2003 정보 및 제어 학술회의 (2003.11.21-22)

구동기 고장을 가지는 특이시스템의 신뢰 H_∞ 제어

Reliable H_∞ control for descriptor systems with actuator failures

김 종 해

선문대학교 전자정보통신공학부(전화: (041)530-2352, 팩스: (041)530-2910, E-mail: kjhae@sunmoon.ac.kr)

Abstract : In this paper, we provide a reliable H_∞ controller design method for descriptor systems satisfying asymptotic stability with H_∞ norm bound and all actuator failures occurred within the pre-specified subset. The proper condition for the existence of a reliable H_∞ controller and the controller design method are proposed by linear matrix inequality(LMI), Schur complements, and singular value decomposition. All solutions can be obtained simultaneously because the presented sufficient condition can be expressed as an LMI form.

Keywords : Descriptor systems, reliable H_∞ control, actuator failures, linear matrix inequality

Ⅰ. 서 론

지난 수십 년 동안 활발히 연구되고 있는 H_∞ 제어는 자동제어 분야에서 중요한 개념의 하나였다. H_∞ 이론을 바탕으로 하는 제어기 설계 알고리듬이 수학적으로 완벽히 개발되었다 할지라도 대부분의 설계방법은 비정규(non-regular) 특이시스템의 상태공간 모델을 다루었다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 최근 특이시스템(descriptor systems)에 대한 H_∞ 제어연구가 활발해지면서 여러 가지 설계기법들이 개발되었다. 결국, 특이시스템을 다룰 경우 비특이시스템을 포함하는 여러 가지 동특성을 다룰 수 있다는 장점이 있다. 상태공간으로 표현되는 시스템에 제어이론을 적용하기 위해서는 비선형 형태의 미분방정식이나 차분방정식으로 표현되는 모델이 필요하다. 하지만, 비선형 방정식을 적절한 방법으로 선형화하는 과정에서 계수의 문제가 발생하는 특이시스템에 직면하게 된다. 일반적인 기존의 제어기 설계기법은 특이 현상을 피하기 위하여 제약조건을 주거나 시스템을 변화시켜 원래의 동특성(dynamics)을 무시한다. 따라서, 불확실성이나 모델링 오차 등이 증가하여 실제 적용에서 예상하지 못한 임펄스(impulse)나 히스테리시스(hysteresis) 등의 물리적 현상이 일어나고, 이러한 현상은 기존의 상태공간 모델로는 적절히 다룰 수가 없다[1,2].

특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 특징들로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템의 연구가 활발히 진행되고 있다. Masubuchi 등[1]은 임펄스 모드와 허수축 제로를 가지는 특이시스템에 대한 가정을 없애는 특이시스템의 H_∞ 제어기 설계방법을 구하고자 하는 해가 상호결합된 3개의 리카티 행렬부등식을 이용하여 제시하였다.

"이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음." (KRF-2003-003-D00116)

그러나, 3개의 행렬부등식이 서로 구하려는 해의 견지에서 상호 결합되어 있어서 최적의 해를 구하기 힘들다는 단점이 있다. Rehm과 Allgöwer[3]는 시스템 행렬에 노옴 한계를 가지는 불확실성을 가지는 비정규 특이시스템의 H_∞ 제어문제를 다루었다. 또한, Takaba 등[4]은 불확실 특이시스템의 H_2 제어문제를 다루었다. Hung과 Lee[5]는 시간지연을 가지는 특이시스템에 대하여 변형한 리카티 방정식 방법으로 상태궤환 H_∞ 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만, 제어기를 설계하기 위해서는 몇 개의 변수의 값을 미리 선정해야 하는 등 최적의 해를 구할 수 없다.

또한, 실제 시스템에서는 구동부의 고장이 일어날 수 있으므로, 기존의 제어기법들을 사용해서는 원하는 성능이나 안정성을 보장할 수 없다. 따라서, 제어기를 설계할 때 일어날 수 있는 구동부의 고장을 미리 제어 설계시에 고려하여야 한다. Seo 등[6]과 Veillet 등[7]은 구동기 고장을 가지는 상태공간 시스템에 대한 해석과 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만, 구동기 고장을 가지는 특이시스템에 대한 신뢰 H_∞ 제어기 설계방법은 없는 실정이다.

본 논문에서는 미리 설정한 영역에서 발생하는 구동기를 가지는 특이시스템에 대하여 H_∞ 노옴 한계와 점근적 안정성을 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기 설계방법을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제시하고자 한다.

Ⅱ. 문제설정

선형 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1u(t) + B_2w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_1u(t) + D_2w(t) \end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(t) \in \mathbf{R}^n$는 상태, $z(t) \in \mathbf{R}^l$는 제어될 출력, $u(t) \in \mathbf{R}^m$는 제어입력, $w(t) \in \mathbf{R}^p$는 외란입

력, E는 $rank(E) = r \le n$을 만족하는 특이행렬, 그리고 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다. 제어시스템의 구동부는 2개의 집합으로 나눈다. 구동기 고장은 제어입력 $u(t)$와 관련되며, 하나는 $\Omega \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$으로 표시되는 고장이 허용되고 신뢰할 수 없는 구동기 집합이고, 다른 집합은 $\overline{\Omega} \subseteq \{1,2,\ldots,m\} - \Omega$으로 표현되는 구동부 고장에 신뢰할 수 있는 집합이다. 이러한 집합 $\overline{\Omega}$는 주어진 시스템의 안정성을 위하여 고장이 발생하지 않는다고 가정한다. 즉, 주어진 행렬은

$$B_1 = B_\Omega + B_{\overline{\Omega}} \tag{2}$$

로 분해할 수 있고, B_Ω는 집합 Ω와 관련된 제어행렬이고, $B_{\overline{\Omega}}$는 $\overline{\Omega}$와 연관되는 신뢰하는 제어행렬이다. 여기서, B_Ω와 $B_{\overline{\Omega}}$는 영행렬을 열(column)로 대입함으로 쉽게 얻을 수 있다[6]. 특이시스템 (1)과 관련하여 제안하는 신뢰 H_∞ 제어기는

$$u(t) = Kx(t) \tag{3}$$

이고, 식 (3)과 식 (1)로 구성되는 폐루프시스템은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + B_1K)x(t) + B_2w(t) \\ z(t) &= (C + D_1K)x(t) + D_2w(t) \end{aligned} \tag{4}$$

이다. 또한, H_∞ 성능지수는

$$J = \int_0^\infty [z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)]dt \tag{5}$$

이다. 따라서, 본 논문의 목적은 외란과 정해진 집합 Ω내에서의 구동기의 고장에도 불구하고 폐루프시스템 (4)에서 정규성(regular), 임펄스프리(impulse free), 점근적 안정성(asymptotic stability)과 H_∞ 노옴 한계를 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기 (3)을 구하는 것이다.

정의 1. $E\dot{x}(t) = Ax(t)$의 시스템에 대한 특이시스템의 성질을 간단히 정리한다.

i) $|sE - A| \neq 0$이면 $(sE - A)$는 정규적이다.
ii) 특이시스템이 임펄스프리이기 위한 필요충분조건은 $rank(E) = deg|sE - A|$를 만족하는 것이다.
iii) 특이시스템이 가지는 모든 모드가 감소하면 시스템은 점근적으로 안정하다.

보조정리 1. 주어진 $\gamma > 0$에 대하여, 상태궤환 제어 (3)에 의해 정규성, 임펄스프리, ASH∞-AF(Ω내에서의 구동기의 고장과 외란에도 불구하고 H_∞ 노옴 한계를 만족하는 점근적으로 안정하다)를 만족할 필요충분조건은 아래의 등가시스템(equivalent system)이

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_{\overline{\Omega}}u(t) + B_w\hat{w}(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_{\overline{\Omega}}u(t) + D_w\hat{w}(t) \end{aligned} \tag{6}$$

동일한 제어기 (3)을 가지고 정규성, 임펄스프리, ASH∞-AF를 만족하는 것이다. 여기서, 몇 가지 변수들은

$$\begin{aligned} B_w &= [B_2 \ \ B_\Omega] \\ D_w &= [D_2 \ \ D_\Omega] \\ \hat{w}(t) &= \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

과 같이 정의되고, $v(t)$는 고장난 구동부의 출력이다.

증명: H_∞ 성능지수 (5), 적절한 리아푸노프 함수 및 존재하는 결과[3,6,7]들을 이용하면 쉽게 유도된다. ■

따라서, 제어기 (3)과 등가시스템 (6)으로 구성되는 폐루프시스템은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_Kx(t) + B_w\hat{w}(t) \\ z(t) &= C_Kx(t) + D_w\hat{w}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

이다. 따라서, 등가시스템 (8)에서 정규성, 임펄스프리, ASH∞-AF를 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기를 구하는 것이 목적이다.

III. 특이시스템의 신뢰 H_∞ 제어

본 절에서는 특이시스템의 신뢰 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 다룬다.

정리 1. 특이시스템 (8)을 다룬다. 주어진 $\gamma > 0$에 대하여, 아래의 행렬부등식

$$E^TP = PE \ge 0 \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} A_K^TP + P^TA_K & P^TB_w & C_K^T \\ * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

을 만족하는 역행렬이 존재하는 P와 제어이득 K가 존재하면 (3)은 폐루프시스템 (8)을 정규성, 임펄스프리, ASH∞-AF를 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기이다.

증명: 식 (9)를 만족하는 리아푸노프(Lyapunov) 방정식

$$V(x(t)) = x(t)^TE^TPx(t) \tag{11}$$

을 잡고, 폐루프시스템 (8)의 해에 따른 시간에 대한 미분을 구하면

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T E^T P x(t) + x(t)^T P^T E \dot{x}(t) \tag{12}$$

와 같다. 식 (5)와 (12)의 관계로부터 식 (10)은

$$z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(x(t)) < 0 \tag{13}$$

을 의미한다. 따라서,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_K^T P + P^T A_K + C_K^T C_K & P^T B_w + C_K^T D_w \\ * & -\gamma^2 I + D_w^T D_w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

를 얻고, 식 (14)는 슈어 여수정리(Schur complements)에 의하여 식 (10)을 구할 수 있다. 정규성과 임펄스프리의 성질은 참고문헌 [5]의 정의와 보조정리로부터 쉽게 증명된다. ■

정리 1은 구하고자 하는 변수의 견지에서 볼록최적화가 불가능하고 식 (9)에서는 등호를 포함하고 있어서 해를 구하기가 쉽지 않다. 따라서, 적절한 분해와 전개를 통하여 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식의 형태로 신뢰 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 아래 정리 2에서 제시한다.

정리 2. 주어진 $\gamma > 0$에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & B_{21} & \Sigma_4 \\ * & \Sigma_3 & B_{22} & \Sigma_5 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

을 만족하는 양의 정부호(positve-definite) 행렬 Q_1, 역행렬이 존재하는 행렬 Q_4 및 행렬 Q_2, M_1, M_2가 존재하면, 아래의 형태

$$K = [M_1 P_1 + M_2 P_3 \quad M_2 P_4] \tag{16}$$

으로 표현되는 제어이득은 폐루프시스템 (8)을 정규성, 임펄스프리, ASH∞-AF를 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기이다. 여기서, 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\Sigma_1 = A_1 Q_1 + Q_1 A_1^T + B_{11} M_1 + M_1^T B_{11}^T$$
$$\Sigma_2 = Q_3^T A_4^T + B_{11} M_2 + M_1^T B_{12}^T$$
$$\Sigma_3 = A_4 Q_4 + Q_4 A_4^T + B_{12} M_2 + M_2^T B_{12}^T$$
$$\Sigma_4 = Q_1 C_1^T M_1^T D_\Omega^T$$
$$\Sigma_5 = Q_3 C_1^T + Q_4 C_2^T + M_2^T D_\Omega^T$$
$$P_1 = Q_1^{-1}$$
$$P_4 = Q_4^{-1}$$
$$P_3 = -P_4 Q_3 P_1$$

증명: 슈어 여수정리와 변수 치환, $Q = P^{-1}$, $M = KP^{-1} = KQ$,을 이용하면 식 (10)은

$$\begin{bmatrix} AQ + Q^T A^T + B_\Omega M + M^T B_\Omega^T & B_w & QC^T + M^T D_\Omega^T \\ * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{17}$$

로 변형된다. 식 (9)에서 등호를 없애고 구하려는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식을 만들기 위하여 일반성을 상실함 없이

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix},\ B_\Omega = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix},\ B_w = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix},$$
$$C = [C_1 \quad C_2],\ D_\Omega = D_\Omega,\ D_w = D_w \tag{18}$$

과 같은 특이치분해(singular value decomposition)[1,2]를 사용한다. 또한 식 (9)의 조건을 만족하기 위하여

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \tag{19}$$

로 두고, 구하려는 다른 해를

$$M = [M_1 \quad M_2]$$
$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

과 같이 정의한다. 식 (18), (19), 및 (20)을 식 (17)에 대입하면 식 (15)를 얻을 수 있다. ■

참조 1. $E = I$인 경우, 비특이시스템에 대한 문제가 식 (17)의 선형행렬부등식으로부터 얻을 수 있다. 따라서 제안한 제어기 설계 알고리듬은 특이시스템에 대한 문제 뿐만 아니라 상태공간 문제를 다루는 비특이시스템의 문제까지도 해결하는 일반적인 알고리듬이다. 또한, 제안한 알고리듬은 특이시스템의 다양한 형태에 적용 가능하다.

예제. 제안한 알고리듬의 타당성을 위하여 구동기 고장을 가지는 특이시스템

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}5&0.2&0\\0&3&0.1\\0.1&0&0.1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.01&0\\0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix}w(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1&0.5&1\\0.5&1&0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix}w(t)$$

을 다룬다. 여기서, 구동기 고장을 $\Omega=\{3\}$으로 선정하면 구동부의 행렬은 식 (2)를 이용하여

$$B_{\overline{\Omega}}=\begin{bmatrix}5&0.2&0\\0&3&0\\0.1&0&0\end{bmatrix},\ B_{\Omega}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0.1\\0&0&0.1\end{bmatrix}$$

$$D_{\overline{\Omega}}=\begin{bmatrix}1&0.5&0\\0.5&1&0\end{bmatrix},\ D_{\Omega}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

으로 영행렬을 추가하여 분해할 수 있다. 따라서, 보조정리 1로부터 구성되는 등가시스템은

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}5&0.2&0\\0&3&0\\0.1&0&0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.01&0&0&0&0\\0.1&0&0&0&0.1\\0&0.1&0&0&0.1\end{bmatrix}w(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1&0.5&1\\0.5&1&0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.1&0&0&0&1\\0&0.1&0&0&0\end{bmatrix}w(t)$$

으로 구성되고, $\gamma=2$로 잡으면 구하고자 하는 모든 해는 정리 2와 LMI 도구상자[8]로부터

$$Q=\begin{bmatrix}15.3581&-16.6533&0\\-16.6533&77.5916&0\\2.5186&-5.1193&0.0431\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}-13.1273&-21.2000&-1.4256\\5.8778&-48.2097&3.1178\\0&0&0\end{bmatrix}$$

와 같이 한번에 구해질 수 있다. 따라서, 구하고자 하는 특이시스템의 신뢰 H_∞ 제어기는

$$u(t)=\begin{bmatrix}2.4891&-1.9234&-33.1087\\-9.1036&2.2021&72.4082\\0&0&0\end{bmatrix}x(t)$$

이다. 따라서, 구한 제어기는 외란과 구동기 고장을 가지는 특이시스템에 대하여 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성과 H_∞ 노옴 한계를 만족한다.

IV. 결 론

본 논문에서는 외란과 미리 설정한 집합내에서의 구동기 고장의 존재에도 불구하고 점근적 안정성, 정규성, 임펄스프리를 만족하는 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기 설계방법을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 방법을 사용하여 제시하였다. 제어기가 존재할 선형행렬부등식의 충분조건과 제어기 설계방법을 제안하고 예제를 통하여 제안한 알고리듬의 타당성을 확인하였다. 제시한 알고리듬은 상태공간모델로 표현되는 비특이시스템의 제어기 설계문제까지도 포함하므로 일반적인 제어기 설계 알고리듬이다. 또한, 다양한 특이시스템의 제어기 설계방법에도 적용가능하다.

참 고 문 헌

[1] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 9-673, 1997.

[2] H. S. Wang, C. F. Yung, and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 145, pp. 316-322, 1998.

[3] A. Rehm and F. Allgöwer, "H_∞ control of descriptor systems with norm-bounded uncertainties in the system matrices," *Proc. American Control Conf.*, pp. 3244-3248, 2000.

[4] K. Takaba and T. Katayama, "Robust H_2 performance of uncertain descriptor systems," *Proc. European Control Conf.*, WE-E-B-2, 1997.

[5] S. S. Hung and T. T. Lee, "Memoryless H_∞ controller for singular systems with delayed state and control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 336, pp. 911-923, 1999.

[6] C. J. Seo and B. K. Kim, "Robust and reliable $H\infty$ control for linear systems with parameter uncertainty and actuator failure," *Automatica*, vol. 32, pp. 65-467, 1996.

[7] R. J. Veillette, J. V. Medanic, and W. R. Perkins, "Design of reliable control systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 37, pp. 290-304, 1998.

[8] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.