

제한된 입력 특성을 갖는 선형 시스템의 이득 계획 제어기 설계

Design of Gain-Scheduled Controllers for Linear Systems with Input Constraints

송 용 회*, 김 진 훈**

* 충북대학교 제어계측공학과(E-mail : yhsong@just.chungbuk.ac.kr)

** 충북대학교 전기전자공학부(전화:(043)261-2387, E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr)

Abstract : In this paper, we considered the design of gain scheduled controllers for linear systems with input constraints. The gain scheduled control is a method that uses larger control gain when the states are smaller, and smaller gain when it is larger. By doing this, we can use a full actuator capacity. Also we allow the over-saturation in control to improve the performance. First, we derive a control and a reachable set expressed as LMI form, while minimizing the L_2 gain from the disturbance to the measured output. Next, the reachable set is divided as nested subsets, and the control gains are obtained by minimizing the L_2 gain at each nested subset. Finally, the control gains are scheduled according to the status of states, i.e., the nested-subset in which the states are located. Performance of the proposed technique is illustrated through simulations of a six-story building subject to earthquake ground motion.

Keywords : Input Constraints , Gain-scheduled control , over-saturation , L_2 gain , LMI

1. 서 론

실제 제어 시스템에 필수적으로 사용되는 구동기들은 여러 비선형적인 특성들을 갖고 있다. 그 중 가장 대표적이라 할 수 있는 것이 포화(saturation) 특성으로 이를 고려하지 않고 설계된 제어 시스템은 성능 저하뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 것이 일반적이다. 또한, 전체 시스템이 비선형 시스템이 되기에 시스템의 안정성 및 제어기 설계 문제가 선형 시스템만을 다루는 경우에 비해 더욱 복잡하고 어렵게 되어 이에 관한 많은 연구가 이루어져왔다[1]-[5].

최근에는 포화 구동기를 갖는 시스템에 대하여 H_∞ 제어기 설계와 더불어 시스템으로부터 측정 가능한 파라미터들을 이용한 LPV 방법이나 이득 계획 제어 등에 관한 연구가 활발히 진행되어지고 있다[6]-[9].

포화 특성과 관련해서는 제어 입력에 포화가 절대로 일어나지 않도록 하여 상대적으로 작은 이득(low-gain)을 사용하는 방법[9]과 포화가 일어나도록 하여 구동기의 용량을 최대한으로 사용하도록 하는 방법(high-gain)[5]들이 제시되고 있으나 일반적으로 포화가 일어나도록 하는 방법이 더 좋은 성능을 갖게된다.

또한, 고정된 제어 이득 하나만을 사용하는 정적 제어 보다는 시스템의 상태(state)가 작은 경우에는 큰 제어 이득을 사용하고, 상태가 커지게 되면 상대적으로 작은 제어 이득을 사용하도록하여 상태의 크기에

따라 제어 이득을 선택하여 이용하는 이득 계획 제어가 일반적으로 더 좋은 성능을 갖게 된다.

이에 본 논문에서는 구동기의 포화를 허용하면서 시스템의 상태에 따라 제어 이득을 달리 사용하는 이득 계획 제어기의 설계에 관하여 다루었다. 또한, 설계된 제어기는 외란으로부터 측정 출력까지의 에너지 전달률(즉, L_2 이득)이 최소가 되도록 하였다.

끝으로, 6층 빌딩 모델[5]을 이용한 모의 실험을 통해 본 논문에서 제시된 방법의 유용성과 우수성을 보이도록 하겠다.

II. 문제 기술

다음으로 기술되는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 \text{Sat}(u(t)) \\ z(t) &= Cx(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 $x \in R^n$ 은 상태, $u \in R^m$ 은 제어, $w \in R^d$ 는 $w^T w \leq w_{\max}^2$ 을 만족하는 외란이고, $z \in R^d$ 는 측정 출력이며, A, B_1, B_2, C 는 적당한 차원을 갖는 상수 행렬이며, 포화 함수 $\text{Sat}(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$\text{Sat}(u) = [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T \quad (2)$$

여기에서 $\text{sat}(u_i)$ 는 다음과 같다.

$$\text{sat}(u_i) = \text{sgn}(u_i) \cdot \min(u_i^{\text{lim}}, |u_i|)$$

본 논문의 주요 목적은 위의 시스템 (1)에 대하여 구동기의 포화를 허용하면서 외란 $w(t)$ 로부터 출력 $z(t)$ 까지의 에너지 전달률(즉, L_2 이득)을 최소화하도록 하는 이득 계획 제어기를 설계하는 것이다.

III. 주요 결과

이 장의 정리 1에서는 고정된 제어 이득을 사용하는 정적 제어기의 설계에 대하여 보이고, 이를 이용한 이득 계획 제어기의 설계를 보이도록 하겠다.

3. 1. 정적 제어기 설계

여기에서는 고정된 제어 이득을 사용하는 정적 제어기의 설계를 보이도록 하겠다.

먼저 포화 구동기를 갖는 선형 시스템 (1)의 포화 함수 $\text{sat}(u_i)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{sat}(u_i(t)) = \psi_i(t)u_i(t), \quad (\psi_i(t) = 1 \text{ if } u_i = 0) \quad (3)$$

또한, $\Psi(r) \in R^{m \times m}$ 은 i^{th} 번째 대각 성분이 1 또는 r_i 인 대각(Diagonal)행렬이며, r_i 는 $0 < r_i \leq 1$ 를 만족하는 상수로써 다음의 정리 1에 사용된다.

정리 1: 다음의 행렬 부등식을 동시에 만족하도록 하는 양 확정 행렬 $Q = Q^T \in R^{n \times n} > 0$ 와 행렬 $Y \in R^{m \times n}$ 그리고 양의 상수 $\alpha, \delta > 0$ 가 존재한다고 하자.

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + Y^T \Psi(r) B_1^T + B_1 \Psi(r) Y & QC^T & B_1 \\ CQ & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

$$AQ + QA^T + Y^T \Psi(r) B_1^T + B_1 \Psi(r) Y + \alpha Q + \frac{\delta}{\alpha} B_1 B_1^T < 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y_i^T \\ Y_i & \delta \left(\frac{u_i^{\text{lim}}}{r_i w_{\text{max}}} \right)^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

그러면 다음의 제어기를

$$u = Kx; \quad K = YQ^{-1} \quad (7)$$

갖는 폐루프 시스템은 다음을 만족한다.

- 1) 외란 $w(t)$ 로부터 출력 $z(t)$ 까지의 L_2 이득은 γ 보다 크지 않다.
- 2) 다음의 집합은 이 시스템의 reachable set을 포함

한다.

$$\Omega = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \frac{1}{\delta} w_{\text{max}}^2 \right\} \quad (8)$$

- 3) 제어 입력 u_i 는 $\frac{1}{r_i} u_i^{\text{lim}}$ 을 넘지 않는다.

증명: 지면관계상 생략. ■■

일반적으로 구동기의 용량이 크게되면 더 큰 제어 이득과 더 작은 γ 를 얻을 수 있게 된다. 따라서 본 논문에서는 구동기의 용량을 최대한으로 사용하고자 r_i 의 값을 이용해 r_i 를 작게 해줌으로써 더 큰 제어 이득을 얻을 수가 있다. 여기에서 $\Psi(r)$ 은 제어 입력에 대한 상한(upper bound)을 계산하기 위해 사용되었으며 reachable set (8)내에서 식 (6)을 만족하면 제어 입력은 항상 $|u_i| \leq \frac{u_i^{\text{lim}}}{r_i}$ 을 넘지 않게 된다. 또한, 이로

부터 $\psi_i = \frac{\text{sat}(u_i)}{u_i}$ 는 항상 $r_i \leq \psi_i \leq 1$ 이 됨을 알 수 있다.

정리 1의 행렬 부등식들은 고정된 α 에 대해서 LMI toolbox[11]를 사용함으로써 쉽게 해를 얻을 수가 있으며, 행렬 부등식 (4), (5)에 대해서는 대각 행렬 $\Psi(r)$ 의 정의에 따라 각각 2^m 개의 부등식을 갖게 된다.

3. 2. 이득 계획 제어기 설계

다음은 이득 계획 제어기의 설계에 대하여 나타내었다. 이득 계획 방법은 상태 $x(t)$ 에 따라 다른 제어 이득을 사용하는 것으로써 reachable set내에 다음과 같은 nested sub-set으로 나누어 Ω_k 에 해당하는 제어 이득 K_k 을 구하여 사용한다.

$$\Omega_k = \left\{ x : \frac{1}{\delta_{k-1}} \left(\frac{1}{\delta} w_{\text{max}}^2 \right) < x^T Q^{-1} x \leq \frac{1}{\delta_k} \left(\frac{1}{\delta} w_{\text{max}}^2 \right) \right\} \quad (9)$$

$$k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$\Omega_1 = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{1}{\delta} w_{\text{max}}^2 \right) \right\}$$

여기에서 $1 = \delta_N < \delta_{N-1} < \dots < \delta_1$ 이다.

이득 계획 제어기 설계: 행렬 $Q = Q^T > 0$ 과 양의 상수 $\delta > 0$ 를 정리 1에서 γ 를 최소화하여 얻어진 값이라 하자. 그리고 다음의 과정을 통하여 Y_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ 를 얻었다하자.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k^2 \\ & \text{subject to} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + Y_k^T \Psi(r) B_2^T + B_2 \Psi(r) Y_k & QC^T & B_1 \\ & CQ & -I & 0 \\ & B_1^T & 0 & -\gamma_k^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y_{ki}^T \\ Y_{ki} & \delta_k \delta \left(\frac{u_i^{\text{lim}}}{r w_{\text{max}}} \right)^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

그러면 이득 계획 제어는 $x \in \Omega_k$ 일 때, 다음과 같이 행한다.

$$u(t) = K_k x(t) = Y_k Q^{-1} x(t) \quad (12)$$

여기서 Y_N 은 정리1의 Y 값을 이용한다.

위의 설계에서 사용된 $\Psi(r)$ 은 정리 1과 같은 것으로 각 k 에 대하여 행렬 부등식 (10)은 2^m 개의 행렬 부등식의 조합으로 나타내고, 행렬 부등식 (11)에서는 m 개의 행렬 부등식으로 표현된다.

위의 설계를 통해 얻어진 이득 계획 제어기는 시스템의 상태 $x(t)$ 의 궤적이 작은 경우 큰 제어 이득을 사용하게 되고, 외란의 증가로 궤적이 커지게 되면 보다 적은 제어 이득을 사용하여 구동기의 포화가 일어나더라도 외란 $w(t)$ 로부터 출력 $z(t)$ 까지의 에너지 전달률(즉, L_2 이득)이 최소가 되도록 한다.

Remark 2. Reachable set내에 존재하는 각 sub-set에서의 L_2 이득 γ_k 는 LMI 조건 (10)에 의하여 다음과 같다.

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{N-1} < \gamma_N$$

IV. 모의 실험

본 논문에서 제시된 방법의 유용성을 보이기 위해, 참고 문헌[5]의 동일한 층을 갖고, 1층과 3층에 2개의 능동 제어시스템이 있는 6층 빌딩에 대한 모의 실험을 하였다.

빌딩의 각층에 대한 질량(m_k)은 345.6[metric ton]이고, stiffness(k_k)는 340,400[kN/m]이며, 감쇠상수(α_k)는 2,937[kNs/m]이다. 또한, 실험에서 사용된 구동기의 용량과 r_i 는 다음과 같고

$$u_1^{\text{lim}} = u_2^{\text{lim}} = 1500kN, \quad r_1 = r_2 = r$$

사용된 외란으로는 $w_{\text{max}} = 0.4g$ 인 1971년 캘리포니아에서 발생한 *Pacoima* 지진 데이터를 사용하였다.

본 모의 실험에서 사용된 제어 이득의 수는 $N=5$ 로 하였으며, nested sub-set에 사용되는 δ_k 는 다음과 같이 하였다.

$$[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5] = [3000, 2000, 1000, 500, 1]$$

다음의 결과들은 정적 제어와 이득 계획 제어와의

비교와 구동기의 용량(capacity)과 관계된 r_i 에 따른 결과들을 표와 그림을 통해 나타내었다.

먼저, 표 1에서는 r 에 따른 각 sub-set에서의 L_2 이득 γ_k 를 보여주며, r 의 값이 작을수록 가장 외곽에 해당하는 reachable set(즉, Ω_5)에서의 L_2 이득이 작아지고 있음을 알 수 있다. 그러나 r 의 값이 너무 작아지면 과포화로 인한 불확실성($r_i \leq \psi_i \leq 1$)의 증가로 좋지 못한 결과를 가질 수 있어 본 실험에서는 $r=0.1$ 로 한 경우 $r=0.5$ 일 때 보다 Ω_1 을 제외한 다른 sub-set에서의 L_2 이득이 더 컸음을 알 수 있다. 다음으로 표 2에서는 r 에 따라 정적 제어를 한 경우와 이득 계획 제어를 한 경우에 대해서 빌딩 각층에서의 최대 층간 동요(maximum drift, [cm])를 나타내었다. $r=1$ (no over-saturation)일 때[9], 정적 제어를 한 경우가 개루프와 비교하여 1층의 최대 층간 동요에 대해서 약 0.5%정도 감소하였지만, 이득 계획 제어기의 경우엔 전체적으로 약 16%정도 줄어들었음을 알 수가 있다.

표 1. r 에 따른 각 sub-set에서의 L_2 이득

Table 1. L_2 gain in each sub-set for various r

Ω_k	γ_k	$r=1$	$r=0.5$	$r=0.2$
Ω_1	γ_1	0.0557	0.0550	0.0692
Ω_2	γ_2	0.0603	0.0595	0.0732
Ω_3	γ_3	0.0687	0.0679	0.0787
Ω_4	γ_4	0.0779	0.0769	0.0820
Ω_5	γ_5	0.1393	0.1390	0.1359

표 2. 제어기에 따른 최대 층간 동요

Table 2. Max. drifts[cm] for various controllers

Drift x_i	Open loop	$r=1$ [9]		$r=0.5$		$r=0.1$	
		static	scheduled	static	scheduled	static	scheduled
x_1	2.3833	2.3708	2.0042	2.3581	1.8039	2.2183	1.8871
x_2	2.1461	2.1352	1.8191	2.1240	1.7169	2.0066	1.8043
x_3	1.8120	1.8024	1.5173	1.7924	1.4262	1.6886	1.4987
x_4	1.4649	1.4525	1.1452	1.4396	1.1662	1.3068	1.4771
x_5	1.0579	1.0522	0.8584	1.0462	0.8083	0.9834	0.7485
x_6	0.5583	0.5554	0.4514	0.5524	0.4310	0.5210	0.4017

다음의 그림 1은 개루프에 대한 출력과 정적 제어 중 가장 좋은 성능을 갖는 $r=0.1$ 일 때의 출력, $r=0.5$ 일때의 이득 계획 제어기에 대한 1층에서의 층간 동요를 보여주고 있으며, 그림 2에서는 $r=0.5$ 일때의 이득 계획 제어기에 대한 빌딩의 1층과 3층에 있는 제어 시스템에서의 제어 입력(u_1, u_2)을 나타내고 있다. $r=1$ (즉, low gain control)일 때의 이득 계획 제어기 보다 구동기의 용량을 최대한으로 사용함으로써 층간

동요가 10%정도 감소되었음을 알 수 있다. 끝으로, 그림 3에서는 $r=0.5$ 일때의 시간에 따라 사용된 제어 이득(K_k)을 나타내고 있다. 즉, 외란이 없는 초기 상태에서는 가장 큰 제어 이득, K_1 을 사용하다가 외란의 영향으로 시스템의 상태가 커진 경우 상태에 따라 다른 제어 이득(K_2, K_3)을 사용함을 보여 주고 있다.

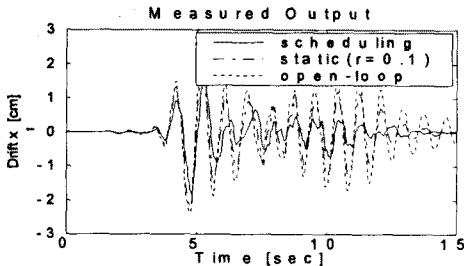


그림 1. 1층에서의 동요(Drift)
Fig. 1. Drift[cm] in first-floor

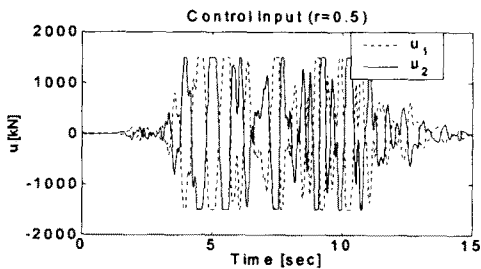


그림 2. 제어 입력 ($r=0.5$)
Fig. 2. Control Input ($r=0.5$)

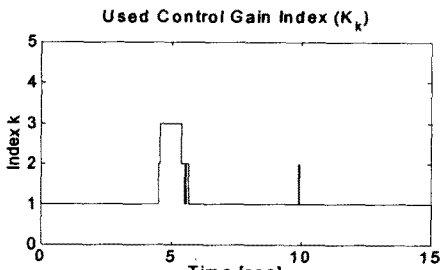


그림 3. 시간에 따라 사용된 제어 이득 K_k
Fig. 3. Used control gain K_k vs. time

V. 결론

본 논문에서는 구동기의 포화가 일어나더라도 외란으로부터 출력까지의 에너지 전달률(즉, L_2 이득)을 최소화하며, 상태에 따라 다른 제어 이득을 사용하도록 하는 이득 계획 제어기의 설계 방법을 제시하였다.

또한, 설계된 제어기는 고정된 제어 이득을 사용하는 정적 제어보다 이득 계획 제어를 사용한 경우 성능이

더 우수함을 모의 실험을 통해 제시하였다.

참고 문헌

- [1] Z. Lin and A. Saberi, "Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedback", *Syst. Control Lett.*, vol. 21, pp. 225-239, 1993.
- [2] J. H. Kim and Z. Bien, "Robust Stability of uncertain systems with saturating actuators", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, No. 1, pp. 225-229, 1994.
- [3] T. Hu and Z. Lin, *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Boston, MA: Birkhauser, 2001.
- [4] Nguyen. T. and Jabbari. F., "Disturbance Attenuation for Systems with Input Saturation: an LMI Approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, No. 4, April 99, pp. 852-858.
- [5] Kim, J. H., Jabbari, F. and Yang, J.N., "Actuator saturation and control design for buildings under seismic excitation," *Proc. of the 2000 American Control Conference*, Vol. 1, pp. 29-33, 2000.
- [6] P. Apkarian and Richard J. Adams, "Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 6, No. 1, 1998.
- [7] Wu, F., Grigoriadis, K., Packard, A. "Anti-windup controller synthesis via linear parameter varying control design method," *Proc. 1998-ACC*, Phil., PA, pp. 3545-3549.
- [8] Srivatava, S., Jabbari, F. "Scheduled Controllers for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Input," *Proc. ACC-00*, Chicago, IL, June 2000, pp. 735-739.
- [9] 송용희, 김진훈, "포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 이득 스케줄링 제어기 설계", *대한전기학회논문지*, 제 52권, 제9호, pp. 511-519, 2003.
- [10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [11] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide with MATLAB*, The MathWork. Inc, 1995.