단조 스텝응답을 주는 연속계 전달함수의 합성조건 : 가설

A Synthesis Condition of Continuous Transfer Function for Monotonic Step Response : Hypothesis

한 상 용*, 조 태 신**, 우 영 태***, 김 영 철****
(Sang Yong Han, Tae Shin Cho, Young Tae Woo, and Young Chol Kim)

* 충북대학교 전자공학과 (전화:(043)261-2475, 팩스:(043)272-2475, E-mail : syhan@cbcon.chungbuk.ac.kr)
** 충북대학교 전자공학과 (전화:(043)261-2475, 팩스:(043)272-2475, E-mail : tscho@cbcon.chungbuk.ac.kr)
*** 충북대학교 전자공학과 (전화:(043)261-2475, 팩스:(043)272-2475, E-mail : wytnice@cbcon.chungbuk.ac.kr)
**** 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 (전화:(043)261-2475, 팩스:(043)272-2475, E-mail : yckim@cbnu.ac.kr)

Abstract : In this paper, a hypothesis in order that the impulse response of a stable linear system does not change sign is suggested. For fixed zeros of the systems, the problem of synthesizing such a system is reduced to the problem of finding a proper denominator polynomial so that the step response of the overall system will not overshoot. The hypothesis is associated with the generalized time constant by Kim[5]. Under the hypothesis, we propose several methods that allow to compose a continuous time LTI systems achieving non-negative impulse response.

Keywords : Non-negative impulse response, No undershoot, No overshoot, Characteristic Ratio Assignment

I. 서 론

로봇공정, 공작기계, HDD 서보, 화학공정 등 많은 실제적인 제어시스템에서 스텝응답이 오버슈트 및 언더슈트를 갖지 않기를 요구한다. 단조증가 스텝응답을 주는 목표시스템을 구성하려할 때, 만약 영점이 없다면 이를 구하는 수많은 방법이 있다. 그러나 영점을 포함하는 경우에는 문제가 간단하지 않다.

기존의 비부 임펄스응답에 관한 극, 영점을 근거한 연구는 [1]-[4], [7]에서 볼 수 있다. 한편, 극과 영점에 의한 앞서의 결과와는 달리 Kim등[6]은 일반화 시정수 (generalization time constant)와 계수비라 불리는 두 가지의 중요한 파라미터를 정의하고 시간영역 응답 특히 응답속도와 오버슈트에 해당하는 파라미터의 성질을 해석적으로 보였다.

선형피드백 시스템에서는 폐루프 전달함수에 플랜트의 영점이 반드시 포함하게 된다. 모델정합 방법 (model-matching method)에 의해 제어기를 설계하는 경우에는 먼저 목표시스템을 선택해야 하는데, 이 문제는 고정 영점을 갖는 조건하에서 비부 임펄스응답을 가지는 특성다항식을 구하는 문제로 나타나게 된다.

본 논문에서는 이 문제의 해에 대한 하나의 가설을 제시하고 가설이 사실인 경우에 이 조건을 만족하는 목표시스템의 합성방법을 제시하고자 한다. Darbha 조건은 주어진 한쌍의 복소영점(또는 음의 실수 영점)에 대해 음의 실수축에 놓이게 되는 극의 위치와 차수의 부등식으로 표현된다. 그러나 모든 극이 동일 위치에 놓여야 하기 때문에 실제 제어기 설계문제에 적용시 불확실성에 대한 근감도가 커지는 단점이 있다. 본 논문의 가설의 개요는 다음과 같다.

먼저 비부임펄스 응답을 주는 임의 차수를 갖는 전극 시스템(all pole system: ASP)을 $H_n(s)$라 하고, $H_n(s)$의 분모다항식을 Kim등[5]에 의해 제시된 일반화 시정수 τ에 의해 변환된 것을 $H_n(\tau, s)$라 하자. 한쌍의 고정 복소영점(또는 음의 실수 영점) $N_1(s) = (s+\sigma_1)^2 + w_1^2$에 대해, $G_n(s) = N_1(s) H_n(\tau, s)$가 비부 임펄스응답을 갖게 하는 τ가 존재한다는 것이다. 이 조건을 해석적으로 입증하지 못하였으나 성립하지 않는 반증도 찾기 어려워 가설로 제시한다. 그런데 이 가설아래에서는 Darbha 조건보다 훨씬 다양한 APS의 합성을 가능하게 함을 보인다.

II. 비부 임펄스응답에 대한 기존결과

1. 극, 영점에 근거한 비부 임펄스응답 조건

전달함수의 극, 영점으로부터 시스템의 임펄스와 스텝응답의 과도 상태를 규명하는 문제는 예전부터 많이 연구되어왔다. Jayasuriya[2]는 오버슈트를 갖지 않는 전달함수를 얻기 위해 오버슈트가 없는 기초적인 전달함수를 집합을 구한 뒤 이들의 콘볼루션을 취하는 방법을 제안했다.

정리 2.1[2] : 만약 $\alpha \geq p > 0$이면, 안정한 전달함수 $G(s) = k\dfrac{1}{(s+p)(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)}$의 임펄스응답은 음의 값을 갖지 않는다.

정리 2.2[2] : 음의 값을 갖지 않는 함수 $f_1(t)$, $f_2(t)$의 콘볼루션 $f_1(t) * f_2(t)$도 역시 음의 값을 갖지 않는 함수가 된다.

또한, 최근에 Darbha[7]는 개방루프 시스템이 양의 실수 영점만 갖지 않으면, 필요충분조건으로 폐루프 시스템의 임펄스응답이 음의 값을 갖지 않게 하는 안정한 보상기의 설정이 가능함을 보였다.

정리 2.3[7] : 유리전달함수 $\hat{G}(s)$가 어떠한 실수 비최소위상 영점을 갖지 않으면, 필요충분조건으로 폐루프 시스템의 임펄스응답이 안정하며 음의 값을 갖지 않는 보상기가 존재한다.

여기서 다음과 같은 하나의 플랜트를 고려하자.

$$\hat{G}(s) = \prod_{k=1}^{r} N_k(s)/D(s),$$

$$N_k(s) = (s-\sigma_k)^2 + w_k^2,\ \sigma_k > 0$$

폐루프 시스템의 전달함수 $T_k = \frac{(s-\sigma_k)^2 + w_k^2}{(s+\alpha)^{n_k}}$로 설계했을 때, 다음의 조건을 만족하면 응답의 부호변화가 없다.

$$(n_k - 2) \cdot w_k^2 \ \geq \ (\alpha + \sigma_k)^2 \tag{1}$$

각각의 영점에 대해서 n_k차의 중근 α를 놓음으로써 비부 임펄스응답을 주는 전달함수를 만든다.

2. 특성비와 일반화시정수에 근거한 비부임펄스 조건

2.1 특성비(Characteristic Ratio)

양의 실수의 계수를 갖는 다항식이 주어졌다.

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0,\quad \forall a_i > 0. \tag{2}$$

Naslin에 의해 정의된 다항식의 계수로부터 얻어지는 새로운 파라미터를 정의한다.

특성비(Characteristic Ratio :CR)는

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2},\ \alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3},\ \cdots,\ \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n},$$

로 정의된다.

2.2 일반화 시정수(Generalized Time Constant)

시정수는 응답의 속도를 결정하기 때문에 중요한 파라미터이다. 시정수의 정의는 1차 시스템의 경우에 명확하지만 배수의 시정수가 존재할 때 정확한 정의는 알려지지 않았다. 이러한 이유로 고차전달함수가 포함된 시스템에 대해 원하는 응답속도를 얻는 것은 매우 어렵다. 고차항의 응답속도를 결정하기위한 방법으로 Kim등[5]은 일반화 시정수를 통한 방법을 제시했다. 일반화 시정수는 다음과 같이 정의한다.

$$\tau := \frac{a_1}{a_0} \tag{3}$$

이에 $p(s)$의 계수 a_i는 아래와 같이 α_i와 τ의 항으로 표현할 수 있다.

$$a_1 = a_0 \cdot \tau \tag{4}$$

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}^2\alpha_{i-3}^3 \cdots \alpha_2^{i-2}\alpha_1^{i-1}},\quad i = 2, \cdots, n \tag{5}$$

정리 2.4[5] : 동일 차수를 갖는 두개의 APS $G_1(s)$, $G_2(s)$에 대해 각각의 일반화 시정수가 τ_1, τ_2이고, 스텝 응답을 $y_1(t)$, $y_2(t)$라 하면,

$$y_1(t) = y_2\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot t\right),\quad \forall t \geq 0 \tag{6}$$

위 관계식이 만족하기 위한 필요충분조건은 $p_1(s)$와 $p_2(s)$가 식(7)처럼 동일한 특성비를 가져야만 한다.

$$\frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}} = \frac{b_i^2}{b_{i-1}b_{i+1}} = \alpha_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{7}$$

정리 2.5[5] : $G_1(s)$와 $G_2(s)$는 같은 특성비를 갖는 APS이라고 가정한다. 각 시스템에 해당하는 일반화 시정수를 τ_1과 τ_2라 놓으면 임의의 시간 t_1과 t_2에 대해 $y_1(t_1) = y_2(t_2)$가 만족하기 위한 필요충분조건은 $\tau_2 = (t_2/t_1) \cdot \tau_1$이다.

정리 2.6[5] : Hurwitz 다항식 $p_1(s)$과 $p_2(s)$를 고려한다. τ_1과 τ_2는 $p_1(s)$과 $p_2(s)$의 일반화 시정수이다. 또한 γ_i와 $\hat{\gamma}_i$는 $p_1(s)$과 $p_2(s)$의 근이라 할 때, 아래의 식이 만족하기 위한 필요충분조건은 $p_1(s)$와 $p_2(s)$가 똑같은 특성비를 가져야만 한다.

$$\hat{\gamma}_i = \frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot \gamma_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

2.3 오버슈트를 갖지 않는 계수비

Kim등[5]은 특성비 α_i의 항으로 Butterworth 다항식을 통하여 APS 함수가 주파수응답 진폭함수가 단조감소이며 최대 편평(maximally flat)이기 위한 조건을 찾았다. 다음은 그 결과를 정리한 것이다.

정리 2.7[5] : $G(s)$는 영점이 없는 전달함수:

$$G(s) = \frac{a_0}{p(s)}$$

$$= \frac{a_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0},\quad a_i > 0$$

그리고 α_i는 $p(s)$의 특성비이다. 전달함수가 Hurwitz 안정이고 주파수응답 진폭함수 $|G(jw)|$가 단조감소이며 $|G(j0)| = 1$이기 위해서는 다음의 두 조건을 만족해야한다.

(1) $\alpha_1 > 2$

(2) $\alpha_k = \dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \cdot \alpha_1,\ k = 2, 3, \cdots, n-1.$

아래 표2.1에 오버슈트를 갖지 않는 α_1의 수치적 근사값을 차수에 따라 제시하였다.

표 2.1 오버슈트를 갖지 않는 근사적인 α_1의 값

차수	3	4	5	6	7	8	9	10
α_1	2.9	2.71	2.59	2.51	2.45	2.40	2.37	2.34

시간영역에서 과도응답 요구조건을 만족하는 전달함수를 찾는 문제의 절차는 다음과 같다. (1) 시스템의 차수가 결정되면 오버슈트를 갖지 않도록 α_1를 결정한 뒤 나머지α_i들은 정리 2.7에 의해 구한다. (2) 시스템의 응답속도는 앞의 일반화 시정수 결과(정리 2.6)를 이용한다.

III. 가 설

1. 시스템이 단조 스텝응답을 갖는 조건에 대한 가설

Darbha[7]의 비부 임펄스응답을 갖게 하는 합성조건은 주어진 한쌍의 복소영점(또는 음의 실수 영점)에 대해 음의 실수축에 놓이게 되는 극의 위치와 차수의 부등식으로 표현된다. 그러나 모든 극이 동일 위치에 놓여야 하기 때문에 실제 제어기 설계문제에 적용시 불확실성에 근거한 근감도가 커지는 단점이 있다. 또한 복소영점의 허수 w_1이 $0 < w_1 < 1$인 구간에 놓이면서 $\sigma_1 > 1$의 구간을 갖게 되면, 상당히 큰 고차 제어기의 설계가 불가피하게 되는 문제가 생긴다.

따라서 본 논문에서는 Darbha 조건보다 훨씬 다양한 APS의 합성을 가능하게 하고, 임의의 차수와 근위치를 갖게 할 수 있는 가설을 다음에 제시한다. 이 가설은 Kim등이 [5]에서 제시한 특성비를 변화하지 않은 APS에 대해 일반화 시정수가 다르게 하더라도 감쇠비는 변화하지 않으면서 응답속도를 변화시킬 수 있다는 사실을 통해 얻고자 한다.

임의 차수의 비부 임펄스응답을 갖는 APS 전달함수 $H_a(s)$를 다음에 정의한다.

$$H_a(s) := \frac{a_0}{d(s)},\ d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$H_a(s)$를 일반화 시정수 τ를 이용하여 변환한 새로운 APS 전달함수 $H_a^\tau(s)$를 다음과 같이 정의한다.

$$H_a^\tau(s,\tau) := \frac{a_0}{d^\tau(s)} = H_a(\tau s)$$

여기서, $d^\tau(s) = (\tau s)^n + a_{n-1}(\tau s)^{n-1} + \cdots + a_1\tau s + a_0$이다.

가설 : 영점 $N(s) = \prod_{k=1}^{r}[(s+\sigma_k)^2 + w_k^2] \cdot \prod_{i=1}^{q}(s+\rho_i)$이 원점근처에 존재하지 않으며 양의 실근을 갖지 않을 때, 이 영점에 대해서 $G_a(s) = N(s) \cdot H_a^\tau(s,\tau)$가 비부 임펄스응답을 갖게 하는 τ가 존재한다. 여기서 영점의 차수는 $m = q + 2r$이며, $n \geq m$이다.

정리 2.4에 의하면 $H_a(s)$에 일반화 시정수 τ를 이용하면 정확하게 시간 스케일(scale)된 새로운 $H_a^\tau(s)$을 만들 수 있다. 시간 스케일 전의 $H_a(s)$가 비부 임펄스를 가지면 스케일 후의 $H_a^\tau(s)$도 비부 임펄스를 가지게 된다. 고정된 영점을 갖는 시스템 $G_a(s)$의 임펄스응답은 $H_a^\tau(s)$의 비부임펄스응답의 m차 도함수의 선형 결합이다. τ를 통해 $H_a^\tau(s)$의 스텝응답의 속도를 느리게 주는 경우 $H_a^\tau(s)$의 임펄스응답의 시축도 늘어지게 된다. 따라서 고차의 도함수의 영향이 적어지며, 결국 $H_a^\tau(s)$의 임펄스 응답이 가장 큰 영향을 가지므로 영점을 포함한 시스템은 비부 임펄스응답을 가질 것이라 예측된다. 이러한 논리로 가설을 제시하였으며, 다음 절에서는 이 가설이 참이라는 전재아래 비부 임펄스응답을 주는 $H_a^\tau(s,\tau)$를 합성하는 세 가지 방법과 설계 예를 제시할 것이다.

2. 단조 스텝응답을 주는 연속계 전달함수의 합성

알고리즘 1 : APS 전달함수가 모두 실근인 합성방법.

임의의 차수 n_R을 선택했을 때, 모든 극점이 임의의 실근인 APS 전달함수 $H_R(s)$는 다음처럼 정의한다.

$$\begin{aligned} H_R(s) &= \frac{a_0}{\prod_{i=1}^{n_R}(s+p_i)} \\ &= \frac{a_0}{s^{n_J} + a_{n_R}s^{n_R-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned} \tag{9}$$

$H_R(s)$을 일반 시정수 τ를 통해 새로운 APS 전달함수 $H_R^\tau(s,\tau)$를 다음 식(13)처럼 얻을 수 있다.

$$H_R^\tau(s,\tau) = \frac{a_0}{(\tau s)^{n_R} + a_{n_R-1}(\tau s)^{n_R-1} + \cdots + a_1\tau s + a_0} \tag{10}$$

영점 $N_1(s)$을 포함한 목표전달함수 $G_R(s)$는

$$G_R(s) = N_1(s) \cdot H_R^\tau(s,\tau) \tag{11}$$

이며, τ를 이동하여 비부 임펄스응답을 주는 $H_R^\tau(s)$를 찾는다.

알고리즘 2 : 정리 2.1을 이용한 합성방법.

임의의 차수 n_J를 선택했을 때, 정리 2.1을 만족하는 n_1개의 실근과 $2n_2$개의 복소근으로 구성된 APS 전달함수 $H_J(s)$을 다음처럼 정의한다.

$$\begin{aligned} H_J(s) &= \frac{b_0}{\prod_{i=1}^{n_1}(s+p_i) \cdot \prod_{j=1}^{n2}[(s+\sigma_j)^2 + w_j^2]} \\ &= \frac{b_0}{s^{n_J} + b_{n_J-1}s^{n_J-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 $n_J = n_1 + 2n_2$이며, 극점은 정리 2.1을 이용한다.

나머지는 알고리즘 1과 동일한 방법으로 $G_J(s)$가 비부 임펄스응답을 주는 $H_J^\tau(s,\tau)$를 찾는다.

알고리즘 3 : 계수비를 통한 합성방법.

임의의 차수 n_K를 선택했을 때, 오버슈트를 주지 않는 α_1, 임의로 결정한 τ, 그리고 정리 2.7과 식(4)와 (5)를 통해 얻은 계수를 갖는 APS 전달함수 $H_k(s)$을 다음처럼 정의한다.

$$H_k(s) = \frac{c_0}{s^{n_K} + c_{n_K-1}s^{n_K-1} + \cdots + c_1 s + c_0} \tag{13}$$

나머지는 알고리즘 1과 동일한 방법으로 $G_K(s)$가 비부 임펄스응답을 주는 $H_K^\tau(s,\tau)$를 찾는다.

예제 : Darbha의 결과와 제시한 알고리즘의 비교

영점이 $N_1(s) = (s-2)^2 + 1.5^2$에 주어지는 경우를 고려해보자. 주어진 영점에 대해서 Darbha가 제시한 합성조건에 따르면, 전체 목표시스템이 비부 임펄스응답을 갖기 위해서는 $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)^6}$이 되어야 한다.

본 논문에서 제시한 가설아래 세 가지의 알고리즘에 대해서 설계하면 다음과 같다. 여기서 Darbha가 제시

한 합성조건보다 낮은 차수에서 비부 임펄스응답을 얻을 수 있음 보이기 위해 세 가지 알고리즘의 차수는 5차로 정한다. 각각의 알고리즘의 오버슈트가 없는 APS, $H_R(s)$, $H_J(s)$, 그리고 $H_K(s)$는 다음처럼 임의로 설정한다.

$$H_R(s)=\frac{1600}{(s+1)(s+4)(s+5)(s+8)(s+10)}$$

$$H_J(s)=\frac{9640}{(s+1)(s+5)(s+8)[(s+4)^2+15^2]}$$

$$H_K(s)=\frac{4707.5}{s^5+29.5s^4+334.9s^3+1817.5S^2+4707.5s+4707.5}$$

여기서, $H_K(s)$를 구하기 위해서 $\alpha_1=2.59$로 $\tau=1$로 선택하였다.

주어진 $H_R(s)$, $H_J(s)$, 그리고 $H_K(s)$을 일반화 시정수 τ에 대해 다음처럼 새로운 APS을 정의하고,

$$H_R^{\tau}(s,\tau)=\frac{1600}{(\tau s+1)(\tau s+4)(\tau s+5)(\tau s+8)(\tau s+10)}$$

$$H_J^{\tau}(s,\tau)=\frac{9640}{(\tau s+1)(\tau s+5)(\tau s+8)[(\tau s+4)^2+15^2]}$$

$$H_K^{\tau}(s,\tau)=\frac{4707.5}{(\tau s)^5+29.5(\tau s)^4+334.9(\tau s)^3+1817.5(\tau s)^2+4707.5\tau s+4707.5}$$

τ를 이동하면, $G_R(s)$, $G_J(s)$, 그리고 $G_K(s)$가 비부 임펄스응답을 가질 때의 APS은 다음처럼 얻어진다.

$$H_R^{\tau}(s,8.83)=\frac{1600}{53678.9s^5+170216.2s^4+198966.5s^3+104634.3s^2+23664.4s+1600}$$

$$H_J^{\tau}(s,11.16)=\frac{9640}{173109.5s^5+341255.3s^4+564311.1s^3+478006s^2+146117.9s+9640}$$

$$H_K^{\tau}(s,9.6)=\frac{4707.5}{81537.3s^5+250149.3s^4+296307.5s^3+167505.3s^2+45191.5s+4707.5}$$

그림 1은 본 논문에서 제시한 세 가지 알고리즘을 이용한 합성방법과 Darbha가 제시한 합성방법의 극점과 영점의 위치, 그리고 영점을 포함한 임펄스응답와 스텝응답의 시뮬레이션 결과이다.

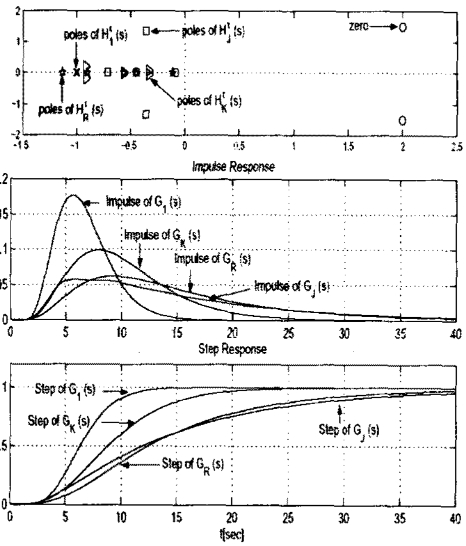

그림 1. 예제의 극점과 영점의 위치, 임펄스응답, 스텝응답 결과

V. 결 론

본 논문에서는 원점근처와 양의 실수에 영점이 존재하지 않는 시스템이 비부 임펄스응답을 갖기 위한 조건에 대한 가설과 이를 가능하게 하는 목표전달함수를 구하는 알고리즘에 대해서 제시를 하였다.

이 가설아래 임의의 차수와 비부 임펄스응답을 주는 APS를 이용하여 일반화시정수를 조정함으로써 쉽게 영점이 포함된 시스템이 비부 임펄스응답을 갖게 하는 목표시스템을 구할 수 있었다. 또한 Darbha의 결과보다 다양한 근 형태와 APS의 합성을 가능하며, 더 작은 차수로 설계가 가능함을 예를 통해서 알 수 있었다.

이 가설은 해석적으로 입증은 하지 못 하였으나 성립하지 않는 반증도 찾기 어려워서 본 논문에서는 가설로 제안하였다.

참 고 문 헌

[1] D.V. Widder, "The inversion of the laplace integral and the related moment problem," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, pp.107-200, 1934.

[2] S. Jayasuriya, J.W. Song, "On the synthesis of compensators for nonovershooting step response," *Trans. ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr.*, vol. 118, pp.757-763, 1996.

[3] S.K. Lin, C.J. Fang, "Nonovershooting and monotone nondecreasing step response of a third-order SISO linear system," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 9, pp.1299-1303, 1997.

[4] X. Jiang, D. Gu, Z. Huang, and T. Chen, "On monotone nondecreasing step responses of third-order SISO linear systems with a pair of complex poles," *Proc. American Contr. Conf.*, Arlington, VA, pp.547-551, 2001.

[5] Y.C. Kim, L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya, "Transient response control via characteristic ratio assignment," *Technical Report*, no. ISE-01-09-1, Center of Excellence in Information Systems, Tennessee State University, Sep., 2001.

[6] Y.C. Kim, L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya, "Transient response control via characteristic ratio assignment," To be published in *IEEE Trans. Automat. Contr.*, January, 2004.

[7] S. Darbha, "On the synthesis of controllers for continuous time LTI systems that achieve a non-negative impulse response," *Automatica*, vol. 39, no. 1, pp.159-165, 2003.