

라게르 함수를 이용한 도선 안테나의 과도 해석

김형진*, 김청수*, 박재권*, 정백호**

*호서대학교 벤처전문대학원, **호서대학교 전기정보통신공학부

Transient Analysis of Conducting Wire Antennas Using Laguerre Polynomials

Hyung Jin Kim*, Chung Soo Kim*, Jae Kwon Park*, Baek Ho Jung**

*Graduate School of Venture, Hoseo University

**Department of Information and Communication Eng., Hoseo University

Abstract - In this work, a new formulation is presented for analyzing the transient electromagnetic response from wire antennas using the time-domain integral equation. The solution method is based on the Galerkin's method that involves separate spatial and temporal testing procedures. Piecewise triangle basis functions have been used for spatial expansion functions for arbitrarily shaped wire structures. The time-domain variation is approximated by a set of orthonormal basis functions that are derived from the Laguerre polynomials. The method presented in this paper results in very stable transient responses from wire antennas.

1. 서 론

전자기 문제에서 해석 구조의 도선 모델링은 매우 중요한 역할을 하였으며, 도선 산란체와 안테나의 경우 주파수영역의 적분방정식에 모멘트법을 적용하여 해를 구하였다 [1]. 이때 델타전원을 인가하여 직선 조각으로 모델링된 도선의 전류분포를 계산하였으며, 이로부터 안테나의 입력전류 및 임피던스, 그리고 복사전장 등의 파라미터를 얻을 수 있었다. 주파수영역 적분방정식을 이용하여 광대역 해를 구하기 위해서는 주파수를 달리 선택하여 계산을 반복하여야 한다. 그러나 시간영역의 적분방정식을 사용하는 경우 광대역 스펙트럼을 가지는 펄스 전원을 사용하여 한번의 계산으로 응답을 얻을 수 있다.

시간영역 적분방정식의 해를 구하기 위하여 MOT (marching-on in time) 방법이 일반적으로 사용되었다 [2]. 이 알고리즘의 단점은 계산 회수가 증가할수록 해가 급격히 진동하는 후기 불안정이 발생하는 것이다. 그러나 구조로부터 전자기 과도응답을 계산하기 위하여 MOT를 이용한 다수의 논문들이 발표되었으나 해의 정확성과 안정성은 시간간격의 선택에 여전이 의존하였다 [3], [4].

본 논문에서는 라게르 다항식을 시간영역의 전개함수로 도입하여 임의 형태의 선도체 안테나로부터 무조건 안정된 응답을 얻기 위한 새로운 기법을 제안한다. 라게르 함수의 변수는 0부터 무한대까지 정의되므로 과도문제의 해석에 더 적합하다 [5]. 라게르 다항식과 감쇄 지수함수를 사용함으로써 직교성을 가진 전개함수를 구성하여 시간의 함수인 과도응답의 미지수는 이 기저함수에 의하여 표현된다. 그러므로 이 기저함수의 감쇄 특성으로 과도 응답은 시간이 무한대로 진행함에 따라 0으로 무조건적으로 수렴한다. 시간영역에서 내적을 취하는 과정은 공간영역의 시험과정과 유사한 갤러킨 방법을 사용

하였다. 다음 장에서 시간영역 적분방정식으로부터 공간 및 시간영역의 내적과 행렬식의 유도 과정을 보인다.

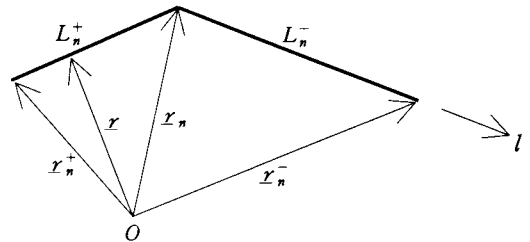


그림 1. 선도체의 분할과 위치 벡터.

2. 시간영역 적분방정식

본 장에서는 선도체 안테나에 전원이 인가될 때 시간영역 전장 적분방정식으로부터 유기전류를 얻기 위한 행렬식을 유도한다. 전자파원으로 조사된 선도체를 고려한다면 선도체 표면 S에서 전장의 접선성분은 모든 시간에서 0이라는 경계조건으로부터 적분식은 다음과 같다.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \right]_{\tan} = [\mathbf{E}^i(\mathbf{x}, t)]_{\tan}, \quad \mathbf{x} \in S \quad (1)$$

여기서 \mathbf{E}^i 는 입사파의 전장, \mathbf{A} 와 ϕ 는 각각 벡터 및 스칼라 전위이며, 첨자 'tan'은 접선성분을 나타낸다. 식 (1)에서 도선이 매우 가늘다고 가정하여 \mathbf{A} 와 ϕ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{I}(\mathbf{x}', \tau)}{R} d\mathbf{l}' \quad (2)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_L \frac{q(\mathbf{x}', \tau)}{R} d\mathbf{l}' \quad (3)$$

$$R = \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 + a^2}, \quad \tau = t - R/c$$

여기서 \mathbf{I} 는 도선의 축인 l 방향을 따르는 전류 벡터이며(그림1), q 는 선전하밀도이다. 그리고 R 은 전원점 \mathbf{x}' 과 관측점 \mathbf{x} 사이의 거리를 나타내며, a 는 선도체의 반경이다. τ 는 지연시간, μ 와 ϵ 은 도선이 놓인 공

간의 투자율과 유전율, c 는 자유공간에서 전파가 전파 되는 속도이다. 연속방정식에 의하여 전류밀도 q 와 전류 벡터 I 의 관계는 다음과 같다.

$$\nabla \cdot I(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) \quad (4)$$

해석의 대상이 되는 선도체 구조는 여러 개의 직선 조각으로 근사된다. 그림 1과 같이 접하는 두 개의 선조각 L_n^{\pm} 에 대한 전류의 공간 전개함수는 다음과 같이 정의된다.

$$E_n(x) = E_n^+(x) + E_n^-(x) \quad (5-1)$$

$$E_n^{\pm}(x) = \begin{cases} \pm \frac{I_n^{\pm}}{\Delta L_n^{\pm}}, & x \in L_n^{\pm} \\ 0, & x \in L_n^{\mp} \end{cases} \quad (5-2)$$

$$\Delta L_n^{\pm} = |x_n - x_n^{\pm}|, \quad L_n^{\pm} = x - x_n^{\pm}$$

식 (1)에 식 (3)을 사용한다면 식 (4)의 관계로부터 전류에 대한 적분항이 발생한다. 이 문제를 피하고 벡터 전위의 시간에 대한 미분을 해석적으로 처리하기 위하여 다음과 같이 식 (1)을 미분하고자 한다.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x, t) + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) \right]_{\tan} = \left[-\frac{\partial}{\partial t} E^i(x, t) \right]_{\tan} \quad (6)$$

$x \in S$

식 (5)의 삼각형 함수를 이용하면 전류 벡터를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$I(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) E_n(x) \quad (7)$$

여기서 c_n 은 미지계수이며, N 은 도선을 직선 조각으로 모델링하였을 때, 2개의 선조각이 이루는 도선의 공유절점의 전체 개수이다.

갤러킨 방법으로 식 (6)을 풀기 위하여 전개함수 $E_m(x)$ 을 공간 시험함수로 사용하여 내적을 수행하면 그 결과는 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \left[\mu a_{mn}^{pq} \frac{d^2}{dt^2} c_n(\tau_{mn}^{pq}) + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} c_n(\tau_{mn}^{pq}) \right] = V_m(t) \quad (8)$$

$m = 1, 2, \dots, N$

여기서

$$a_{mn}^{pq} = \frac{1}{4\pi} \int_L E_m^p(x) \cdot \int_L \frac{E_n^q(x')}{R} dl' dl \quad (9)$$

$$b_{mn}^{pq} = \frac{1}{4\pi} \int_L \nabla \cdot E_m^p(x) \int_L \frac{\nabla' \cdot E_n^q(x')}{R} dl' dl \quad (10)$$

$$V_m(t) = \int_L E_m(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} E^i(x, t) dl \quad (11)$$

이다. 식 (8)에서 선조각 L_n^{\pm} 내에서 미지계수의 변화가 거의 없다고 가정하여

$$\tau = t - \frac{R}{c} \rightarrow \tau_{mn}^{pq} = t - \frac{R_{mn}^{pq}}{c}$$

$$R_{mn}^{pq} = \sqrt{|x_m^{cp} - x_n^{cq}|^2 + a^2}$$

으로 두었다. 여기서 p 와 q 는 + 또는 -이며, x_n^{ct} 는 선조각 L_n^{\pm} 의 중앙을 나타내는 위치벡터이다.

시간영역의 전개함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_j(t) = e^{-t/2} L_j(t) \quad (12)$$

여기서 L_j 는 라케르 함수이며, j 는 그 차수이다. 식 (7)에서 도입된 미지계수는 식 (12)를 사용하면 다음과 같이 표현된다.

$$c_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,j} \phi_j(st) \quad (13)$$

여기서 $c_{n,j}$ 는 미지계수이며, s 는 시간확장 파라미터이다. 식 (13)을 식 (8)에 대입한 다음, 시간영역의 시험함수 $\phi_i(st)$ 를 곱하여 $st=0$ 부터 무한대까지 적분하는 내적을 취하면

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) c_{n,j} + s^2 \mu a_{mn}^{pq} \sum_{k=0}^{j-1} (j-k) c_{n,k} \right] I_{ij} \left(s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) = V_{m,i} \quad (14)$$

을 얻을 수 있다. 여기서

$$I_{ij} \left(s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) = \int_0^{\infty} \phi_i(st) \phi_j \left(st - s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) d(st) \quad (15)$$

$$V_{m,i} = \int_0^{\infty} \phi_i(st) V_m(t) d(st) \quad (16)$$

이다. 식 (15)에서 정의된 적분의 결과는 다음과 같다 [6].

$$I_{ij}(y) = \begin{cases} \phi_{i-j}(y) - \phi_{i-j-1}(y), & j \leq i \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (17)$$

여기서 $y = sR_{mn}^{pq}/c$ 이다. 식 (17)로부터 $j > i$ 일 때 $I_{ij} = 0$ 임을 이용하면 식 (14)에서 j 에 관한 합의 기호 상한을 ∞ 대신에 i 로 적을 수 있다. 이 결과에서 $j < i$ 에 해당되는 계수 $c_{n,j}$ 를 포함하는 모든 항을 우변으로 이항하면 최종적으로 식 (14)를 다음과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$[a_{mn}] [c_{n,i}] = [\gamma_{m,i}], \quad i = 0, 1, \dots, \infty \quad (18)$$

여기서 각 행렬요소는 다음과 같다.

$$a_{mn} = \sum_{p,q} \left(\frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) \exp \left(-s \frac{R_{mn}^{pq}}{2c} \right) \quad (19)$$

$$\gamma_{m,i} = V_{m,i}$$

$$- \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \left[\left(\frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^{i-1} c_{n,j} I_{ij} \left(s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) \right]$$

$$+ s^2 \mu a_{mn}^{p0} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-1} (j-k) c_{n,k} I_{ij} \left(s \frac{R_{mn}^{p0}}{c} \right) \quad (20)$$

식 (18)의 행렬 $[a_{mn}]$ 은 식 (19)에서 보듯이 시간영역 시험함수의 차수 i 와는 무관하다. 따라서 행렬식 (18)의 계산시 한 번의 역행렬 계산이 필요하며, 차수를 $i=0$ 부터 증가시키는 방법으로 계산을 반복하여 미지계수를 얻을 수 있다. 주파수영역에서 대역이 B 이고 시간영역에서 T_f 까지 관찰되는 신호를 가정한다면, 식 (18)을 계산할 때 시간영역 전개함수의 최소 개수는 $M=2BT_f+1$ 이 된다 [6]. 따라서 식 (18)에서 적분의 상한인 ∞ 대신에 sT_f 를 쓸 수 있다.

3. 수치 결과

본 장에서는 제안된 방법으로 계산된 도선 안테나의 수치결과를 보인다. 계산에 사용된 도선의 반경은 0.005 m로 두었다. 도선 안테나에 인가되는 전원은 델타 간격(delta gap)모델이며, 전압은 다음과 같이 가우시안 전원 전압이 인가된다고 가정한다.

$$V(t) = \frac{4}{\sqrt{\pi T}} \exp \left[- \left\{ \frac{4}{T} (ct - ct_0) \right\}^2 \right] \quad (21)$$

여기서 T 는 가우시안 펄스의 폭이며, t_0 는 $t=0$ 로부터 펄스가 최대값이 되는 지연시간이다. 계산시 펄스폭은 $T=4$ lm이고, $ct_0=6$ lm로 하였다. 단위 'lm'은 자유공간에서 전파가 1 m 전파되는 시간이다. 그리고 $s=10^9$ 과 $M=80$ 으로 두었다. 제안된 방법으로 계산된 결과를 동일한 공간 전개함수를 이용하여 주파수영역의 전장적분식으로부터 계산한 해의 IDFT (inverse discrete Fourier transform)와 비교한다.

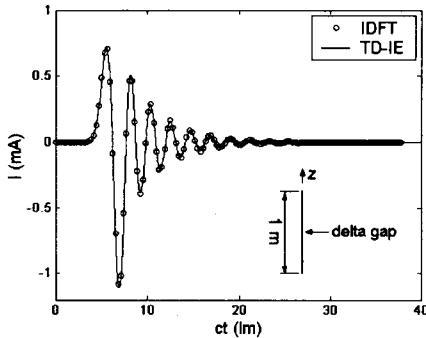


그림 2. 다이폴 안테나의 입력전류.

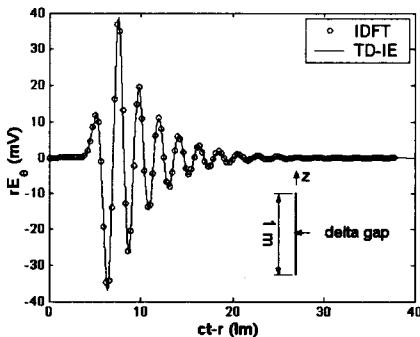


그림 3. 다이폴 안테나의 복사전장.

그림 2는 길이가 1 m이며 z 축에 놓인 다이폴 안테나의 입력전류이다. 전원은 다이폴의 중앙에 인가되며 계산시 다이폴을 20 등분하였다. 계산된 전류로부터 $\theta=90^\circ$ 방향의 원거리 복사장은 그림 3과 같다. 제안된 방법으로 계산된 다이폴의 전류와 전장은 후기 진동없이 안정되어 있으며, 주파수영역의 해와 매우 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

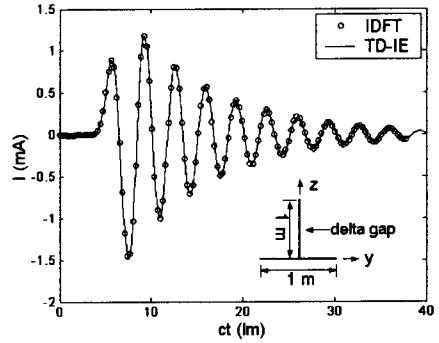


그림 4. T형 도선 안테나의 입력전류.

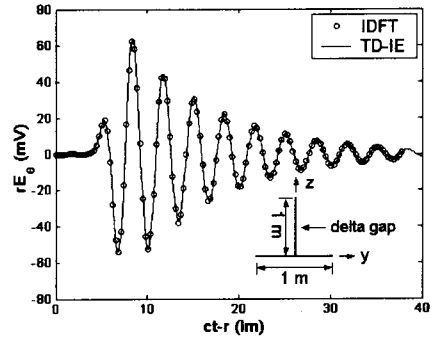


그림 5. T형 도선 안테나의 복사전장.

그림 4와 5는 각각 T형 도선 안테나의 입력 전류 및 복사장을 보이고 있다. z 및 y 축에 놓인 도선은 길이가 1 m이며, 각각 20 등분하였다. 전원은 $z=0.5$ m에서 인가되며, 복사장이 관찰되는 방향은 $+y$ 축이다. 시간영역에서 계산된 전류와 전장의 과도응답은 주파수영역의 해와 잘 일치하고 있다.

4. 결 론

입의 형태의 도선 안테나 구조로부터 과도응답을 구하기 위하여 시간영역 전장적분방정식을 적용하는 새로운 방법을 제안하였다. 모멘트법을 적용하기 위하여 도선을 직선조각으로 모델링한 후 공간 시험함수와 기저함수로서 삼각형 함수를 사용하였으며, 라게르 다항식으로부터 유도된 시간영역 시험함수를 도입하였다. 제안된 방법의 타당성을 보이기 위하여 가우시안 델타 전원이 인가된 직선도선의 안테나 구조로부터 전류 및 전장의 과도응답을 계산하였다. 계산된 결과는 시간영역 전개함수의 감쇄 특성으로 안정되었으며, 주파수 영역에서 계산된 해의 IDFT와 정확히 잘 일치하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Macmillan, New York, 1968.
- [2] S. M. Rao, *Time Domain Electromagnetics*. Academic Press, 1999.
- [3] B. H. Jung, T. K. Sarkar, Y.-S. Chung, and Z. Ji, "An accurate and stable implicit solution for transient scattering and radiation from wire structures," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 34, no. 5, pp. 354-359, Sept. 2002.
- [4] 정백호, 서정훈, 윤희상, "적분방정식을 이용한 도선 산란계 및 안테나의 과도응답 해석," *대한전기학회논문지*, 제 51C권, 제 11호, pp. 559-566, 2002. 11.
- [5] Y.-S. Chung, T. K. Sarkar, and B. H. Jung, "Solution of a time-domain magnetic-field integral equation for arbitrarily closed conducting bodies using an unconditionally stable methodology," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 35, no. 6, pp. 493-499, Dec. 2002.
- [6] 정백호, 정용식, "가중 라게르 다항식과 전장적분식을 이용한 도체의 과도 산란 해석," *한국전자과학회 논문지*, 제 13권, 제 9호, pp. 937-946, 2002. 10.