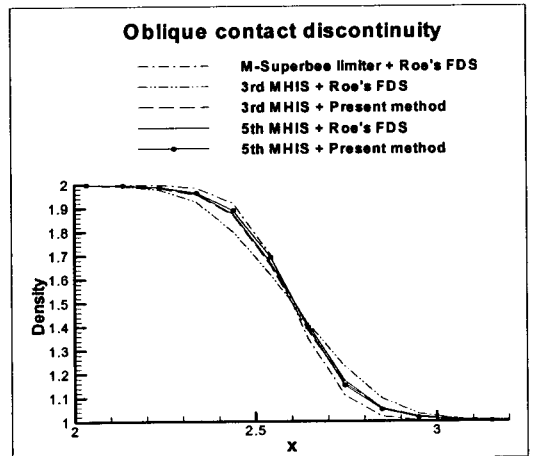


그림 4. 제어면과 경사진 접촉불연속면

초기조건은 다음과 같다.

$$(\rho_L, u_L, \nu_L, \phi_L) = (2.0, 0.1, 0.1, 0.714)$$

$$(\rho_R, u_R, \nu_R, \phi_R) = (1.0, 0.1, 0.1, 0.714)$$

미끄럼 불연속면 유동해석은 접촉불연속면의 일반적인 유동형태로 경계층 내부의 수치점성 비교뿐만 아니라 vortex 유동 계산에서 수치점성의 크기를 직접적으로 표현해 줄 수 있는 수치실험이다. 블레이드 주위의 vortex 상호작용 문제나 플래핑 날개 등에서 발생하는 vortex 유동 계산의 정확성을 향상시키기 위해서는 위 수치실험 문제를 보다 정확히 계산해야 한다.

그림 3과 4는 MHIS와 기존의 MUSCL 기법 그리고 새롭게 개발된 공간차분법을 적용했을 때 밀도 분포를 비교한 그림이다. 가장 정확한 해는 초기의 불연속면 조건을 그대로 유지해야 하는 것으로 불연속면이 퍼지면 퍼질수록 수치점성이 크고 계산 정확성이 떨어지는 것을 의미한다. MUSCL 제한자 중 정확성이 어느 정도 보장되는 van Leer 제한자 결과와 비교하였을 때 새롭게 개발된 공간차분법과 5차 공간정확도의 MHIS를 사용하면 거의 2배 정도의 정확성 향상을 보여준다. 이는 van Leer 제한자를 이용할 경우, 거의 4배 정도의 격자수를 통해 얻어질 수 있는 결과로 2차원 유동의 경우 경계층이나 vortex 유동 계산에 있어 4배 정도의 효율성 향상을 기대할 수 있다. 3차원의 경우 하나의 축 방향을 더 고려해야 되기 때문에 각 방향으로 2배씩 거의 8배의 효율성 증가를 기대할 수 있다.

5.2. vortex flow

다음은 코어 반지름이 0.277이고 각속도가 0.5203인 vortex 유동의 해석 결과이다. 그림 5는 여러 가지 MUSCL 제한자와 MHIS를 비교한 그림이다. 초기 조건은 Euler 방정식의 수렴해로 주어지기 때문에 가장 이상적인 경우는 초기의 물성치 분포를 그대로 유지하는 것이다. 그러나 수치해석 단계에서는 차분 과정을 거치기 때문에 초기조건을 그대로 해로 받아 들여지지 못하고 수치 오차에 따른 새로운 해로 수렴되게 된다. 주의할 점은 superbee 제한자의 경우 반복계산을 함에 따라 초기 vortex 강도 보다 점점 더 커지는 모습을 보여 준다. 이는 엔트로피 감소 현상으로 나타난다. 공간차분기법에서는 주어진 물성치 분포에서 엔트로피를 증가시키는 방향으로 플럭스를 결정하기 때문에 엔트로피 감소 현상은 물성치 내삽 단계에서 일어나는 것이다. 즉 superbee 제한자의 경우 과도한 기울기 예측에 의해 엔트로피를 감소시키

는 문제점을 보여준다. 나머지 내삽기법은 엔트로피를 증가 시키고 있으며 vortex 유동을 해석이 가능하다고 판단된다. 이 중 5차 공간정확도의 MHIS가 엔트로피 증가를 가장 적은 것을 알 수 있다. 그림 6을 보면, 5th order MHIS+present method의 경우 van Leer 제한자를 이용하여 4배 격자수에서 계산된 결과와 비슷한 것을 알 수 있다. 앞의 접촉불연속면 문제와 마찬가지로 2차원 유동의 경우 4배 정도의 효율성 향상을 기대할 수 있는 것으로 판단된다.

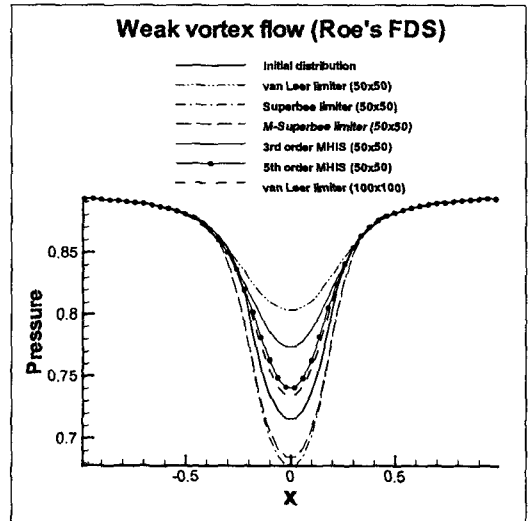


그림 5. 내삽 기법에 따른 압력분포 비교

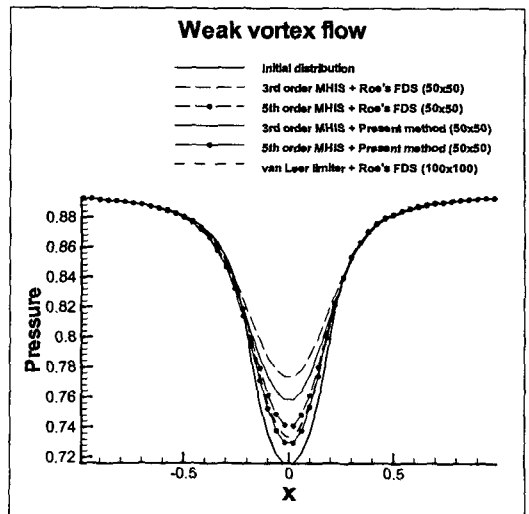


그림 6. vortex 유동의 압력분포 비교

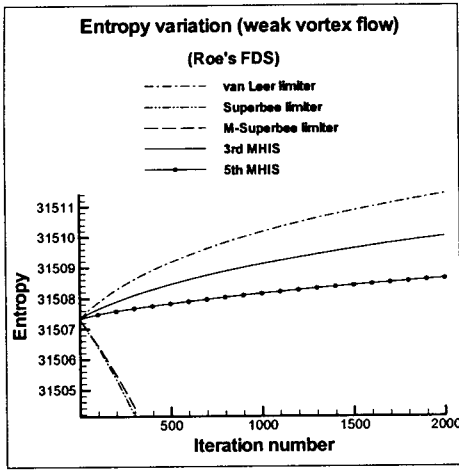


그림 7 반복계산에 따른 엔트로피 비교

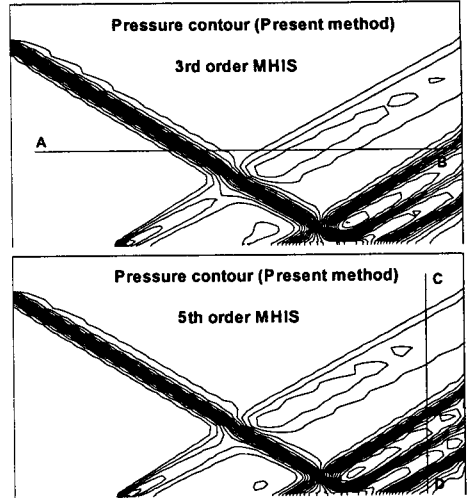


그림 8 압력분포 비교 (충격파/경계층상호작용)

5.3. 충격파/경계층 상호작용

경계층 계산 정확성을 검증하기 위해 많이 쓰이는 수치 실험으로 충격파 경계층 상호작용 문제이다. 마하수 2이고 입사각은 32.585도이다. 그림 8는 각 내 삼기법에 따른 결과로 압력분포를 비교한 그림이다. 그리고 선분 AB와 CD를 따른 압력 분포를 비교하였다. 전체적으로 충격파 포착 정확성이 향상된 것을 확인 할 수 있다. 기존의 수치기법 결과의 경우 충격파가 입사되고 압력 구배 증가로 인한 유동박리 현상 그리고 박리 영역에서 발생하는 팽창파와 압축파 등의 유동구조를 명확하게 파악하지 못하는 것을 볼 수 있다. 반면 같은 격자계 사용하더라도 MHIS의 경우 반사 충격파와 팽창파 영역 그리고 압축파를 구분할 수 있을 정도로 유동 구조가 확실하게 드러나는 것을 알 수 있다.

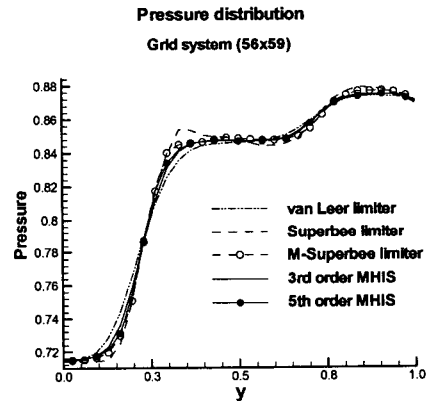


그림 9 선분 AB를 따른 압력분포 비교

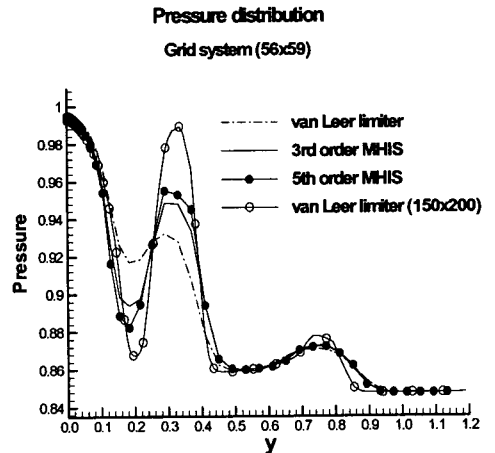
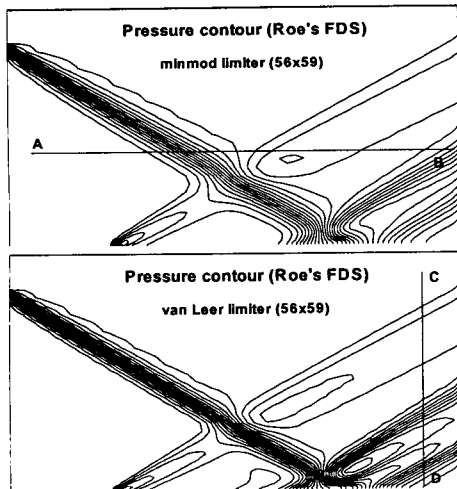


그림 10 선분 CD를 따른 압력분포 비교

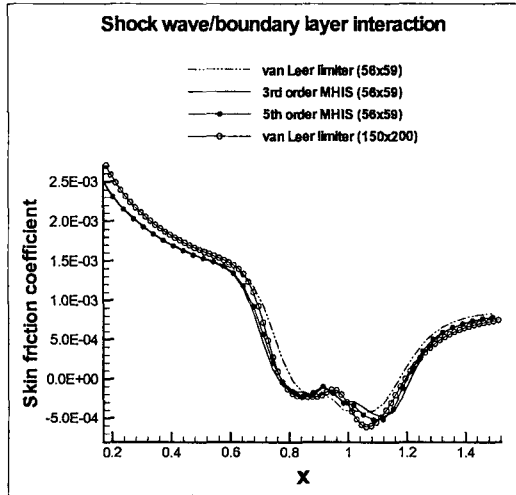


그림 11 벽면 마찰계수 비교

그림 11은 벽면 마찰계수를 나타낸 것으로 van Leer 제한자와 MHIS 그리고 조밀한 격자계에서의 결과를 비교한 그림이다. 유동이 박리되면 박리 영역 내의 압력이나 마찰계수가 일정한 고원 부분이 존재하는데 van leer제한자의 경우 고원 부분이 전혀 나타나지 않는 모습을 볼 수 있다. 반면 MHIS의 경우 이를 확인할 수 있으며 박리 영역 역시 훨씬 더 정확하게 예측되는 것을 알 수 있다.

6. 결론

다차원 TVD 조건을 찾아내고 이를 통해 다차원에서 단조성을 보장할 수 있는 MHIS를 개발하였다. MHIS의 장점은 다차원에서의 단조성을 확보한 것 외에 기존 TVD MUSCL 수준의 효율성을 보여주고 있고 고차 정확도로 확장이 매우 자유롭다는 것이다. 5차 공간 정확도 MHIS와 새롭게 개발된 공간차분법을 적용할 경우 정확성 측면에서 2차원에서 거의 4배 정도의 향상을 가져 왔으며 이를 경사 미끄럼 불연속면과 경사 충격파 반사문제 그리고 충격파/경계층 상호작용문제를 통해 확인할 수 있었다. MHIS가 향후 3차원 유동으로 확장될 경우 거의 8배의 정확성 향상을 보여줄 것으로 기대된다.

참고 문헌

- [1] R. J. LeVeque, "Wave Propagation Algorithms for Multidimensional Hyperbolic Systems," J. of Computational Physics, Vol 131, 1997, pp. 327-353.
- [2] D. W. Levy, K. G. Powell, and B. Van Leer, "Use of a Rotated Riemann Solver for the Two-Dimensional Euler Equations," J. of Computational Physics, Vol 106, 1993, pp. 201-214.
- [3] P. L. Roe, "Discrete Models for the Numerical Analysis of Time-Dependent Multidimensional Gas Dynamics", J. of Computational Physics, Vol 63, 1986, pp. 458-476.
- [4] K. H. Kim, C. Kim, and O. H. Rho, "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows - Part I : AUSMPW+ Scheme," J. of Computational Physics, Vol. 174, No. 1, 2001, pp. 38-80.
- [5] K. H. Kim, "Development of Multi-dimensional Higher Order Interpolation Schemes for Hypersonic Flows," Ph.D. Thesis, Seoul National University, 2001.
- [6] Y. Tamura, and K. Fuji, "A Multi-Dimensional Upwind Scheme for the Euler Equations on Structured Grids," Computers and Fluids, Vol22(2/3), 1993, pp. 125-137.
- [7] A. Dadone, and B. Grossman, "Characteristic-Based, Rotated Upwind Scheme for the Euler Equations," AIAA Journal, Vol30, No. 9, 1992.
- [8] K. Sawada, "A Flux Difference Multidimensional Splitting Scheme," AIAA-99-3345, 1999.
- [9] C. L. Rumsey, B. Van Leer, and Phillip L. Roe, "Effect of a Multi-Dimensional Flux Function on the Monotonicity of Euler and Navier-Stokes Computations," AIAA-91-1530-CP, 1991.
- [10] S. Tatsumi, L. Martinelli, and A. Jameson, "Design, Implementation and Validation of Flux Limited Schemes for the Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations," AIAA Journal, Vol 33, 1995, p. 252.