

완경사 방정식의 확장에 관한 연구

천제호* · 김재중**

*동아대학교 대학원 해양공학과

**동아대학교 토목·해양공학부

A Study on the Extension of Mild Slope Equation

JE-HO CHUN* AND JAE-JOONG KIM**

*Department of Ocean Engineering, Graduate School of Donga University, Busan, Korea

**Department of Civil and Ocean Engineering, Donga University, Busan, Korea

KEY WORDS: 완경사방정식, 비선형 파랑, 비선형완경사방정식, 수정완경사 방정식, 급변 수심, Berkhoff 수중천퇴 실험, Booij's problem

ABSTRACT: In this study, Mild slope equation is extended to both of rapidly varying topography and nonlinear waves in a Hamiltonian formulation. It is shown that its linearized form is the same as the modified mild-slope equation proposed by Kirby and Misra(1998) And assuming that the bottom slopes are very slowly, it is the equivalent with nonlinear mild-slope equation proposed by Isobe(1994) for the monochromatic wave. Using finite-difference method, it is solved numerically and verified, comparing with the results of some hydraulic experiments. A good agreement between them is shown.

1. 서론

Berkhoff(1972)는 미소진폭과와 완만한 경사라는 조건 아래 굴절과 회절을 동시에 고려하는 완경사 방정식을 유도하였다. 완경사 방정식이 제안되기 전까지만 해도 굴절과 회절현상을 따로 고려할 수밖에 없었기 때문에 완경사 방정식은 큰 의미를 가진다.

완경사방정식은 그 식이 간단함과 동시에 파랑계산 결과가 충분히 정확하여 현재까지도 해안공학 전반에 걸쳐 많이 응용되고 있다. 다만, Berkhoff(1972)에 의해 처음 제안된 방정식은 그 계산이 까다롭고 컴퓨터 자원이 많이 소모되고 계산시간이 오래 걸려 계산하기 편리하고 효과적인 형태로 개량되어 사용되고 있다.

Berkhoff 등(1982)는 수중천퇴위로의 파랑변형 실험을 실시하고는 이 때의 수리 실험 결과와 완경사 방정식에 의한 계산 결과를 비교하는 방식으로 완경사 방정식을 검증하였다. 비교결과 완경사 방정식이 굴절과 회절 현상을 비교적 잘 표현하고 있었다. 그러나, 굴절과 회절 현상이 비선형파랑운동에 의해 영향을 많이 받기 때문에 그 정확성에는 일정한 한계가 있었다. 한편, Booij(1983)는 바닥 경사에 대한 완경사 방정식의 정확성의 한계에 관하여 연구를 하였다. Booij의 연구 결과, 완경사 방정식은 바닥의 경사 1:3이상인 경우에는 부정확하다는 결론이 내려졌다.

완경사 방정식을 유도할 때의 가정사항들 때문에 앞서 지적한 것과 같이 완경사 방정식의 정확성에는 일정한 한계가 있었다. 1990년대에 들어 여러 연구자들에 의해 완경사 방정식의 정확성을 향상시키려는 연구가 이뤄졌다. 이 때의 완경사 방정식의 확장은 급변 수심과 비선형 파랑에 대해서 각기 다른 방향에서 이뤄졌다. 이들에 관한 대표적인 연구들을 다음의 Table 1에 정리했다.

Table 1. Researches on the extension of Mild slope equation

Kind of Mild slope equation	Researchers	Approach
Modified Mild-slope equation	Massel(1993)	Galerkin's method
	Chamberlain et al.(1995)	Galerkin's method
	Kirby et al.(1998)	Hamiltonian principle
Nonlinear Mild-slope equation	Kirby et al.(1992)	Heuristic approach
	Isobe(1994)	Euler-Lagrange equation
	Tsay et al.(1996)	Hamiltonian principle
	Lee et al.(2000)	Galerkin's method

제 1저자 천제호 연락처:부산시 사하구 하단2동
051-200-6768 eulia01@hotmail.com

수정완경사 방정식과 비선형완경사 방정식에 관한 연구 중 대표적으로 Kirby and Misra(1998)과 Isobe(1994)의

연구 등을 들 수 있다. 이들에 대해 다음과 같이 간략히 소개할 수 있다.

Kirby and Misra(1998)은 시간·평면에 대한 속도 potential 함수 ϕ 와 수면변위 η 등에 대한 수정완경사 방정식을 성공적으로 유도하였다. Kirby and Misra(1998)의 식을 시간에 대해 독립형으로 정리하면 Massel(1993)과 같은 식을 얻는다.

Isobe(1994)는 속도 potential 함수 $\Phi(x, y, z, t)$ 를 N 개의 성분을 가지고는 있는 속도 potential 함수의 합으로 표현한 후, 불규칙파에 대해 다음과 같은 비선형 완경사 방정식을 유도하였다. 수중잡제에 관한 수리실험과 그 결과를 비교하였는데, 비교적 잘 일치하고 있었다.

2. 지배 방정식

2.1 지배방정식의 유도

Hamiltonian H 는 운동에너지와 위치에너지의 합을 의미하는 데, 대개 Hamiltonian density H 를 사용하여 다음의 식 (1)과 같이 정의한다.

$$H = \iint_A H dx dy \quad (1)$$

위의 식 (1)의 Hamiltonian H 를 다음의 식 (2)와 같은 canonical equations에 대입하여 수면변위 η 와 자유수면에서의 속도 potential 함수 ϕ 에 관한 파동방정식을 유도할 수 있다. 이 때, 식 (2)는 각각 운동학적자유수면경계조건(KFSBC)과 동역학적자유수면경계조건(DFSBC)에 해당된다. (Radder, 1999)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta} \quad \text{at } z = \eta \quad (2)$$

Hamiltonian density H 는 단위면적당 파랑의 총에너지로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H = \frac{g\eta^2}{2} + \int_{-h}^{\eta} ((\nabla \Phi)^2 + (\Phi_z)^2) dz$$

여기서, η 와 Φ 는 각각 수면변위와 시·공간에 대한 속도 potential 함수를 말한다. 위의 Hamiltonian density H 는 Taylor 급수 전개를 이용하여 다음의 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$H = \frac{g\eta^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{-h}^0 ((\nabla \Phi)^2 + (\Phi_z)^2) dz$$

$$+ \frac{\eta}{2} ((\nabla \Phi)^2 + (\Phi_z)^2)_{z=0} + O(\eta^3) \quad (3)$$

여기서, 시·공간에 관한 속도 potential 함수 Φ 를 임의의 수직 분포 함수 $f(z)$ 와 시간-수평에 관한 함수 $\phi(x, y, t)$ 의 곱으로 가정한다. 그리고, 본 연구에서는 이 수직분포함수 $f(z)$ 를 $\cosh k(z+h)/\cosh kh$ 로 가정한다. 이와 같은 수직분포함수는 Kirby and Misra(1998)와 Lee and Park(2000)이 각각 수정완경사 방정식과 비선형 완경사 방정식을 유도할 때 사용한 것과 같다. 이 수직분포함수는 deep water wave 와 shallow water wave 모두에 적용이 가능하다는 특징이 있다. (Isobe, 1994)

한편, canonical equations (2)에서 $\delta\phi$ 와 $\partial\phi/\partial t$ 등을 Taylor 급수 전개를 이용하여 다음의 식 (4.1)과 식 (4.2)와 같이 $z=0$ 에 대한 canonical equations으로 근사하여 나타낸다.

$$(f_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \phi} \quad \text{at } z = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta} - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=0} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{at } z = 0 \quad (4.2)$$

여기서, $f_{z=\eta}$ 는 Taylor series를 이용하여 $z=0$ 에 대한 외삽법에 의해 $f_{z=\eta} = 1 + \eta k \tanh kh$ 와 같이 주어진다.

식 (3)의 Hamiltonian density H 를 위의 canonical equations에 대입하여 다음과 같은 지배 방정식을 얻는다. (천, 2002)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & -\nabla \left(\left(\frac{CC_a}{g} + \eta \right) \nabla \phi \right) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_a}{g} \phi \\ & + \eta (k \tanh kh)^2 \phi - \eta k \tanh kh \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & - I_3 \nabla^2 h \phi - \left(\frac{\partial I_3}{\partial h} - I_4 \right) (\nabla h)^2 \phi \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & -g\eta - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} (k \tanh kh \phi)^2 \\ & - \eta k \tanh kh \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 위의 식 (6)에서 I_3 와 $\partial I_3/\partial h - I_4$ 는 Kirby and Misra(1998)의 값을 따른다.

위의 식 (6)의 우변의 세 번째 항은 $(\Phi_z)_{z=0}$ 과 같은데, 이를 linearized KFSBC에 의해 η 로 나타낼 수 있다. 그 결과, 위의 식 (6)은 최종으로 다음의 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{(\nabla \phi)^2}{2} - \frac{(\eta_t)^2}{2} - \eta k \tanh kh \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7)$$

2.3 다른 방정식과의 비교

2.3.1 수정완경사 방정식

바다경사는 충분히 급하고 진폭의 크기는 무시할 수 있을 정도로 작다는 가정 아래, 수정완경사 방정식을 유도한다. 본 연구의 지배방정식인 식 (5)과 식 (7)을 진폭의 크기 a 의 1차에 대해서 다음과 같이 정리한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\nabla \left(\frac{CC_g}{g} \nabla \phi \right) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{g} \phi \\ &\quad - I_3 \nabla^2 h \phi - \left(\frac{\partial I_3}{\partial h} - I_4 \right) (\nabla h)^2 \phi + O(a^2) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -g\eta + O(a^2) \end{aligned}$$

이 때, $O(a^2)$ 이상의 항들은 모두 소거하여 선형화하면 Kirby and Misra(1998)가 구한 수정완경사 방정식과 같은 방정식을 얻는다. 한편, 바닥의 경사도 무시할 수 있을 정도로 충분히 작다고 하면 지배 방정식 식 (5)과 식 (7)은 Radder and Dingemans(1985)가 구한 완경사 방정식과 같다.

2.3.2 비선형완경사 방정식

규칙파에 대해 본 연구에서 가정한 수직분포 함수를 적용하면 Isobe(1994)의 식들은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (1 + \eta k \tanh kh) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left(\left(\frac{CC_g}{g} + \eta \right) \nabla \phi \right) \\ - \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{g} \phi - \eta (k \tanh kh)^2 \phi = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + \eta k \tanh kh) \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \\ - \frac{1}{2} (k \tanh kh \phi)^2 \quad (9) \end{aligned}$$

여기서,

$$f^n \cong f_{z=0} + \eta k \left(\frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \right)_{z=0} = 1 + \eta k \tanh kh$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^{\eta} f^2 dz = \int_0^{\eta} f^2 dz + \int_{-h}^0 f^2 dz \\ &\cong \eta (f^2)_{z=0} + \frac{CC_g}{g} = \eta + \frac{CC_g}{g} \end{aligned}$$

$$B = \int_{-h}^{\eta} f_z^2 dz = \int_0^{\eta} f_z^2 dz + \int_{-h}^0 f_z^2 dz$$

$$\cong \eta (k \tanh kh)^2 + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{g}$$

$$\frac{\partial f^n}{\partial h} \nabla h = \nabla f^n = 0$$

위의 식 (8)과 식 (9)는 충분히 작은 바다 경사일 때의 본 연구의 방정식과 그 형태가 일치하고 있다.

3. 수치해석

지배방정식 식 (5)과 식 (7)을 시·공간에 대해 중앙차분화한 다음 수치해석 기법을 이용하여 방정식을 푼다. (천, 2002) 이 때, 사용하는 수치해석 방법은 explicit scheme의 일종이므로, 다음의 식 (10)과 같은 식을 만족해야만 안정된 계산 결과를 얻는다.

$$Cr = C_r \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (10)$$

여기서, Δt 와 Δx 등은 각각 시간의 격자간격, 공간의 격자간격을 말하고 C_r 는 파의 위상속도를 말한다.

경계조건은 vertical wall 경계와 open 경계 등으로 나누어 처리한다. 여기서, vertical wall 경계는 다음의 식 (11)과 같이 완전 반사조건으로 처리한다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{n}} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (11)$$

여기서, \bar{n} 은 경계 부위에 대해 수직한 방향을 나타내는 vector다. 그리고, open boundary 는 계산의 안정성을 위해서 흡수 경계층 기법을 사용하여 처리한다.

내부조파기법을 사용하여 계산 영역 내에 파를 생성시킨다. 이 방법은 Larsen and Dancy(1983) 등에 의해 처음 제안되었는데, Wei 등(1999)과 이와 조(1998)에 의해 이 방법의 효율성이 검토되었다.

본 지에서는 내부조파 기법과 흡수경계층 기법을 검증할 목적으로 수심이 1m 로 일정한 장방형의 수조에 대해서 파랑 전달을 계산한다.

이 때의 파랑 조건으로는 파고는 0.01m, 주기는 1sec를 이용하여 100sec 동안 계산하였다. 이 때, 파는 중앙의 25m 지점에서 생성하며, 양옆의 5m 구간에 흡수경계층을 두어 계산 영역 내부로 파의 반사를 제거하였다. 이 때, 10sec, 20sec, 40sec, 100sec일 때의 계산결과를 다음의 Fig.1 에 나타내었다.

4. 모델의 검증

4.1 Berkhoff 등(1982)의 수리실험

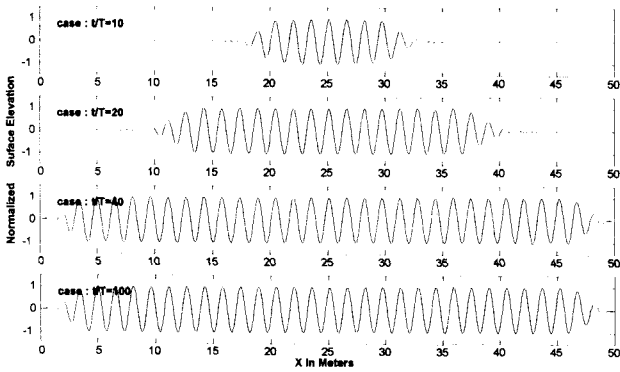


Fig. 1 Snapshots of Surface Elevation at times ($t/T=10,20,40,100$)

본지에서는 Berkhoff 등(1982)의 수리실험 결과와 비교하여 모델의 정확성을 검증한다. Berkhoff 등(1982)의 수리실험에서 사용되는 지형은 다음의 Fig. 2에 나타내었다.

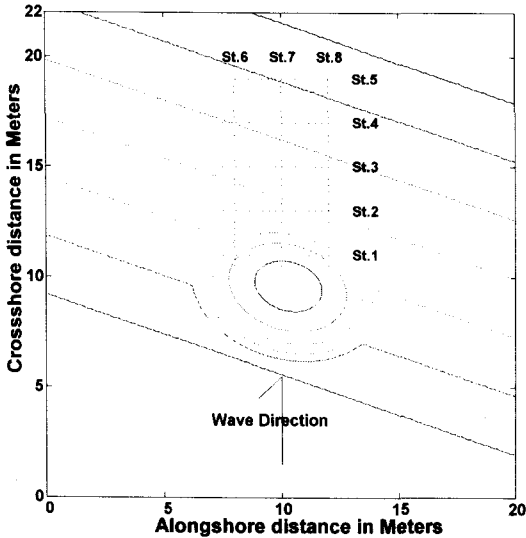


Fig. 2 Contour map of water depth in the experiment of Berkhoff et al.(1982)

Berkhoff 등(1982)의 수리실험에서 사용되는 지형은 위의 Fig.2 에서도 보이는 것처럼 일정하게 경사진 바닥과 수중천퇴로 구성되는데, 이와 같은 지형의 형상 때문에 굴절과 회절이 동시에 일어난다. 그리고, 이 실험에서는 파랑변형 현상이 비선형파랑 운동의 효과에 영향을 받는다. 이러한 특성 때문에 다른 비선형 파동방정식을 검증할 때, Berkhoff 등(1982)의 수리실험결과와 비교한다.

위의 Fig.2의 지형에 대해 입사파고와 주기를 수리실험에서 사용한 파랑 조건인 0.02m와 1sec 등을 각각 사용하고, 시간과 공간에 대한 격자 간격을 각각 0.1m와 0.01sec 등을 사용한 후, 수치해석을 실시하였다. 한편, 수리실험 외에 선형파와도 비교하기 위해서 Watanabe and Maruyama(1986)의 방정식을 위와 같은 조건으로 풀었다.

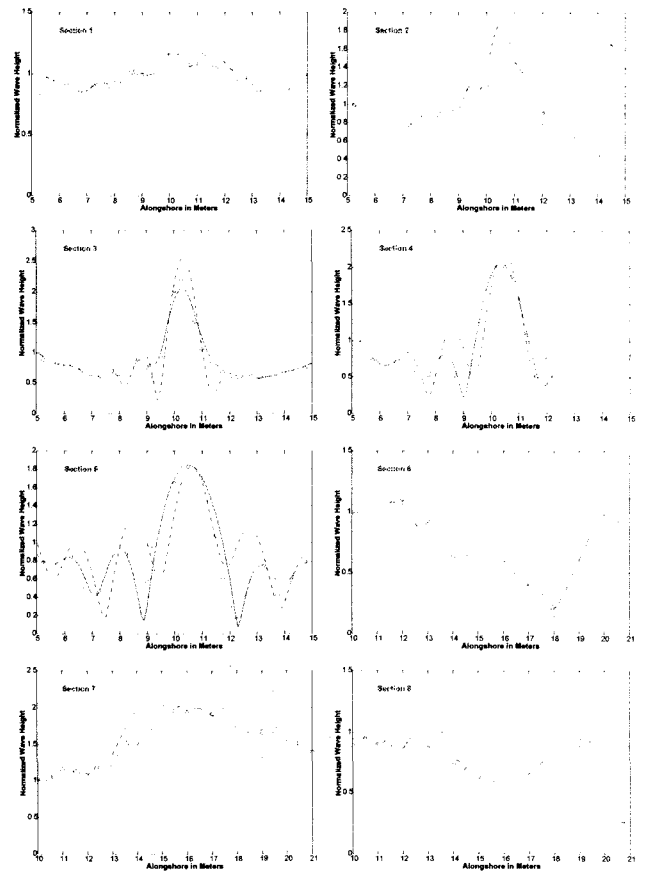


Fig. 3 Comparison among calculations of Watanabe and Maruyama(1986) (dashed lines), calculations of present study(solid lines), and experimental data of Berkhoff et al.(1982) (circle points)

본 연구와 Watanabe and Maruyama(1986)의 파랑 방정식을 계산한 결과들을 앞의 Fig. 2에 표시한 section 1~8에서의 입사파고에 대한 파고비도 Fig.3에 나타내어 함께 비교하였다.

비교한 결과, 전반적으로 본 연구의 계산 결과가 Watanabe and Maruyama (1986)의 계산 결과보다 더욱 잘 일치하고 있는 것이 관찰된다. 비록, section 1과 section 3에서는 중앙부분에서의 본 연구의 계산 결과가 수리실험 결과보다 약간 낮은 값이 얻어지고 있으나, 일단은 대체로의 변화 경향은 본 연구의 계산 결과가 더욱 잘 맞는다. 그리고, section 5와 section 6과 같은 곳에서는 Watanabe and Maruyama(1986)의 계산결과와 본 연구의 계산결과가 뚜렷한 차이를 보이면서, 본 연구의 계산 결과가 실제의 수리실험 값에 더욱 가깝다.

4.2 Kittitanasuan 등(1993)의 수리실험

Kittitanasuan 등(1993)은 다음의 Fig.4와 계단 모양의 지형에 대해서 수리실험을 실시하였다. 계단을 지나기 전에는 선형파의 양상을 보이다가 계단을 지나면서부터 분명한 비선형파의 양상을 보인다.

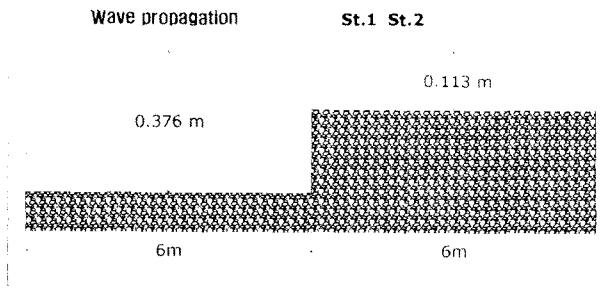


Fig. 4 Experimental set-up for waves over a step (Kittitanasuan et al., 1993)

입사파고와 주기가 각각 1.63cm와 1.85sec 인 파에 대해서 수리실험을 실시하는데, 위의 Fig 4에서 보이는 St.1과 St.2의 지점에서 40초 동안의 수면변위 자료를 얻는다.

한편, 수리실험과 똑같은 조건에 시간 격자 간격과 공간격자 간격을 각각 0.1m 와 0.01cm라 한 후, 수치모의 실험을 실시한다. 위의 Fig. 4에 보이는 St.1과 St.2에서의 계산결과를 실험 결과와 비교하여 다음의 Fig.5과 Fig. 6에 나타내었다.

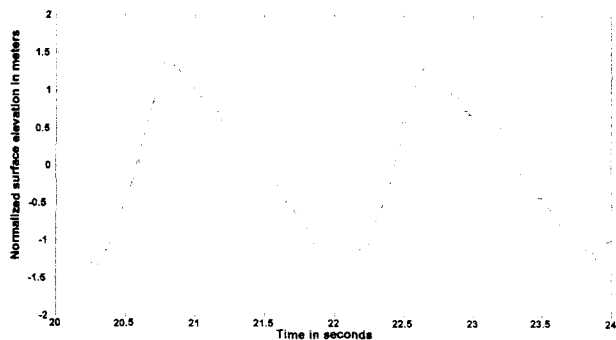


Fig. 5 Comparison between the experimental data (cross points) and the computational results (solid lines) at St.1

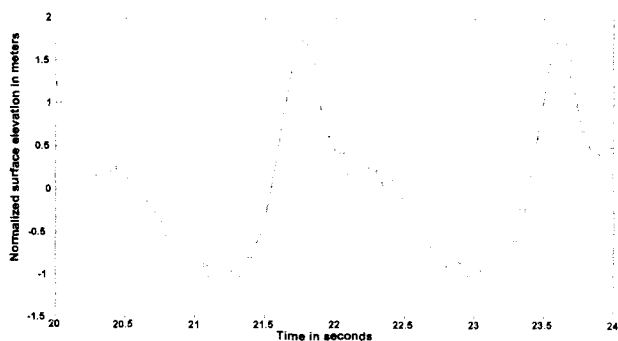


Fig. 6 Comparison between the experimental data (cross points) and the computational results (solid lines) at St.2

Fig.5 과 Fig.6에서의 비교결과, 파곡부분에서 수치실험 결과가 수리실험 결과보다 그 값이 약간 큰 단점이 있지만, 대체로 잘 일치하고 있다.

4.3 Booij(1983)'s problem

Booij(1983)는 다음의 Fig. 7에서 보이는 것과 같은 지형에 대해 환경사 방정식과 Navier-Stoke's 방정식을 적용하여 기존의 환경사 방정식이 적용할 수 있는 경사의 한계에 관하여 연구하였다.

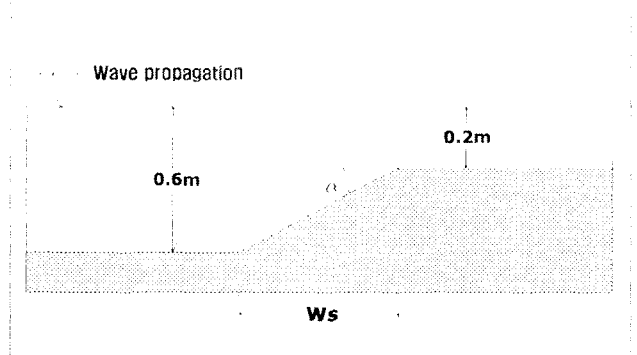


Fig. 7 Topography for Booij's problem(Booij, 1983)

연구결과, 환경사 방정식이 적용될 수 있는 바닥의 경사의 한계는 1:3이었다. Massel(1993)은 Galerkin's method를 적용하여 기존의 환경사 방정식을 급변 수심에 대해서 확장하여 급변 수심에서도 정확하도록 개량하는데에 성공하였다.

본 연구에서도 위의 Fig. 7에서의 W_s 의 크기를 조절하는 방법으로 바닥의 경사도의 변화에 따른 파랑변형을 계산하였다. 이 때의 계산결과를 다음의 Fig. 8에 나타내었다.

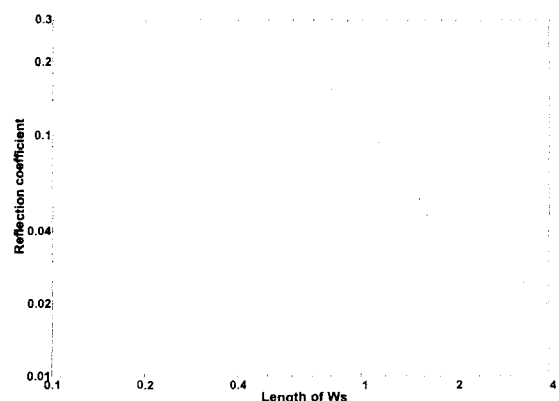


Fig. 8 Reflection coefficients calculations, original mild-slope equation (solid lines), Navier-Stoke's equation(circle points), the present study(cross points)

5. 결 론

Hamiltonian principle을 이용하여 기존의 환경사 방정식을 급변 수심과 비선형 파랑에 대해서 확장하였다. 이때, 얻은 파랑변형에 대한 방정식을 몇 가지의 방정식과 비교하여 보았다. 먼저, 본 연구에서 얻은 방정식을 선형화하여, Kirby and Misra(1998)이 구한 Hamiltonian principle을 이용하여 구한 수정환경사 방정식과 같음을 보였다. 그리고, Isobe(1994)가 Euler-Lagrange 방정식을 이용하여 구한 방정식에 대해 본 연구에서 가정한 수직 분포함수 등을 대입하면 같은 방정식을 얻을 수 있음을 보였다.

한편, 확장된 방정식에 대해 CTCS(Centered in Time and Centered in Space)기법을 이용하여 수치해석을 실시한 후, 몇몇 수리 실험과 비교하여 검증을 시도하였다. 비선형파랑과 급변 수심에 대한 확장을 검증할 목적으로 Berkhoff 등(1982)의 수리실험, Kittitanasuan 등(1993)의 수리실험, 그리고 Booij(1983)의 문제 등과 비교하였다. 전반적으로 만족할만한 결과를 얻을 수 있었다. 특히, Berkhoff 등(1982)의 수리실험과 비교할 때에는 선형의 환경사 방정식과 함께 비교하였는데, 비교적 만족할만한 결과를 얻을 수 있었다.

후 기

동아대학교 지능형통합항만관리연구센터의 연구비 지원에 대해 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 이창훈, 조용식 (1998). "Boussinesq 방정식에서의 내부 조파", 한국 해안-해양공학회 학술강연회 논문집, pp.72~77
- 천계호 (2002) "수정환경사 방정식의 비선형 확장에 관한 연구", 석사학위 논문, 동아대학교 대학원
- Berkhoff, J.C.W.(1972), "Computation of combined Refraction and Diffraction", Proc. 13rd Int'l Conf. on Coastal Eng. ASCE, pp.471~490
- Berkhoff, J.C.W, Booij, N. and Radder, A.C. (1982). "Verification of Numerical Wave Propagation of Models for Simple Linear Wave", Coastal Eng., Vol 6, pp.225~279
- Booij, N. (1983), "A Note on the Accuracy of the Mild-Slope Equation", Coastal Eng. Vol 7, pp.191~203
- Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995) "The Modified Mild-Slope Equation", J. Fluid. Mech. Vol 291, pp.393~407
- Isobe, M. (1994), "Time Dependent Mild Slope Equation for Random Waves", Proc. of the 24th Int'l Conf. Coastal Eng., ASCE, pp.285~299
- Kirby, J.T. and Misra, M.K. (1998) "A Note on the Modified Mild-Slope Equation", CACR-98-07, Center for Applied Coastal Research, University of Delaware
- Kittitanasuan, W and Goda, Y. (1993) "Deformation on Nonlinear Waves on a Rectangular Step", Coastal Eng. in Japan, Vol 36(2), pp.133~153
- Lee, J.L and Park, C.S. (2000), "Development of Weakly Nonlinear Wave Model and its Numerical Simulation", J. of Korean Soc. of Coastal and Ocean Engineers, Vol 12(4), pp.181~189
- Massel, S.R. (1993), "Extended Mild-Slope Equation for Surface Waves", Coastal Eng. Vol 19, pp.97~126
- Radder, A.C. and Dingemans, M.W., (1985), "Canonical Equations for Almost Periodic, Weakly Nonlinear Gravity Waves", Wave Motion Vol 7, pp.473~485
- Radder, A.C (1999) "Hamiltonian Dynamics of Water Waves", Adv. in Coastal and Ocean Eng. Vol 4, Ed. Philip L-F Liu, World Scientific Pub. Co.
- Tsay, T-K., Liu, P.L-F, and Wu, N.J. (1996) "A Nonlinear Model for Wave Propagation", Proc. of the 25th Int'l Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.581~601
- Watanabe, A. and Maruyama, K. (1986), "Numerical Modeling of Nearshore Wave Field Under Combined Refraction, Diffraction and Breaking", Coastal Eng. in Japan Vol 29, JSCE, pp.19~39
- Wei, G., Kirby, J.T. and Sinha, A. (1999) "Generation of Waves in Boussinesq Models Using a Source Function Method", Coastal Eng. Vol 36, pp.271~299