2003 정보 및 제어 학술회의 (2003.11.21-22)

Spline을 이용한 비선형 시스템의 적응 관측기 설계

Some Advantages of Spline-based Adaptive Observer Design for Nonlinear Systems

Julian Stoev*, 방대인** 최진영***
(Julian Stoev, Dane Bahng and Jin Young Choi)

*,**,*** : 서울대학교 전기,컴퓨터 공학부
(전화:(02)872-7283, 팩스:(02)885-4459, E-mail : stoev/dibang/jychoi@neuro.snu.ac.kr)

Abstract : In this paper, using B-splines as universial approximators, we have obtained a plant parametrization which permits the construction of an adaptive observer. The particular property of this parametrization is that the dynamic order of the filters in this design does not depend on the number of parameters in the plant parametrization. This appears to be a beneficial property especially because the number of such parameters tends to be very high for universial approximator based designs.

Keywords : Splines, B-splines, Adaptive observer, Universial approximators, K-filter

Ⅰ. 서 론

범용 근사자를 적응제어와 추정에 적용할 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이며 이에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 하지만 spline 역시 우수한 성능을 가지는 범용 근사자로 사용될 수 있음에도 불구하고 이를 이용한 비선형 시스템의 식별과 관련된 연구는 충분히 이루어지지 않고 있는 실정이다.

본 논문에서는 불확실성을 포함한 특정 형태의 비선형 시스템에 관한 적응 상태 관측 문제를 다루면서, spline을 이용하여 보다 간단한 형태의 관측기 구조를 얻어내는 방법을 제시한다. 이 때 기존의 범용 근사자들을 사용할 경우 시스템이 복잡해지고 파라미터 개수가 늘어남에 따라 관측기 필터의 차수도 늘어나는 것이 일반적이지만, spline을 사용하면 추정할 파라미터의 개수와는 독립적으로, 고정된 차수를 가지는 관측기 필터를 얻어낼 수 있는데 이는 다른 범용 근사자들과는 차별되는 좋은 특성이며 spline의 지엽적 지지성 (local support property)에서 기인한다. 본 논문은 다음과 같이 구성되었다.

Ⅱ에서는 범용 근사자를 이용한 적응 관측기 설계에 관해 논하고, Ⅲ에서는 spline과 그 특성에 관해 간략히 소개한다. Ⅳ는 본 논문의 주요 기여부로서 spline을 이용한 시스템 근사와 적응 관측기 설계에 관해 다루고, 관측기 필터의 차수를 파라미터의 개수에 독립적으로 만드는 기법을 제시한다. 마지막으로 Ⅴ에서는 결론을 맺는다.

Ⅱ. 범용 근사자를 이용한 적응 관측기 문제

다수의 SISO 시스템은 비선형 항이 측정 가능한 입출력값에 의존하는 다음의 출력 궤환형(output feedback form)으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + F(y(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $F(\cdot)=[f_1(\cdot), \ . \ . \ . \ , f_n(\cdot)]^T$ 가 완전히 알려진 함수이면 적응 관측기를 설계할 필요가 없지만 $F(\cdot)$ 가, 알려진 기저 함수들의 선형조합이며 그 계수만을 모를 경우에는 이를 추정하는 적응 알고리즘이 필요하다. 한편 $F(\cdot)$ 를 구성하는 기저 함수조차 모르거나 알더라도 복잡한 비선형 함수로 얻어지는 경우, 이를 모델링하기 위해 범용 근사자를 도입하고 이들의 선형 조합으로 $F(\cdot)$ 를 근사할 수 있다. 이러한 범용 근사자에는 RBF(radial basis function), 퍼지 논리 함수(fuzzy logic function), spline 등이 사용되고 있으며 본 논문에서는 이 중 spline을 사용하므로 Ⅲ에서 spline과 그 특성에 관해 간략히 소개한다.

Ⅲ. spline의 정의와 특성

spline을 이용한 근사법는 [1]에서 잘 소개되고 있으며 여기서는 [1]에서 다루고 있는 정의와 특성 중 필요한 일부를 간단히 소개한다.

(정의 1): 1차 B-spline

비감소(nondecreasing) 시퀀스인 $Y=\{y_i, i=1,\dots,m, y_i \leq y_{i+1}\}$에 대해 1차 B-spline은 다음과 같이 정의된다.

$$B_{i,1}(y) = X_i(y) := \begin{cases} 1, & y_i \le y < y_{i+1} \\ 0, & otherwise \end{cases}. \quad (2)$$

(정의 2): 고차 B-spline

고차의 B-spline은 다음과 같이 저차 B-spline의 재귀형으로 표현된다.

$$B_{i,k}(y) := w_{i,k}(y) B_{i,k-1}(y), \\ + (1 - w_{i+1,k}(y)) B_{i+1,k-1}(y), \quad (3)$$

$$w_{i,k}(y) := \begin{cases} \dfrac{y - y_i}{y_{i+k-1} - y_i}, & \text{if} \quad y_i \ne y_{i+k-1} \\ 0, & otherwise \end{cases}.$$

(참고 1): 위의 정의를 이용하면, k차의 B-spline은 $y_i \leqq y < y_{i+k}$ 에서만 0이 아님을 알수 있다(지엽 지지성:local support property).

(정의 3): spline

k차의 spline은 다음과 같이 B-spline들의 선형 조합으로 정의된다.

$$S_{k,y}(y) := \sum_i B_{i,k}(y) c_i, c_i \in R. \quad (4)$$

이제 위와 같이 정의된 spline을 이용한 시스템 근사법에 대해 Ⅳ에서 알아본다.

Ⅳ. spline에 기반한 시스템 근사와 적응 관측기의 설계

1. spline에 기반한 시스템 근사

식 (1)의 하위 시스템인, 다음과 같은 구조를 가지는 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(y), 1 \leqq i \leqq n-m-1, m \geqq 0, n > m, \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(y) + g_i(y) u(t), n-m \leqq i \leqq n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(y) + g_n(y) u(t), \\ y = x_1. \quad (5)$$

(가정 1): $f_i(y), 1 \leqq i \leqq n$ 은 부분적으로 알려진 부드러운(smooth) 함수이다.

이 경우 $f_i(y) = \nu_i(y) + \overline{f_i(y)}$로 쓸 수 있는데, 여기서 $\nu_i(y)$는 알려진 부분, $\overline{f_i(y)}$ 는 알려지지 않은 부분을 각각 의미한다. $\overline{f_i(y)}$는 어떤 종류의 범용 근사자로도 근사될 수 있는데 본 논문에서는 범용 근사자로 spline을 사용하므로 다음과 같이 $f_i(y)$들로 이루어진 벡터를 정의하고 이 벡터를 근사하기 위한 spline 모델을 구현한다.

$$\overline{F(y)} := [\overline{f_1(y)}, \ldots, \overline{f_n(y)}]^T, \quad (6)$$
$$\widehat{F}(y) = [S_{1,k,Y(y)}, \ldots, S_{n,k,Y(y)}]^T.$$

(가정 2): 여기서 추정치 $\widehat{F}(y)$ 에 있는 모든 spline들은 동일한 비감소 시퀀스 Y를 사용한다.

이제 (가정 2)와 (정의 3)으로부터 $\widehat{F}(y)$ 는 다음과 같이, B-spline의 선형조합인 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$\widehat{F}(y) = WB, \quad (7)$$
$$W = \begin{bmatrix} w_{1,1}, \ldots w_{1,q} \\ \ldots\ldots \\ w_{n,1}, \ldots w_{n,q} \end{bmatrix},$$
$$B = [B_{1,k}(y), \ldots, B_{q,k}(y)]^T.$$

한편 (참고 1)을 상기하면 특정 y에 대해 인접한 k개의 $B_{i,k}(y), 1 \leqq i \leqq q$만이 0이 아닌 것을 알 수 있다. 따라서 y가 고정된 경우, 어떤 i에 관해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\widehat{F}(y) = \overline{W}\,\overline{B}, \quad (8)$$
$$\overline{W} = \begin{bmatrix} w_{1,i-k+1}, \ldots w_{1,i} \\ \ldots\ldots \\ w_{n,i-k+1}, \ldots w_{n,i} \end{bmatrix},$$
$$\overline{B} = [B_{i-k+1,k}(y), \ldots, B_{i,k}(y)]^T.$$

여기서 $\overline{W}$ 의 원소는 i 에 따라 달라진다. 이제 $a \in R^{qn}$ 를 W 의 열을 세로로 배열한 벡터로 정의하고, $\overline{a} \in R^{kn}$ 를 $\overline{W}$ 의 열을 세로로 배열한 벡터로 정의하면 (8)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\widehat{F}(y) = \Gamma(y) a = \overline{\Gamma(y)}\ \overline{a}, \quad (9)$$
$$\Gamma(y) = [B_{1,k}(y) I, \ \ldots\ , B_{q,k}(y) I],$$
$$\overline{\Gamma(y)} = [B_{i-k+1,k}(y) I, \ \ldots\ , B_{i,k}(y) I].$$

단, 여기서 I 는 $n \times n$ 의 단위행렬이다.

(가정 3): $g_{k+n-m}(y), 0 \le k \le m$ 은 부분적으로 알려진 함수들이며 $g_{k+n-m}(y) = b_{m-k}\sigma(y), 0 \le k \le m$ 로 표현된다고 가정하자. 여기서 b_{m-k} 는 알지 못하는 상수이며 $\sigma(y): R \to R$ 은 알려진 함수이다.

(9)와 (가정 3)을 이용하면 (5)의 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}=Ax+\nu(y)+\tilde{\mathcal{F}}(y,u)+\Gamma(y)a+\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}\sigma(y)u, \tag{10}$$

$$y=e_1^T x,$$

$$A=\begin{bmatrix}01\ldots0\\001..0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\0\ldots01\\0\ldots00\end{bmatrix},$$

$$\nu(y)=[\nu_1(y)\ldots\nu_n(y)]^T,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(y,u)=[\tilde{\mathcal{F}}_1(y,u)\ldots\tilde{\mathcal{F}}_n(y,u)]^T,$$

$$e_1=[1\ldots0]^T.$$

여기서 $\tilde{\mathcal{F}}(y,u)$ 는 근사오차와 모델링 오차를 포함하는 불확실성이다. 여기서 $|y-e_1^T\hat{x}(t)|$ 를 줄이도록 a 와 b 를 갱신한다. 이를 위해 다음과 같이, 적응 알고리즘을 이용하여 갱신할 파라미터 벡터를 정의하자.

$$\theta=\begin{bmatrix}b\\a\end{bmatrix}\in R^{q+m+1}, \tag{11}$$

$$\Psi(y,u)^T=\left[\begin{bmatrix}0 & _{(\rho-1)\times(m+1)}\\ & I_{m+1}\end{bmatrix}\sigma(y)u \quad \Gamma(y)\right].$$

θ 를 갱신하기 위해 적용 가능한 적응 알고리즘은 그래디언트법(gadient method), 최소자승법(least squares method) , 혹은 재귀적 최소자승법 등이 있다.

2. spline에 기반한 적응 관측기의 설계

이제 필터링을 통한 관측기 설계에 관해 알아본다. 적응 알고리즘을 충분히 긴 시간동안 적용하고 spline의 개수를 충분히 많이 잡았을 때, 범용 근사자의 성질에 의해 $\tilde{\mathcal{F}}(y,u)$ 를 임의로 작게 만들 수 있으므로 이제부터는 $\tilde{\mathcal{F}}(y,u)=0$ 이라 가정한다. 이 경우 (11)을 이용하여 (10)을 다시 써 보면 다음과 같다.

$$\dot{x}=(A-KC)x+\nu(y)+Ky(t)+\Psi(y,u)\theta. \tag{12}$$

여기서 $C=e_1^T$ 이고 K 는 적절한 궤환이득이며 통상 $A-KC$ 가 안정하도록 극배치법(pole placement)을 통해 얻는다. 한편, (12)에서 계의 상태 x 는 다음과 같이, 파라미터에 의존하는 부분과 그렇지 않은 부분으로 나눌 수 있다.

$$x=x_\nu+x_\theta. \tag{13}$$

파라미터에 의존하는 부분:

$$\dot{x}_\theta=(A-KC)x_\theta+\Psi(y,u)\theta.$$

파라미터에 의존하지 않는 부분:

$$\dot{x}_\nu=(A-KC)x_\nu+\nu(y)+Ky(t).$$

여기서 x_ν 는 주어진 식으로부터 구할 수 있지만 θ 를 모르기 때문에 x_θ 는 직접 구할 수 없으므로 별도의 필터링을 거친다. 일단 다음 식을 만족하는 행렬 $\Omega(t)$ 가 존재한다고 가정한다.

$$x_\theta(t)=\Omega(t)\theta. \tag{14}$$

(14)를 이용하면 (13)의 두 번째 식으로부터 다음 과 같은 필터를 얻을 수 있다.

$$\dot{\Omega}(t)=(A-KC)\Omega(t)+\Psi(y,u). \tag{15}$$

이제 이 필터의 출력을 사용하는, 다음과 같은 상태 추정 알고리즘을 고려하자.

$$\hat{x}=x_\nu+\Omega^T\theta. \tag{16}$$

상태 추정 오차를 $\tilde{x}=x-\hat{x}$ 로 정의하고 가정에 의해 $\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t}=0$ 을 적용하면 (17)을 쉽게 유도할 수 있고, 이로 인해 이 필터의 추정성능을 보장할 수 있다. 이 추정법은 K-필터로 잘 알려져 있다[4].

$$\dot{\tilde{x}}=A_0\tilde{x}. \tag{17}$$

이로서 본 논문에서는 spline을 이용한 시스템 근사와 적응 관측기 설계를 다루었다. 한편 기존의 범용 근사자를 사용할 경우, (15)의 필터는 갱신할 파라미터의 개수가 늘어남에 따라 그 차원도 늘어나게 되어 계산양도 비례적으로 증가하게 된다. 하지만 spline을 범용 근사자로 사용할 경우 이러한 문제를 다음과 같이 해결할 수 있다. (15)에서 $\Omega(t)$ 는 크기가 $n\times(nq+1)$ 인 행렬이지만, 참고 1)과 (9)로부터 $\Gamma(y)\in R^{n\times nq}$ 에서 0이 아닌 부분은 $\overline{\Gamma(y)}\in R^{n\times nk}$ 뿐이며, $\overline{\Gamma(y)}$ 의 위치와 그 원소들이 y 의 변화에 따라 불연속적으로 변한다는 사실을 알 수 있다. 따라서 $\Gamma(y)$ 가 0인 부분에 상당하는 $\Omega(t)$ 의 원소들을 $\Omega_0(t)$ 라고 하면 다음과 같이 상태 천이 행렬(state transition matrix)을 이용, 잘 알려진 해석적 방법으로 계산할 수 있다. 여기서 t_i 는 $\overline{\Gamma(y)}$ 가 이동하는 순간의 시간을 나타낸다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_i)=(A-KC)\Phi(t,t_i),\quad \Phi(t_i,t_i)=I_{n\times n}, \tag{18}$$

$$\Omega_0(t) = \Phi(t, t_i)\Omega_0(t_i), \quad t_i < t \le t_{i+1}.$$

반면 $\Gamma(y)$ 가 0이 아닌 부분에 상당하는 $\Omega(t)$ 는 (15)를 직접 적분하여 구한다. 따라서 전체적으로 (15)의 필터는 다음과 같이 구성함으로서 실제로 적분기를 사용하는 부분의 차수는 파라미터 개수와 무관하게 된다. 즉, 모든 $t_i < t \le t_{i+1}$ 에 대해

$$
\begin{aligned}
&\Psi(y, u)^T = \left[\begin{bmatrix} 0_{(\rho-1)\times(m+1)} \\ I_{m+1} \end{bmatrix} \sigma(y)u \;\middle|\; 0_{n\times n(i-k)} \;\middle|\; \overline{\Gamma(y)} \;\middle|\; 0_{n\times n(q-i)} \right], \\
&\Omega_1 = (A-KC)\Omega_1 + \begin{bmatrix} 0_{(\rho-1)\times(m+1)} \\ I_{m+1} \end{bmatrix} \sigma(y)u, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_i) = (A-KC)\Phi(t, t_i), \quad \Phi(t_i, t_i) = I_{n\times n}, \\
&\Omega_2(t) = \Phi(t, t_i)\Omega_2(t_i), \\
&\Omega_3 = (A-KC)\Omega_3 + \overline{\Gamma(y)}, \\
&\Omega_4(t) = \Phi(t, t_i)\Omega_4(t_i), \\
&\dot{x}_\nu = (A-KC)x_\nu + \nu(y) + Ky(t), \\
&\hat{x} = x_\nu + [\,\Omega_1 \mid \Omega_2 \mid \Omega_3 \mid \Omega_4\,].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

와 같이 설계한다. 여기서 $\overline{\Gamma(y)}$ 의 이동이 일어나는 매 t_i 마다, $\Omega_i(t_i)$, $i=1,2,3,4$ 의 값이 유지되어 $\overline{\Gamma(y)}$의 이동 후 다이나믹의 초기치로 반영된다.

V. 결 론

본 논문에서는 B-spline을 범용 근사자로 사용하여 불확실성을 가지는 출력궤환형 비선형 시스템을 근사하고 이를 위한 상태 관측기를 설계하였다. 이 과정에서 B-spline의 지엽적 지지성(local support property)을 이용하여 필터의 차수가 파라미터 개수와는 독립적으로 고정될 수 있도록 설계하였다. 이는 갈수록 복잡성이 증가하는 비선형 시스템을 근사, 추정함에 있어서 큰 이점으로 작용할 수 있다. 향후 과제는 실시간으로 B-spline의 구조를 조정하는 것 등이 있다.

참 고 문 헌

[1] C. de Boor. A Practical Guide to Splines. Springer Verlag, New York, 1978.

[2] P. A. Ioannou and J. Sun. Robust Adaptive Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[3] A. Isidori. Nonlinear Control Systems - 3rd. ed. Springer Verlag, Berlin, 1996.

[4] G. Kreisselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. IEEE Transactions on Automatic Control, 22:2-8, 1997.

[5] M. Kristic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. Nonlinear and Adaptive Control Design. Wiley, New York, 1995.

[6] R. Marino and P. Tomei. Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust. Prentice Hall, New York, 1995.