



다차원 유동의 정확한 수치해석 : 공간 차분법

김 규 흥¹, 김 종 압², 노 오 현²

Accurate Computations for Multi-dimensional Flows : Spatial Discretization

Kyu Hong Kim, Chongam Kim, and Oh-Hyun Rho

In order to reduce the excessive numerical dissipation, the new spatial discretization scheme is introduced. The present method in this paper has the formula that has an additional procedure of defining transferred properties at a cell-interface, based on AUSMPW+. The newly defined transferred property could eliminate numerical dissipation effectively in non-flow aligned grid system. In addition, the present method guarantees the monotonic characteristic in capturing a discontinuity.

Through a stationary or moving contact discontinuity and a stationary or moving shock discontinuity, a vortex discontinuity and shock wave/ boundary layer interaction, it is verified that the accuracy of the present method is improved.

Key Words: AUSMPW+, 공간차분법(Spatial discretization)

1. Introduction

비정상 3차원 유동 문제 해석에 있어 CFD의 문제를 살펴보면, 2차원 이상의 유동이나 비정상 유동의 경우 분할 오차가 과도하게 발생하며 계산 정확성을 떨어뜨리게 된다는 것이다. 특히 3차원 유동의 경우 정확성 저하 문제가 매우 심각하게 나타난다. 정확한 비정상 3차원 유동 해석을 위해서는 이를 뒷받침할 만한 수치기법 개발이 필수적이다.

일반적으로 3차원 유동을 정확히 해석하기 위해서는 격자계와 유동이 일치하지 않는 경우 발생하는 과도한 수치점성을 효과적으로 제거해야 한다. 이러한 면을 고려하여 본 논문에서는 수치점성을 효과적으로 제거할 수 있는 방법을 제시하였다. AUSM계열 수치기법은 제어면에서 음속을 정의하고 이에 따라 전달 마하수를 결정한 후 전달 마하수 부호에 따라

한쪽 물성치만 전달하는 형태를 하고 있다. 반면 본 연구에서 개발된 공간차분법은 제어면에서 전달 물성치를 새롭게 정의함으로써 격자계와 유동이 일치하지 않을 경우 생기는 수치점성을 새롭게 개발된 수치기법으로 효과적으로 줄일 수 있다. 정상 oblique contact discontinuity와 shock wave/boundary layer interaction 문제들을 통해 이를 확인하였다.

2. Governing Equations

보존형의 2차원의 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \right) \quad (1)$$

유동과 flux 벡터들은 다음과 같다.

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e_t + p)u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e_t + p)v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ e_v \end{pmatrix}, F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ f_v \end{pmatrix}$$

1 서울대학교 기계항공공학부

2 종신회원, 서울대학교 기계항공공학부

(151-742 서울시 관악구 신림동 Tel : 02-880-1903)

* E-mail : aerocfd1@snu.ac.kr

여기서 $e_v = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x$, $f_v = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y$ 이다.

열량적 완전 기체의 상태 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\rho \left(e_t - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) \quad (3)$$

공기의 경우 $\gamma = 1.4$.

3. Development of new spatial discretization scheme

AUSM 계열 수치기법의 플럭스 형태는 다음과 같이 $F_{\frac{1}{2}} = m_{\frac{1}{2}} c_{\frac{1}{2}} \Phi_{L \rightarrow R}$ 로 제어면에서의 마하수에 따라 좌우 물성치 중 어느 하나를 전달시키는 형태이다. 잘 알려진 바와 같이 advection 특성은 hyperbolic type 전달 방법에 적합하기 때문에 아음속 유동 계산에서는 바람직하지 못한 문제점이 있다. 본 연구에서 제시될 수치기법은 advection 특성은 유지하되 타원형 방정식의 특성을 도입하는 것으로 제어면에서 전달되는 물성치를 새롭게 정의하는 것이다. 제어면에서의 물성치를 다음과 같이 정의하였다.

$$F_{\frac{1}{2}} = \bar{M}_L^+ c_{\frac{1}{2}} \Phi_{L, \frac{1}{2}} + \bar{M}_R^- c_{\frac{1}{2}} \Phi_{R, \frac{1}{2}} + P_L^+ P_L + P_R^- P_R, \quad (4)$$

여기서 $\Phi = (\rho, \rho u, \rho H)^T$, $P = (0, p, 0)^T$ 이고 아래 첨자 $\frac{1}{2}$, (L, R) 은 각각 제어면과 제어면을 기준으로 좌우 상태를 나타낸다.

$$i) m_{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (5a)$$

$$\bar{M}_L^+ = M_L^+ + M_R^- \cdot [(1-w) \cdot (1+f_R) - f_L],$$

$$\bar{M}_R^- = M_R^- \cdot u \cdot (1+f_R),$$

$$ii) m_{\frac{1}{2}} < 0 \quad (5b)$$

$$\bar{M}_L^+ = M_L^+ \cdot u \cdot (1+f_L),$$

$$\bar{M}_R^- = M_R^- + M_R^- \cdot [(1-w) \cdot (1+f_L) - f_R],$$

마하수 분할 함수와 압력 분할 함수는 다음과 같다.

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2, & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (M \pm |M|), & |M| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$P_{\frac{1}{2}}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \alpha M (M^2 - 1)^2, & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M)), & |M| > 1 \end{cases} \quad (7)$$

3.1 제어면에서 물성치의 정의

advection 특성에서 부족한 elliptic 특성을 제어면의 물성치를 다음과 같이 정의함으로써 보완할 수

있다.

$$\Phi_{L \rightarrow R, \frac{1}{2}} = 0.5 (\Phi_L + \Phi_R) \quad (8)$$

식(8)는 불연속면과 제어면이 이루는 각이 45도를 제외하고는 단조성을 만족시키지 못하는 문제점이 있다. 이를 해결하기 위해 MUSCL에서 쓰이는 구속 조건을 이용하면 불연속면에서 단조성을 유지하면서 수치점성을 크게 줄일 수 있다.

고차 정확도를 얻기 위해 많이 쓰이는 수치기법으로 MUSCL이 있으며 다음과 같은 특징이 있다.

MUSCL 역시 1차원 유동을 기반으로 해서 개발된 수치기법으로 단조성을 유지하기 위해서는 위와 같이 셀 1과 2사이의 물성치 기울기와 셀 2와 3사이의 물성치 기울기를 이용하여 셀 2에서의 기울기를 계산한다. 이때 다음과 같은 관계식을 가지게 된다.

기울기를 Φ' 라 하면,

$$\min(\Phi'_{1,2}, \Phi'_{2,3}) \leq \Phi'_2 \leq 2 \min(\Phi'_{1,2}, \Phi'_{2,3}), \quad (9b)$$

$$\Phi'_2 = 0 \text{ if } \Phi'_{1,2} \Phi'_{2,3} < 0$$

$$\min(\Phi'_{2,3}, \Phi'_{3,4}) \leq \Phi'_3 \leq 2 \min(\Phi'_{2,3}, \Phi'_{3,4}) \quad (9b)$$

$$\Phi'_3 = 0 \text{ if } \Phi'_{2,3} \Phi'_{3,4} < 0$$

식 (9a), (9b)을 적용하여 제어면에서 물성치를 계산하면,

$$\text{if } (\Phi_L - \Phi_{L, \text{lim}})(\Phi_{L, \text{lim}} - \Phi_c) < 0, \quad (10a)$$

$$\Phi_{L, \frac{1}{2}} = \Phi_{L, \text{limit}}$$

elsewhere

$$\Phi_{L, \frac{1}{2}} = 0.5 (\Phi_L + \Phi_R)$$

$$\text{if } (\Phi_R - \Phi_{R, \text{lim}})(\Phi_{R, \text{lim}} - \Phi_c) < 0, \quad (10b)$$

$$\Phi_{R, \frac{1}{2}} = \Phi_{R, \text{limit}}$$

elsewhere

$$\Phi_{R, \frac{1}{2}} = 0.5 (\Phi_L + \Phi_R)$$

여기서 $\Phi_c = 0.5 (\Phi_2 + \Phi_3)$, $\Phi_{L, R, \text{lim}}$ 은 superbee 제한자로 계산된 물성치이다.

식(10)은 단조성을 만족시키기는 하나 초음속과 아음속 영역을 구분하지는 못한다. 물리현상을 정확하게 반영하기 위해서는 초음속 영역과 아음속 영역의 구분이 필수적이다. 초음속 영역에서의 플럭스는 upwind 특성을 만족시켜야 하기 때문에 다음과 같이 마하수에 따른 함수를 도입하여 제어면에서의 물성치를 upwind 형태로 전환시킨다.

요약하면,

$$\phi_{L,\pm} = \phi_L + a \frac{\max[0, (\phi_R - \phi_L)(\phi_{L,superbes} - \phi_L)]}{|\phi_R - \phi_L|(\phi_{L,superbes} - \phi_L)} \min\left[\frac{|\phi_R - \phi_L|}{2}, |\phi_{L,superbes} - \phi_L|\right]$$

$$\phi_{R,\pm} = \phi_R + a \frac{\max[0, (\phi_L - \phi_R)(\phi_{R,superbes} - \phi_R)]}{|\phi_R - \phi_L|(\phi_{R,superbes} - \phi_R)} \min\left[\frac{|\phi_R - \phi_L|}{2}, |\phi_{R,superbes} - \phi_R|\right]$$

여기서 $a = 1 - \min(1, \max(M_L, M_R))^2$

마하수가 1 보다 작은 영역에서는 아음속영역에서는 타원형 방정식 특성을 반영하기 위해 좌우 물성치를 가중 평균하는 형태를 하고 있다. 마하수가 1 보다 큰 영역에서는 기존의 AUSMPW+와 같은 형태를 가지는 것을 알 수 있다.

4. 계산 결과

4.1 Oblique Contact Discontinuity

본 test case는 정상 경사 접촉 불연속면에서 어느 정도의 수치오차를 가지는 지를 나타내준다.

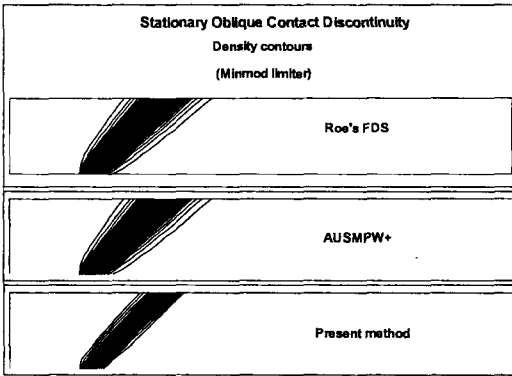


그림 1 정상 경사 접촉 불연속면(Minmod limiter)

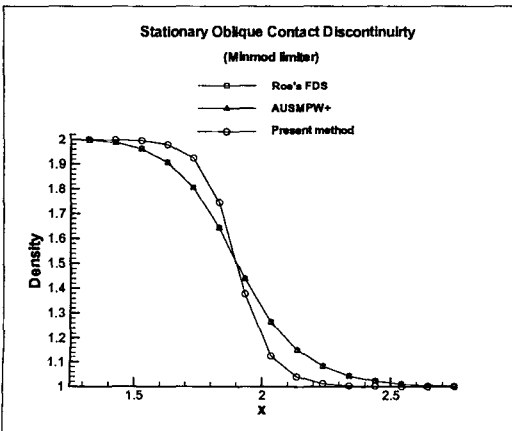


그림 2 정상 경사 접촉 불연속면(Minmod limiter)

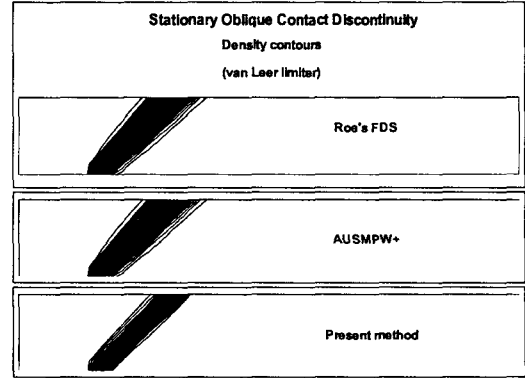


그림 3 정상 경사 접촉 불연속면 (van Leer limiter)

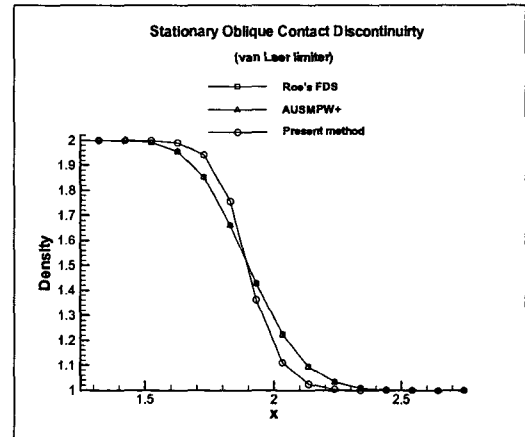


그림 4 정상 경사 접촉 불연속면 (van Leer limiter)

기존 AUSMPW+는 1차원 정상 접촉 불연속면 계산에 있어 exact solution을 그대로 표현할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 본 문제와 같이 경사 접촉 불연속면과 같이 유동 방향 자체가 격자계와 일치하지 않는 경우 수치점성이 매우 커지는 모습을 볼 수 있다. 초기 조건은 다음과 같다. 제어면과 45도 기울어진 접촉불연속면 조건이다.

$$(\rho_L, u_L, \nu_L, p_L) = (2.0, 0.1, 0.1, 0.714)$$

$$(\rho_R, u_R, \nu_R, p_R) = (1.0, 0.1, 0.1, 0.714)$$

그림 1과 2는 minmod limiter를 사용한 결과이고 그림 3과 4는 van leer limiter 를 사용한 결과이다. Roe's FDS와 AUSMPW+ 결과를 보면, minmod limiter의 경우 불연속면이 13개정도의 격자에, van

leer limiter는 9개정도에 포착되는 것을 보여 준다. 잘 알려진 바와 같이 두 수치기법은 동일한 결과를 보여준다. 반면, 본 연구를 통해 개발된 수치기법은 7개, 5개정도의 격자점을 통해 접촉불연속면을 표현하는 것을 알 수 있다. 거의 2배의 기울기를 보여주는 데 이는 격자수가 4배인 격자계에서 해석한 결과와 같다. 마하수가 작은 벽면 근처에서의 박리현상이나 저속의 와류유동을 해석할 때 발생하는 수치점성에 직접적인 관계가 있는 예제로 다음 장에서 확인할 수 있듯이 박리 또는 와류 유동을 정확히 예측할 수 있다.

4.2 shock wave/ boundary-layer interaction

마하수는 2이고 충격파 입사각이 32.5도 인 충격파와 경계층 상호작용 문제이다.

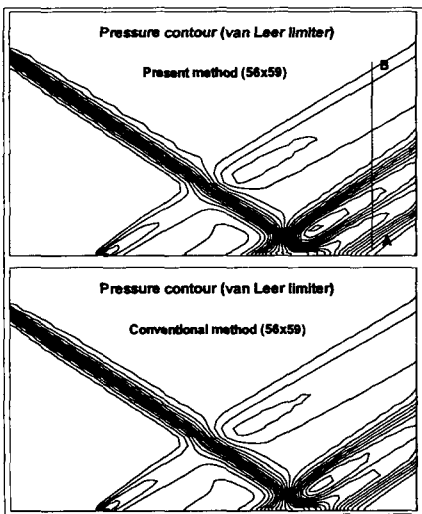


그림 5 압력분포 비교 (van Leer Limiter).

기존 수치기법은 반사 충격파와 유동 팽창 영역 그리고 압축파를 제대로 포착하지 못하지만 present method의 경우 벽면에서 유동 박리 현상을 보다 정확하게 표현할 수 있기 때문에 보다 명확한 유동 구조를 보여준다. 그림 7은 벽면 마찰 계수를 비교한 그림이다. 그리고 그림8을 통해 전체적으로 present method이 유동 박리 영역을 더 크게 예측하고 있음을 알 수 있다. 또한 기존 수치기법의 경우 박리 영역의 구조를 거의 알아 볼 수 없으나 present method는 유동 박리 영역에서 일반적으로 관찰되는

w자 형태 분포를 보여주는 등 유동 구조를 훨씬 더 정확하게 보여준다.

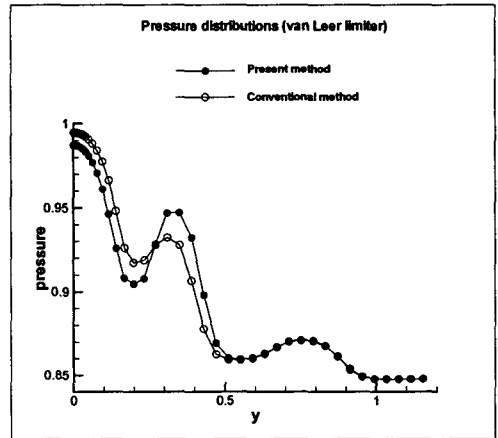


그림 6 선분AB를 따른 압력분포 비교 (van Leer Limiter)

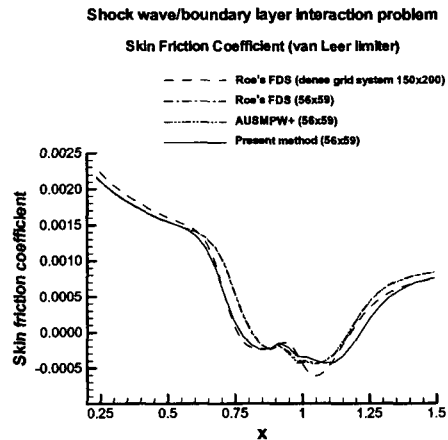


그림 7 벽면 마찰 계수 비교 (van Leer Limiter)

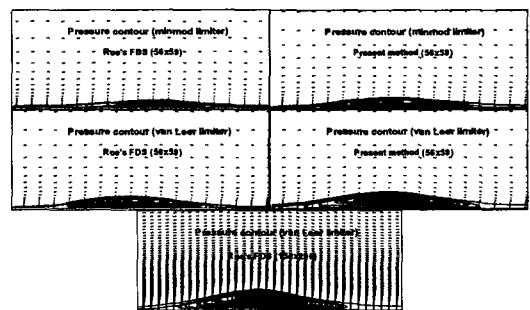


그림 8 수치기법에 따른 박리영역 크기 비교

그림 9는 각 수치기법의 수렴성을 비교한 그림이다. 기존 수치기법 뿐만 아니라 present method 역시 안정적인 수렴성을 보여준다.

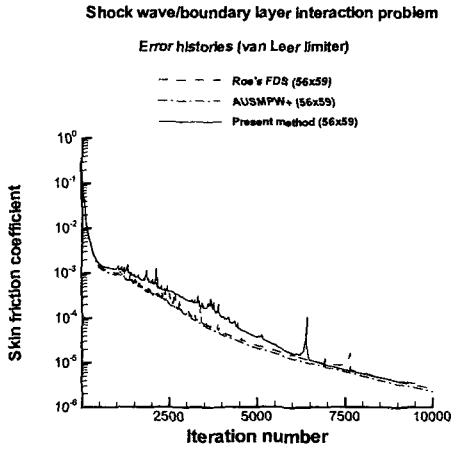


그림 9 수렴성 비교 (van Leer Limiter)

4.3 viscous shock tube 문제

Daru 와 Tenaud [6], Sigreen 와 Yee [7]에서 연구가 수행된 바 있는 수치실험으로 유동 조건은 다음과 같다. 한변의 길이가 1인 정사각형 사각박스 내에 $x=0.5$ 을 기준으로 압력차가 120인 shock tube 문제이다.

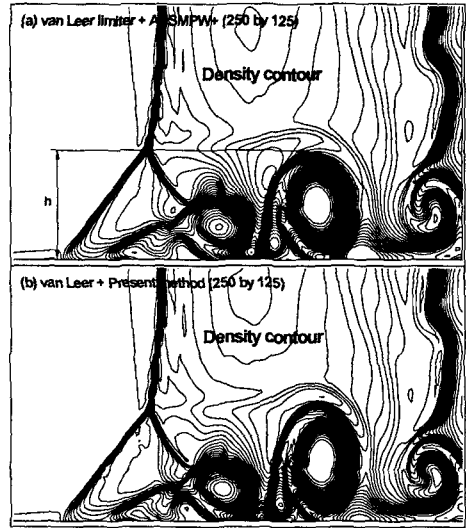


그림 10 밀도 분포 비교 (250 by 125)

충격파가 진행한 뒤 벽에 부딪치고 반사 충격파가 점성 경계층과 상호작용을 하면서 아래와 같은 복잡한 유동 현상을 나타낸다. 초기 조건은 다음과 같다.

$$(\rho, u, v, p)_L = (120, 0, 0, 120/\gamma),$$

$$(\rho, u, v, p)_R = (1, 0, 0, 1/\gamma)$$

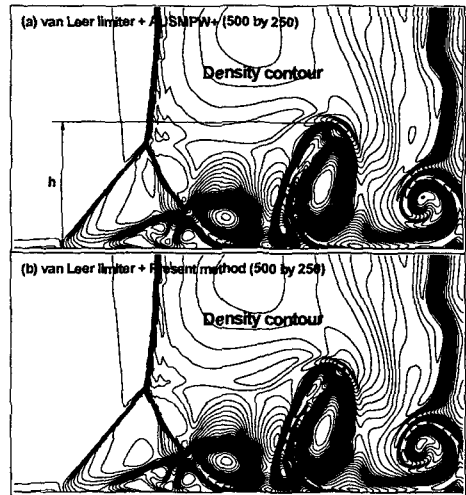


그림 11 밀도 분포 비교 (500 by 250)

주 vortex 유동의 크기와 회전각을 비교해보면 present method가 조밀한 격자계 결과와 보다 가까운 결과를 보여준다.

그림 12은 벽면을 따른 밀도 분포이다.

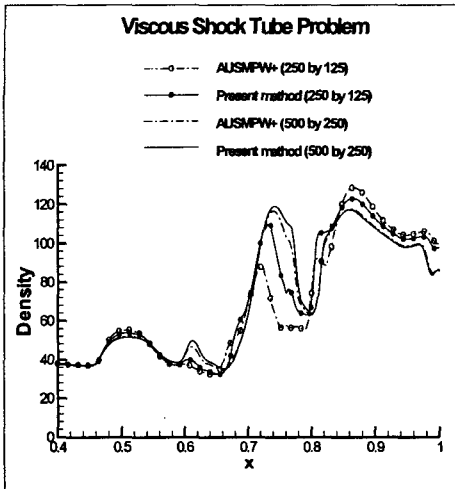


그림 12 수치기법에 따른 밀도 분포 비교

5. 결론

격자계와 유동이 일치하지 않을 경우 발생하는 과도한 수치점성을 줄이기 위해 기존 AUSM계열 수치기법을 개선한 새로운 공간차분법을 개발하였다. 제어면에서 전달 물성치를 새롭게 정의함으로써 격자계와 유동이 일치하지 않을 경우 생기는 수치점성을 효과적으로 줄일 수 있다. shock wave/ boundary layer interaction 문제를 통해 유동과 격자계가 일치하지 않는 박리 영역에서 정확도가 매우 향상된 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] 김규홍, 이경태, 김종암, 노오현, "충격파 영역에서의 AUSM 계열 수치기법의 단조성에 관한 연구," 한국항공우주학회지, Vol. 30, No. 2, 2002, pp. 30-38
- [2] 김규홍, 이경태, 김종암, 노오현, "충격파에서의 물성치 진동현상에 대한 분석과 M-AUSMPW+ 수치기법 개발," 한국항공우주학회지, Vol. 30, No. 3, 2002, pp. 21-29.
- [3] K. H. Kim, C. Kim, and O. H. Rho, "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows, PART I:AUSMPW+ Scheme," J. of Computational Physics, Vol. 174, No. 1, 2001, pp. 38-80.
- [4] P. L. Roe, A Survey of Upwind Differencing

Techniques, Lecture Notes in Physics, Vol 323, 1989, p. 69.

- [5] C. Hirsh, Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1,2, (John Wiley & Sons, 1990).
- [6] V. Daru, C. Tenaud, "Evaluation of TVD high resolution schemes for unsteady viscous shocked flows," Computers and Fluids, 30, 89-113 (2001).
- [7] B. Sjgreen, H. C. Yee, "Grid convergence of high order methods for multiscale complex unsteady viscous compressible flows," J. of Computational Physics, 115, 200-212 (1994).