2003년도 대한전기학회 전문대학교육위원회 학술대회 논문집 2003.7.6-7.8

Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 적분연산 행렬의 오차 해석에 관한 연구

이해기*, 김태훈°
*충청대학, °한국정보보호진흥원

A Study on The Error Analysis of Integration Operational Metrices by The Lagrange Second Order Interpolation Polynomial

Hae-ki Lee*, Tai-hoon Kim°
*Chungcheong College, °KISA

Abstract - This paper presents a new method for finding the Block Pulse series coefficients and deriving the Block Pulse integration operational matrices which are necessary for the control fields using the Block Pulse functions. In this paper, the accuracy of the Block Pulse series coefficients derived by using the Lagrange second order interpolation polynomial is approved by the mathematical method.

1. 서 론

연속시간 입출력 신호를 해석하기 위하여 급수 전개 과정을 거쳐 적분 연산행렬을 적용하는 방법이 이용되어 왔으며, 선형 대수방정식 집합들로 표시된 미분 방정식들의 파라미터들을 추정 방법이 알려져 왔다.
Corrington은 이러한 상미분 방정식을 풀기위해 월쉬 연산행렬들을 구성하였고, Chen과 Hsiao[1-2]는 월쉬 연산행렬을 채택하였으며, 적분연산행렬이 월쉬영역으로부터 블럭펄스영역으로 전환되면 계산상의 복잡함이 현저히 줄어든다는 것이 밝혀졌다[3-4]. 이러한 연구 과정을 거쳐 일반형 블럭펄스적분연산행렬이 유도되었으며 [5-6], 김태훈 등[7]은 Lagrange 이차보간다항식을 이용하는 새로운 적분연산행렬 유도방식을 제안하였다.
본 논문에서는 기존의 적분연산행렬과 Lagrange 이차 보간다항식을 이용하여 유도한 적분연상행렬의 오차를 수치해석적으로 분석하여 정확성을 비교하여 보았다.

2. 본 론

2.1 새로운 블럭펄스 급수 추정 기법

블럭 펄스 급수의 전개는 원래의 함수 $f(t)$가 구분 연속 상수값의 함수 $\bar{f}(t)$에 의하여 근사화될 수 있음을 의미하는 것이며, 이러한 근사화는 구간 $t\in[0,t_f)$에서 $f(t)$와 $\bar{f}(t)$ 사이의 평균자승오차를 표시하는 식 (2.1)의 최소값에 도달하는 것이다[5].

$$\varepsilon = \frac{1}{t_f}\int_0^{t_f}\Big[\,f(t) - \sum_{j=0}^{m-1}F_j\phi_j(t)\Big]^2 dt \tag{2.1}$$

기존의 방식에서는 블럭 펄스의 폭 h가 충분히 작다고 가정한 후 다음의 식 (2.2)와 같은 단순한 관계로부터 근사적으로 블럭 펄스 계수들을 결정하였다[6].

$$F_i \fallingdotseq \frac{1}{2}\{f(t_i) + f(t_{i+1})\} \tag{2.2}$$

단, $f(t_i)$와 $f(t_{i+1})$은 $t=ih$와 $t=(i+1)h$의 $f(t)$ 값

그러나 식 (2.2)는 각각의 블럭 펄스 계수가 미소구간의 두 끝점들에서의 원래 함수의 평균값에 의해서 근사화됨을 나타내는 것으로서, 곡선인 구간에서 오차가 커지게 된다. 이러한 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하여 블럭펄스 급수의 계수를 구하도록 한다. 세 개의 점 $t_0=(i-2)h$, $t_1=(i-1)h$, $t_2=ih$를 지나는 $f(t)$에 대한 이차 보간 다항식을 $p_2(t)$라고 하면, Lagrange 형태의 보간 다항식 $p_2(t)$는 식 (2.3)과 같게 되고, 미소구간 $t\in[(i-1)h,\ ih)$에서 적분하면 식 (2.4)와 같은 형태의 블록 펄스 계수를 얻을 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} p_2(t) &= f((i-2)h)\,\frac{(t-(i-1)h)(t-ih)}{2h^2} \\ &\quad - f((i-1)h)\,\frac{(t-(i-2)h)(t-ih)}{h^2} \\ &\quad + f(ih)\,\frac{(t-(i-2)h)(t-(i-1)h)}{2h^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} F_i &= \int_{(i-1)h}^{ih} p_2(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{12}f((i-2)h) + \frac{8}{12}f((i-1)h) + \frac{5}{12}f(ih) \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 적분연산 행렬

우선 세 점 $t_0=(i-2)h$, $t_1=(i-1)h$, $t_2=ih$를 지나는 보간 다항식을 표시하면 식 (2.5)와 같고,

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= g((i-2)h)\,\frac{(t-ih)(t-(i-1)h)}{2h^2} \\ &\quad - g((i-1)h)\,\frac{(t-ih)(t-(i-2)h)}{h^2} \\ &\quad + g(ih)\,\frac{(t-(i-1)h)(t-(i-2)h)}{2h^2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

이 보간 다항식으로부터 함수 $g(t)$의 i번째 블록 펄스 계수를 구하면 식 (2.6)과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{g}_i &= \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih}\bar{g}(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{12}g((i-2)h) + \frac{8}{12}g((i-1)h) + \frac{5}{12}g(ih) \end{aligned} \tag{2.6}$$

함수 $g(t)$는 함수 $f(t)$의 적분이므로 식 (2.7)의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} g(ih) &= \int_0^{ih} f(t)\,dt \\ &= h\Big(\frac{1}{h}\int_0^{h} f(t)\,dt + \frac{1}{h}\int_h^{2h} f(t)\,dt \\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)\,dt\Big) \\ &= h(f_1 + f_2 + \cdots + f_i) \end{aligned} \tag{2.7}$$

식 (2.7)의 관계식이 다음의 경우에도 적용된다.

$$g((i-1)h) = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-1}) \tag{2.8}$$
$$g((i-2)h) = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-2}) \tag{2.9}$$

식 (2.7)부터 식 (2.9)까지를 식 (2.6)에 대입하여 정리하면 다음의 식 (2.10)을 얻을 수 있다.

$$\overline{g}_i = h\left(f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-2} + \frac{13}{12} f_{i-1} + \frac{5}{12} f_i\right) \tag{2.10}$$

하지만 식 (2.10)에서 알 수 있는 것과 같이, f_{-1}과 f_0은 존재하지 않기 때문에 이 식은 $i = 3, 4, \cdots, m$일 경우에만 의미를 갖게 된다. $i = 2$일 경우에는 식 (2.6)으로 직접 식 (2.11)과 같은 값을 얻을 수가 있다(단, $g(0) = 0$이다).

$$\begin{aligned}\overline{g_2} &= -\frac{1}{12} g(0) + \frac{8}{12} g(h) + \frac{5}{12} g(2h) \\ &= h\left(\frac{13}{12} f_1 + \frac{5}{12} f_2\right)\end{aligned} \tag{2.11}$$

그리고 $i = 1$인 경우에는 함수 $f(t)$와 $g(t)$가 $t < 0$에서 정의되지 않았기 때문에 첫 번째 블록 펄스 계수 $\overline{g_1}$을 구하기 위하여 세 점을 이용한 보간 다항식을 사용할 수 없다. 따라서 이 경우에는 다른 원소들의 배열 상태를 확인하여 일관성을 유지할 수 있도록 추정항을 사용하도록 한다.
식 (2.10)부터 식 (2.11)까지의 관계를 이용하여 함수 $g(t)$의 블록 펄스 계수를 다음과 같은 벡터 형태로 표시하는 것이 가능하다.

$$\begin{aligned}g(t) &\doteq [\ \overline{g_1}\ \ \overline{g_2}\ \cdots\ \overline{g_m}\ ]\ \Phi(t) \\ &= [\ f_1\ \ f_2\ \cdots\ f_m\ ]\ \overline{P}\ \Phi(t)\end{aligned} \tag{2.12}$$

여기서 행렬 $\overline{P}$는 다음의 식 (2.13)으로 주어지게 되며, 이것이 기존의 적분 연산 행렬 P의 성능을 개선한 것이다.
식 (2.13)과 같은 개선된 적분 연산 행렬 $\overline{P}$를 이용하여서, 함수 $f(t)$의 적분을 다음의 식 (2.15)와 같이 쉽게 표시할 수 있다.

$$\overline{P} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$\int_0^t f(t)\,dt \doteq F^T \overline{P}\ \Phi(t) \tag{2.14}$$

2.3 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬 유도

일반형 적분 연산 행렬을 유도하기 위하여 우선 2회 적분에 대한 경우를 고려하면, 적분 연산 행렬은 다음과 같은 단계를 거쳐 구할 수 있게 된다.

(i) 식 (2.13)으로 표현된 적분 연산 행렬의 모양을 변형하여 다음과 같은 형식으로 만든다.

$$\widetilde{P} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{13}{12} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{5}{12} & \frac{13}{12} & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{12} \end{bmatrix} = hA \tag{2.15}$$

(ii) 식 (2.15)에 있는 행렬 A의 전치 행렬을 구한다.
(iii) 변형된 행렬 A를 구성하는 행벡터들은 각각 블럭 펄스 급수의 동일 계수들에 해당하는 부분들이 되므로, 다음과 같은 행렬 B^T로 변환할 수 있게 된다.

$$B^T = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

단, $B_1 = \frac{5}{12} A_1$ (2.16a)

$$B_2 = \frac{13}{12} A_1 + \frac{5}{12} A_2 \tag{2.16b}$$
$$B_3 = A_1 + \frac{13}{12} A_2 + \frac{5}{12} A_3 \tag{2.16c}$$
$$\vdots$$
$$B_m = A_1 + A_2 + \cdots + A_{m-2} + \frac{13}{12} A_{m-1} + \frac{5}{12} A_m \tag{2.16d}$$

(iv) 식 (2.15)로 구해진 행렬의 전치 행렬을 구하고, 이 행렬에 2회 적분을 의미하는 상수 h^2을 곱한다.

이와 같은 관계를 k번 적분한 경우로 확장하여 생각해 보면, 다음의 절차에 따라서 계수를 보정한 새로운 일반형 적분 연산 행렬 $\widetilde{P}_k$를 구할 수 있게 된다.

(1) 식 (2.15)부터 식 (2.15)까지의 과정을 $k-1$번 반복한다.
(2) 결과로 얻어진 행렬의 전치 행렬을 구한다.
(3) 결과 행렬에 h^k를 곱한다.

2.4 오차 비교

식 (2.13)과 같은 개선된 적분 연산 행렬 $\overline{P}$를 이용하여서, 함수 $f(t)$의 적분을 식 (2.14)와 같이 쉽게 표시할 수 있다.
식 (2.13)으로 구해진 연산 행렬 $\overline{P}$가 기존의 적분 연산 행렬 P에 비하여 성능이 개선되었음을 보이기 위하여, 각각 $F^T P$와 $F^T \overline{P}$에 의하여 구해진 양쪽의 블럭 펄스 계수 $\widetilde{g}_i$와 $\overline{g}_i$(단, i = 1, 2, 3, $\cdots$, m)의 값을 정확한 식 (2.14)에 의하여 구해진 값과 비교하여 보도록 한다.

$$g_i = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} g(t)\,dt \tag{2.15}$$

상용 적분 연산 행렬을 사용하여 구한 $\tilde{g}_i$의 경우에는

$$g_i - \tilde{g}_i = \frac{1}{h}\left(\int_{(i-1)h}^{ih} g(t)\,dt - h\,\frac{g((i-1)h)+g(ih)}{2}\right) \tag{2.16}$$

와 같은 식으로 오차를 구할 수 있으며, 식 (2.16)은 수치 적분에 관한 사다리꼴 규칙의 오차 해석[8-9]로부터 다음의 식 (2.17)과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{(i-1)h}^{ih} g(t)\,dt - h\,\frac{g((i-1)h)+g(ih)}{2} = -\frac{1}{12}h^3 g^{(2)}(\eta) \tag{2.17}$$

단, $\eta \in [(i-1)h,\ ih)$

그러므로 상용 적분 연산 행렬을 이용하여 구한 블럭 펄스 계수의 오차는 다음의 식 (2.18)과 같이 구할 수 있다.

$$g_i - \tilde{g}_i = -\frac{1}{12}h^2 g^{(2)}(\eta) \tag{2.18}$$

새로 유도된 적분 연산 행렬을 사용하여 구한 $\bar{g}_i$의 경우에는

$$g(t) - \bar{g}(t) = \frac{(t-(i-2)h)(t-(i-1)h)(t-ih)}{3!}\,g^{(3)}(\xi) \tag{2.19}$$

단, $\xi \in [(i-2)h,\ ih)$

와 같은 식으로 오차를 구할 수 있으며, 식 (2.19)를 $(i-1)h$에서 ih까지 적분하면 보간 다항식에 관한 오차 해석으로부터 다음의 식 (2.20)과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{(i-1)h}^{ih} g(t)\,dt - \int_{(i-1)h}^{ih} \bar{g}(t)\,dt = -\frac{1}{24}h^4 g^{(3)}(\xi) \tag{2.20}$$

그러므로 새로 유도된 적분 연산 행렬을 이용하여 구한 블럭 펄스 계수의 오차는 다음의 식 (2.21)과 같이 구할 수 있다.

$$g_i - \bar{g}_i = -\frac{1}{24}h^3 g^{(3)}(\xi) \tag{2.21}$$

식 (2.20)과 식 (2.21)로부터 블록 펄스폭 h의 크기가 작을수록 $g_i - \bar{g}_i$의 차이가 $g_i - \tilde{g}_i$의 차이보다 적게됨을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하는 새로운 블록 펄스 급수 계수 추정 기법을 보이고, 이를 확장하여 기존의 블럭 펄스 적분 연산 행렬보다 오차가 적은 새로운 적분 연산 행렬을 도입하였다. 또한 이를 확장하여 새로운 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬을 유도하였으며, 수치해석 방법을 이용하여 새로운 방식의 오차가 기존의 방식의 오차보다 적다는 것을 증명하였다. 이를 이용하여 향후 다중 적분 형식으로 표현된 선형계 및 비선형계 시스템의 해석 및 상태 추정 문제에 응용할 수 있을 것이다.

[참 고 문 헌]

[1] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-20, pp. 596, 1975

[2] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "A State Space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems", Int. J. Systems Sci., Vol. 6, pp. 833, 1975

[3] C. F. Chen, Y. T. Tsay and T. T. Wu, "Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and Their Application to Distributed Systems", J. Fanklin Inst., Vol. 303, pp. 267, 1977

[4] C. Hwang and T. Y. Guo, "Identification of Lumped Linear Time-varying Systems via Block Pulse Functions", Int. J. Systems Sci., Vol. 15, pp. 361, 1984

[5] C. H. Wang, "Generalized Block Pulse Operational Matrices and Their Applications to Operational Calculus", Int. J. Control, Vol. 36, No. 1, pp. 67 1982

[6] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block-pulse Functional and Their Applications in Control Systems", Springer-Verlag, 1992

[7] 심재선, 김태훈, "Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 새로운 일반형 블록 펄스 적분 연산 행렬", 대한전기학회 논문지, 제52D권 제6호, pp. 351

[8] G. Strang, "Linear Algebra and Its Applications", 2nd ed., Academic Press, pp. 103, 1980

[9] N. S. Hsu, "Identification of Non-linear Distributed Systems via Block-pulse Functions", Int. J. Control, Vol. 36, No. 2, pp. 281, 1982