2003 정보 및 제어 학술회의 (2003.11.21-22)

특이공간 회피에 의한 2차 비선형 시스템의 스위칭 제어기 설계

Switching Control for 2nd Order Nonlinear Systems by Avoiding Singular Manifolds

염 동 회*, 임 기 홍*, 최 진 영*
(D. H. Yeom, K. H. Im, and J. Y. Choi)

* 서울대학교 전기컴퓨터공학부(전화:(02)872-7283, 팩스:(02)885-4459,
E-mail : dhyeom/khim/jychoi@neuro.snu.ac.kr)

Abstract : This paper proposes a switching control method applicable to any affine, 2nd order nonlinear system with single input. The key contribution is to develop a control design method which uses a piecewise continuous Lyapunov function non-increasing at every discontinuous point. The proposed design method requires no restrictions except full state availability. To obtain a non-increasing, piecewise continuous Lyapunov function, we change the sign of off-diagonal terms of the positive definite matrix composing the former Lyapunov function according to the sign of the inter-connection term. And we use the solution of inequalities which guarantee each Lyapunov function is non-increasing at any discontinuous point.

Keywords : Switching control, Singular manifolds, Multiple Lyapunov function, Inter-connection term

I. 서 론

비선형 시스템의 제어문제를 다룰 수 있는 일반적인 방법은 알려져 있지 않다. 따라서 제어기 설계 방법은 개별 시스템마다 다르다. 단지, 특정한 부류의 비선형 시스템에 대해 제한적이지만 체계적인 방법들이 개발되어 있다. 예를 들어, 궤환 선형화를 이용해 비선형 시스템을 선형 시스템으로 변환하거나, 의사 제어입력의 적분으로부터 역방향으로 제어입력을 구하는 back stepping 기법, 그리고 제어신호의 스위칭을 통해 sliding surface로 상태변수를 몰아 가는 sliding mode control 기법 등이 알려져 있다. 그러나 궤환 선형화를 사용하기 위해서는 주어진 시스템이 상당히 엄격한 조건(rank condition, involutiveness)을 충족시켜야 한다[1]. back stepping의 경우, 시스템의 동력학이 특수한 형태(triangular form)를 가져야 한다[2]. 그리고 sliding mode control을 적용하기 위해서는 reachiability condition을 만족하도록 sliding surface를 설계해야 한다[3]. 이와 같이, 기존의 비선형 시스템 제어기는 예외 없이 많은 제약 조건이 따른다. 본 논문에서는 단일 입력, affine 형태의 비선형 시스템에 적용될 수 있는 일반적인 제어기법을 제안한다. 제안하는 설계 기법은 주어진 시스템에 대해 full state available하다는 것 외에는 다른 제약조건이 따르지 않는다.

주어진 시스템에 대해 임의의 quadratic form 에너지 함수를 정의한다. 이것을 시스템의 궤적을 따라 시간에 대해 미분을 구하여, 평형점을 제외한 모든 점에서 음의 함수가 되도록 제어입력을 설계한다. 이 방법은 시스템을 안정화시키는 제어기 설계의 가장 기본적인 개념이다[4]. 그러나 양의 에너지 함수의 미분이 음이 되도록 하는 제어입력이 항상 존재하지 않는다는 것이 문제이다. 즉, 제어입력이 유리함수의 형태로 주어지는 경우, 유리함수의 분모가 0이 되는 모든 점에서 제어입력은 정의되지 않는다. 따라서 분모가 0이 되는 점들의 집합(singular manifold)을 회피할 수 있는 방법이 요구된다. 그러나 불행하게도 singular manifold를 회피하는 것 만으로는 시스템을 안정화시킬 수는 없다. 왜냐하면 연속적인 제어입력으로는 singular manifold를 피할 수 없으므로 불연속적인 제어신호가 필요하며, 이 때 부분적으로 연속인 Lyapunov 함수가 각 구간에서 잘 정의되어도 전 구간에 대해 Lyapunov 함수가 불연속이므로 유한 시간 내에 상태변수의 수렴성을 보장할 수 없기 때문이다.

최근의 스위칭 시스템에 대한 연구결과에 따르면, 부분적으로 연속인 Lyapunov 함수가 모든 불연속점에서 증가함수가 아니라면 시스템의 점근 안정성을 보일 수 있다[5, 6, 7, 8, 9]. 본 논문에서는 각 구간에서 양의 에너지 함수의 시간 미분이 음의 함수가 되도록 Lyapunov 함수를 반복적으로 정의하는 방법과 모든 불연속 점에서 각 구간에서 정의된 Lyapunov 함수들이 비증가특성을 만족하도록 하는 설계 기법을 소개한다.

II. 문제설정

본 장에서는 본 논문의 동기와 문제를 진술한다. 주어진 시스템에 대해 임의의 quadratic form 에너지 함수를 정의하고 이것을 시스템의 궤적을 따라 시간에 대해 미분을 구하여 평형점을 제외한 모든 점에서 음의 함수가 되도록 제어입력을 설계한다. 다음과 같이 주어진 단일 입력, 어파인 형태의 비선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u \tag{1}$$

여기서 $f(x)$와 $g(x)$는 평형점 근방(U_e)에서 연속미분이 가능한 벡터 필드이고, $f(0)=0,\ g(x_e)\neq 0,\ x_e \in U_e,\ u \in \mathbb{R}$ 이다. 다음과 같이 임의의 Lyapunov 함수 후보를 설정한다.

$$V = x^T M x$$

여기서 M은 양의 행렬이다. 이것을 시스템의 궤적을 따라 시간에 대해 미분하면

$$\dot{V} = \dot{x}^T Mx + x^T M\dot{x}$$
$$= 2x^T Mf(x) + 2x^T Mg(x)u$$

이다. 이 때 제어입력을 아래와 같이 두면

$$u = \frac{1}{x^T Mg(x)}\left(-x^T Mf(x) - p(x)\right) \tag{2}$$

여기서 $p(\cdot)$는 양의 함수이다. 원점을 제외한 모든 x에 대해 $\dot{V} = -p(x) < 0$ 이다. 그러나 제어입력의 분모가 0인 경우, 제어입력이 정의되지 않으므로 시스템의 점근 안정성을 보장할 수 없다.

정의 1) 유리함수 형태의 제어입력에서 원점을 제외하고 분모가 0인 모든 점들의 집합을 singular manifold (generated by control input) S라 한다. 즉 주어진 시스템에 대해

$$\mathrm{S} = \left\{x \in \square^n \mid x^T Mg(x) = 0,\ x \neq 0\right\} \tag{3}$$

이다. □

M이 상수 행렬이므로 식 (2)와 같이 정의된 연속적인 제어입력으로는 S를 회피할 수 없다. 따라서 어떤 조건 하에서 새로운 양의 행렬 M'을 형성하여 S를 피하도록 한다. 이렇게 구성된 제어입력은 더 이상 연속적인 신호가 아니다. 따라서 Lyaupnov 함수가 부분적으로 잘 정의되어도 전 구간에 대해 불연속이므로 각 구간에서의 Lyapunov 함수의 존재성만으로는 시스템의 안정성을 주장할 수 없다. 다음 장에서는 일반적인 스위칭 시스템의 안정성에 대한 기존의 결과로부터 불연속적인 Lyapunov 함수를 가지는 시스템이 안정하도록 하는 추가적인 조건에 대해서 논의한다.

Ⅲ. 스위칭을 가지는 시스템의 안정성

본 장에서는 일반적인 스위칭 시스템의 안정성에 대한 논의를 다룬다. 주어진 시스템의 동력학이 연속적인 벡터장으로 구성된 경우일지라도 제어입력이 불연속적인 경우, 일반적인 Lyapunov 관점에서의 안정성을 주장할 수 없다. 단, common Lyapunov 함수를 구성할 수 있는 시스템의 경우, 불연속적인 제어입력 또는 벡터장에 대해서도 시스템의 점근 안정성을 보장할 수 있으나 각 구간에서 정의된 시스템이 지수적으로 안정해야 하고 벡터장간의 commute pairwise를 만족해야 한다[11, 12]. Common Lyapunov 함수를 구성할 수 없는 경우, 각 영역별로 정의된 multiple Lyapunov 함수의 존재성만으로는 시스템의 안정성을 보장할 수 없으며 모든 불연속점에서 Lyapunov 함수들이 비증가해야 한다는 추가적인 조건이 필요하다[1, 6-9]. 우선 일반적인 스위칭 시스템을 다음과 같이 정의한다[13, 14].

정의 2) 다음조건을 만족하는 $\mathrm{H} = (\square^n \times \mathrm{D}, \square^l \times \mathrm{I}, \mathrm{F}, \mathrm{P})$를 스위칭 시스템이라 한다.

- $\{\square^n \times \mathrm{D}\}$ 은 공집합이 아니며 H 의 상태공간이다.
- $\{\square^l \times \mathrm{I}\}$ 은 H 의 외부입력의 상태공간이다.
- 시스템을 구성하는 함수는 $\mathrm{F} : D_F \to \square^n$, $\mathrm{P} : D_P \to \mathrm{D}$ 이며, 여기서

$$\dot{x}(t) = \mathrm{F}\left(x(t), d(t), u(t)\right)$$
$$d^+(t) = \mathrm{P}\left(x(t), d(t), u(t), \sigma(t)\right)$$

$$D_F \subset \square^n \times \mathrm{D} \times \square^l$$
$$D_P \subset \square^n \times \mathrm{D} \times \square^l \times \mathrm{I}$$

와 같다. 시스템H 에서 x는 연속시간 상태변수이며 d는 이산시간 상태변수를 의미한다. u와 σ는 각각 연속시간 및 이산시간 입력이다. □

위에서 정의된 스위칭 시스템 중, 외부입력이 없거나 입력이 연속 및 이산 시간 상태변수의 함수로 주어지는 경우, autonomous 스위칭 시스템이라 하고 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = \mathrm{F}\left(x(t), d(t)\right)$$
$$d^+(t) = \mathrm{P}\left(x(t), d(t)\right) \tag{4}$$

스위칭 시스템의 안정성을 보이기 위해, 상태공간을 l개의 disjoint한 영역 Ω_q, $q \in I_l$으로 분리한다. 즉, $\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_l = \Omega$ 이고 $\Omega_q \cap \Omega_r = 0$, $q \neq r$이다. 여기서 l은 무한대도 가능하다. 그리고 인접영역 $\Lambda_{q,r}$, $q \in I_l$, $r \in I_l$, $(q \neq r)$을 다음과 같이 정의한다.

$$\Lambda_{q,r} = \{(x,d) \in \Omega \mid \exists t \text{ s.t. } \left(x(t-\varepsilon), d(t-\varepsilon)\right) \in \Omega_q$$
$$\&\ \left(x(t+\varepsilon), d(t+\varepsilon)\right) \in \Omega_r,\ \varepsilon \to 0\}$$

이 집합은 시스템의 궤적이 Ω_q에서 Ω_r로 통과할 때의 상태변수를 의미한다.

정리 1) 다음의 조건을 만족하는 $V_q(x) : cl\Omega_q \to \square$ 와 class K 함수 α, β, γ가 존재하면 평형점 0 는 Lyapunov 관점에서 점근적으로 안정하다.

$$\alpha\left(\|x\|\right) \leq V_q(x) \leq \beta\left(\|x\|\right),\ (x,d) \in \Omega_q$$
$$\dot{V}_q(x) \leq -\gamma\left(\|x\|\right),\ (x,d) \in \Omega_q \tag{5}$$
$$V_q(x) \geq V_r(x),\ (x,d) \in \Lambda_{q,r}$$

만약 위의 가정이 전 영역에서 만족되고 함수 α가 radially unboundedness 특성을 만족하면 평형점은 전역점근 안정성을 가진다. □

위 정리[13]에 의하면 각 구간에서 Lyapunov 함수 V_q가 잘 정의되고 스위칭 순간에 Lyapunov 함수들이 비증가이면 Lyapunov 함수들이 불연속일지라도 시간이 지남에 따라 함수값이 0으로 수렴하므로 시스템의 점근 안정성이 보장된다. 식 (1)과 같이 주어진 single input, affine 시스템을 다시 생각하자. 주어진 시스템 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$에 대해 각 구간에서 Lyapunov 후보 함수를 각각 $V_k = x^T M_k x$라 하고 제어입력을 다음과 같이 설정한다.

$$u = \frac{1}{x^T M_k g(x)}\left[-x^T M_k f(x) - p_k(x)\right] \tag{6}$$

여기서 $p(\cdot)$는 class K 함수이다. 각 구간에서 Lyapunov 후보 함수를 시스템의 궤적을 따라 시간에 대해 미분하면 $\dot{V}_k = -p_k(x) \leq -\gamma\left(\|x\|\right)$ 인 class K 함수 γ가 존재하므로 정리 1)의 첫 번째와 두 번째 조건을 만족시킨다. 즉, 각

구간에서 Lyapunov 함수가 잘 정의된다. 게다가 스위칭 전후의 Lyapunov 함수를 각각 $V_k = x^T M_k x$, $V_{k+1} = x^T M_{k+1} x$ 라 할 때, $V_k \geq V_{k+1}$ 이면 스위칭 순간에 대해 정리 1)의 세 번째 조건이 만족된다.

Ⅳ. 2차 시스템에 대한 스위칭 제어기 설계

본 장에서는 앞 장의 결과로부터 2차 비선형 시스템의 점근 안정성을 보장하는 스위칭 제어기를 설계한다. 스위칭 순간 Lyapunov 함수의 상호간섭항의 부호에 따라 2가지 경우로 나누어 논의한다. 먼저 상호 간섭항이 양수인 경우 다음의 정리가 성립한다.

정리 2) 주어진 양의 행렬

$$M_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \gamma_k \\ \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix}$$

에 대해 $\gamma_k z_1 z_2 > 0$ 이면, 비대각 항의 부호를 바꾼 행렬

$$M_{k+1} = \begin{bmatrix} \alpha_k & -\gamma_k \\ -\gamma_k & \beta_k \end{bmatrix} \tag{7}$$

는 양의 행렬이고 스위칭 순간 $z^T M_k z > z^T M_{k+1} z$ 이다. 여기서, $z = [z_1\ z_2]^T$ 는 스위칭 순간의 상태변수이다.

증명) M_k 가 양의 행렬이므로 이것의 leading principle minor들로부터 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$\alpha_k > 0$$
$$\beta_k > 0$$
$$\alpha_k \beta_k > \gamma_k^2$$

M_{k+1} 의 leading principle minor는 M_k 와 동일하므로 $M_{k+1} > 0$ 이다. 한편, $z^T M_k z - z^T M_{k+1} z = 4\gamma_k z_1 z_2$ 이고 $\gamma_k z_1 z_2 > 0$ 이므로 스위칭 순간 $z^T M_k z > z^T M_{k+1} z$ 이다. □

따라서 2차 시스템의 경우, 현재의 Lyapunov 함수 $V_k = x^T M_k x$ 에 대해 임의의 스위칭 순간에서 상호간섭항 $\gamma_k z_1 z_2$ 가 양수이면 단순히 M_k 의 비대각항의 부호를 바꾸어줌으로써 스위칭 이후의 Lyapunov 함수 $V_{k+1} = x^T M_{k+1} x$ 가 잘 정의되고 스위칭 순간 불연속적인 Lyapunov 함수가 비증가이다. 상호간섭항이 양수가 아닌 경우, 다음 정리가 성립한다.

정리 3) 주어진 양의 행렬

$$M_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \gamma_k \\ \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix}$$

에 대해 $\gamma_k z_1 z_2 \leq 0$ 일 때, 다음 조건을 만족하는 양의 상수 ω, ξ, η 가 존재하면

$$\omega \leq 1 - \frac{\gamma_k^2}{\alpha_k \beta_k},\ \xi \leq 1 - \frac{\gamma_k^2}{\alpha_k \beta_k}\frac{1}{1-\omega}$$

$$\eta < \min\left\{ \frac{\sqrt{(1-\omega)(1-\xi)\alpha_k \beta_k}}{|\gamma_k|} - 1,\ \frac{\sqrt{\omega \xi \alpha_k \beta_k}}{|\gamma_k|} \right\}$$

M_k 와 ω, ξ, η 로부터 구성한 새로운 행렬

$$M_{k+1} = \begin{bmatrix} \omega\alpha_k & -\eta\gamma_k \\ -\eta\gamma_k & \xi\beta_k \end{bmatrix} \tag{8}$$

은 양의 행렬이고 스위칭 순간 $z^T M_k z > z^T M_{k+1} z$ 이다.

증명) M_k 가 양의 행렬이므로 이것의 leading principle minors로부터 다음 관계를 얻는다.

$$\alpha_k > 0$$
$$\beta_k > 0$$
$$\alpha_k \beta_k > \gamma_k^2$$

M_{k+1} 의 leading principle minor는 다음과 같다.

$$\omega\alpha_k$$
$$\omega\xi\alpha_k\beta_k - \eta^2\gamma_k^2$$

다음 조건을 만족하면 M_{k+1} 의 leading principle minors는 모두 양수이며, 따라서 $M_{k+1} > 0$ 이다.

$$\omega > 0$$
$$\xi > 0$$
$$-\frac{\sqrt{\omega\xi\alpha_k\beta_k}}{|\gamma_k|} < \eta < \frac{\sqrt{\omega\xi\alpha_k\beta_k}}{|\gamma_k|} \tag{9}$$

한편, $z^T M_k z - z^T M_{k+1} z = \alpha_k(1-\omega)z_1^2 + \beta_k(1-\xi)z_2^2 + 2\gamma_k(1+\eta)z_1 z_2$ 이다. 이것이 임의의 상태변수에 대해 positive semi-definite하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\alpha_k(1-\omega) \geq 0$$
$$\beta_k(1-\xi) \geq 0$$
$$(1-\omega)(1-\xi)\alpha_k\beta_k \geq (1+\eta)^2\gamma_k^2 \tag{10}$$

여기서, M_k 의 leading principle minor가 모두 양수이므로 위 식은 다음과 동치이다.

$$\omega \leq 1$$
$$\xi \leq 1$$
$$-\frac{\sqrt{(1-\omega)(1-\xi)\alpha_k\beta_k}}{|\gamma_k|} - 1 \leq \eta \leq \frac{\sqrt{(1-\omega)(1-\xi)\alpha_k\beta_k}}{|\gamma_k|} - 1 \tag{11}$$

위 식에서 양의 η 가 존재하기 위해서

$$1 \leq \frac{\sqrt{(1-\omega)(1-\xi)\alpha_k\beta_k}}{|\gamma_k|}$$

를 만족하는 ξ 의 범위를 구하면

$$\xi \leq 1 - \frac{\gamma_k^2}{\alpha_k\beta_k}\frac{1}{1-\omega}$$

이다. 여기서 ξ 도 양수이기 위한 ω 의 범위를 구하면

$$0 \leq 1 - \frac{\gamma_k^2}{\alpha_k\beta_k}\frac{1}{1-\omega} \Rightarrow \omega \leq 1 - \frac{\gamma_k^2}{\alpha_k\beta_k}$$

이다. $\alpha_k\beta_k > \gamma_k^2$ 이므로 양수인 ω 가 존재한다. 그리고

$$\eta < \min\left\{ \frac{\sqrt{(1-\omega)(1-\xi)\alpha_k\beta_k}}{|\gamma_k|} - 1,\ \frac{\sqrt{\omega\xi\alpha_k\beta_k}}{|\gamma_k|} \right\}$$

만족하도록 η 를 제한시키면 ω, ξ, η 는 식 (9)와 (10)를 만족시킨다. 따라서 식 (9)에 의해 M_{k+1} 은 양의 행렬이며 식 (10)에 의해 $z^T M_k z > z^T M_{k+1} z$ 이다. □

상호 간섭항이 양수가 아닌 경우 정리 2)에서와 같이 단순히 비대각항의 부호를 바꾸는 것만으로는 $M_k \geq M_{k+1}$ 을 만족시킬 수 없다. 여기서 비대각항을 $\eta\gamma_k \operatorname{sgn}(\gamma_k x_1 x_2)$ 로 선정함으로써 $M_k \geq M_{k+1}$ 를 만족시킴과 동시에 스위칭 이후 상호간섭항이 양수가 되도록 한다. 이 부호가 다음 스위칭 순간까지 유지된다면 정리 2와 같이 단순히 비대각항의 부호를 바꾸는 것만으로 $M_{k+2} > 0$ 와 $z^T M_k z > z^T M_{k+1} z$ 을 만족시킬 수 있다.

정리 4) 주어진 시스템

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u$$

$$f(0) = 0,\ g(x_e) \neq 0,\ x_e \in U_e,\ u \in \square$$

에서 임의의 양의 행렬 M_0에 대해서 만약 $x^T M_k g(x) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ 이면 다음의 제어입력을 통해서 평형점은 점근적으로 안정하다.

$$u = \frac{1}{x^T M_k g(x)}\left[-x^T M_k f(x) - x^T M_k x\right]$$

여기서

$$M_{k+1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha_k & -\gamma_k \\ -\gamma_k & \beta_k \end{bmatrix} & ,\ \gamma_k z_1 z_2 > 0 \\ \begin{bmatrix} \omega\alpha_k & -\eta\gamma_k \\ -\eta\gamma_k & \xi\beta_k \end{bmatrix} & ,\ \gamma_k z_1 z_2 \leq 0 \end{cases} \tag{12}$$

증명) 구간연속인 Lyapunov 함수를 $V_k = x^T M_k x$ 로 취하면 $\lambda_{\min}(M_k)\|x\|_2^2 \leq V_k \leq \lambda_{\max}(M_k)\|x\|_2^2$ 이므로 정리 1의 첫 번째 조건이 만족된다. Lyapunov 함수의 시간미분 $\dot{V}_k = -x^T M_k x$ 은 $\dot{V}_k \leq \lambda_{\max}(M_k)\|x\|_2^2$ 이므로 정리1의 두 번째 조건이 만족된다. 그리고 스위칭 순간에 정리 2와 3에 의해 $z^T M_k z > z^T M_{k+1} z$ 이므로 정리 1의 세 번째 조건이 만족된다. □

여기서 스위칭으로 생성된 새로운 특이공간 $S' = \{x \in \square^2 \mid x^T M_{k+1} g(x) = 0,\ x \neq 0\}$ 이 스위칭 순간의 상태변수를 포함해서는 안 된다. 만약, $\gamma_k z_1 z_2 > 0$ 일 때 $z \in S'$ 이면 M_{k+1} 을 식 (12)의 두 번째 방법으로 생성하고, $\gamma_k z_1 z_2 \leq 0$ 일 때 $z \in S'$ 이면 식 (12)의 두 번째 방법에서 다른 ω, ξ, η 를 설정하여 M_{k+1} 을 생성해야 한다.

원점 근방에서 $f(0) = 0,\ g(x_e) \neq 0$ 이므로 제어입력의 분모항은 0에 대해서 1차이며 분자항은 0에 대해서 2차이다. 따라서 원점 근방에서 제어입력은 잘 정의된다.

V. 결 론

본 논문에서는 단일입력을 가지는 어파인(affine)한 2차 비선형 시스템에 적용 가능한 스위칭 제어기법을 제안하였다. 본 제어기법은 모든 불연속 시점에서 비증가 Lyapunov 함수를 반복적으로 생성하는 방법을 제공하며, 전체 상태변수의 궤환만 구현된다면 다른 부가적인 제한조건을 가지지 않는다는 장점을 가지고 있다. 본 기법에서 요구되는 스위칭 순간에서의 Lyapunov 함수의 감소특성을 구현하기 위해서는 스위칭 이전의 Lyapunov 함수에 이용된 양의 행렬의 상호간섭항(inter-connection)의 부호를 참조함으로써 비대각 항들의 부호를 바꾸는 간단한 방법을 통해서 구현이 가능하다. 그리고, 각 스위칭 순간에서의 Lyapunov 함수의 감소특성을 보이는 부등식의 해를 이용함으로써 스위칭을 포함하는 전체적인 안정성을 증명하였다. 향후 일반적인 n차 시스템에 대해 본 기법을 확장하고 구체적인 스위칭 신호 생성규칙 및 Zeno 현상을 방지하기 위한 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

[1] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov Function and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 475-482, April 1998.

[2] C. Edwards and S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, Taylor & Francis, 1998

[3] J. P. Hespanha, "Extending Lasalle's Invariance Principle to Switched Linear Systems," *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2496-2501, December 2001.

[4] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and E. D. Sontag, "Nonlinear Observability and an Invariance Principle for Switching Systems," *Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4300-4305, December 2002.

[5] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, 1996.

[6] D. Liberzon and A. S. Morse, "Basic Problems in Stability and Design of Switching Systems," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 19, pp. 59-70, October 1999.

[7] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design : Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice Hall, 1995.

[8] S. Pettersson, *Analysis and Design of Hybrid Systems*, Thesis for the degree of doctor of philosophy, Chalmers Univ. of Technology, G?teborg Sweden, 1999.

[9] S. Pettersson and B. Lennartson, "Stability and Robustness for Hybrid Systems," *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pp. 1202-1207, December 1995.

[10] S. Sastry, *Nonlinear Systems : Analysis, Stability, and Control*, Springer-Verlag, 1999.

[11] H. Shim, D. J. Noh, and J. H. Seo, "Common Lyapunov Function for Exponentially Stable Nonlinear Systems," *Proceedings of the 4th SIAM Conference on Control and its Applications*, 1998

[12] M. A. Wicks and P. Peleties, "Construction of Piecewise Lyapunov Functions for Stabilizing Switching Systems," *Proceedings of the 33th Conference on Decision and Control*, pp. 3492-3497, December 1994.

[13] H. Ye, A. N. Michel, and L. Hou, "Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 461-474, April 1998.