

입력제약을 고려한 독립진자의 비선형 제어

Nonlinear Control of an Input-Constrained Inverted Pendulum

정재훈*
(Jae Hoon Jung)

* 고려대학교 전기공학과(전화:(02)3290-3687, 팩스:(02)928-8909, E-mail : infamy@cello.korea.ac.kr)

Abstract : The aim of this paper is to propose a nonlinear controller for a single cart-type inverted pendulum using energy-based control scheme. Using a nonlinear model relating the angular position and velocity to the control input and a nonlinear controller is designed to regulate the angular position and velocity in the presence of input constraints. It is proved that the angular position and velocity converge to zero.

Keywords : nonlinear, input constraints, Inverted Pendulum

1. 서 론

일반적으로 독립진자는 이론의 실용성을 검증하기 위하여 간단한 계통의 제어 합성 문제 (Control synthesis problem)를 보이는데 자주 사용된다. 독립진자는 안정한 평형 점 과 불안정한 평형 점을 동시에 가지고 있어 입력을 가하지 않으면 항상 안정한 평형 점으로 향한다. 이러한 독립진자의 위치 제어에 있어서 많은 경우 진자가 불안정한 평형 점 을 동시에 가지고 있어 입력을 가하지 않으면 항상 안정한 평형 점으로 향한다. 이러한 독립진자의 위치 제어에 있어서 많은 경우 진자가 불안정한 평형 점 근처에 있을 때 선형 모델로의 근사 화를 통하여 제어기를 설계하였으나[1] 이론적으로 잘 설명할 수 없을 뿐만 아니라 실제의 경우 진자가 평형 점 근처를 벗어나 비선형 제어를 [2] 하거나 수평면 아래에 위치하고 있을 때 불안정한 평형 점으로 수렴하도록 만드는 스위칭 제어를[3][4] 그 제어 목적으로 하는 경우에는 부적절하여 정상적으로 동작하지 않는다.

또한 독립 진자 계통의 제어 문제를 비 선형 대표적인 기법인 선형화 기법(linearization method)의 적용을 고려할 때, 계통의 상대 차수(relative degree)가 상수가 아니므로 입력력 선형화(input-output linearization)가 불가능하다[5]. 독립 진자의 비 선형 모델을 기반으로 하는 경우, 일반적으로 기계 계통에 나타나게 되는 계통의 부동태 성질(passivity)을 이용하여 계통의 에너지를 리아프노브 함수 선형에 이용하는 에너지 기반 제어 기법(energy-based control scheme)이 있다. [3]의 경우 전체 계통의 에너지를 0으로 수렴토록 하고 진자가 불안정한 평형 점 근처로 이동하면 균형 제어(balancing control)를 위하여 선형 제어기로 스위칭 하였다.

본 논문에서는 독립진자의 모델 식을 진자만의 모델

식으로 변형하여 변형된 식을 제어도록 하는 비선형 제어기를 제안하였다. 또한 제한된 입력아래에서도 대처 할 수 있는 제어기를 설계하였다.

II. 독립진자의 구조와 모델링

2.1 단일 독립진자 계통의 수학적 모델링

독립진자의 수학적 모델을 유도하기 위해 다음의 가정을 도입한다.

가정1.

1. 진자의 질량은 막대 끝에 집중 되어 있다.
2. 막대는 질량이 없는 강체로 가정한다.
3. 무게 중심에 대한 진자의 관성 모멘트는 0으로 가정한다.
4. 진자는 x, y 방향의 평면상에서만 움직이는 2차원 문제로 고려한다.

일반적으로 기계 계통은 그 비선형적 동특성에 의해 계통을 이루는 상태들 간에 복잡한 상호 작용(interconnection)이 일어나므로 계통의 운동 및 위치 에너지를 이용하여 오일러-라그랑지 운동 방정식(Euler-Lagrange's equations of motion)을 이용하여 그 수학적 모델을 얻는다.

본 논문에서 제어하는 대상인 단일 독립진자 계통은 매니플레이터 계통에서 구동기(actuator)의 수가 계통의 자유도(degree of freedom)보다 작은 구동 부족 계통(underactuated system)에 속한다. 이러한 구동 부족 계통의 오일러-라그랑지 운동 방정식은 다음과 같은 형태로 이루어진다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (1)$$

여기서,

L : 계통의 라그랑지안

K : 계통의 운동에너지

P : 계통의 위치에너지

$$L = K - P$$

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n]^T$$

q_i : 일반화된 좌표 변수

$$Q = [Q_1 \ 0]^T \quad Q_1 = [u_1 \ \dots \ u_m]^T$$

이다. 단일 도립진자의 수학적 모델은 이와 같이 정의된 오일러-라그랑지 운동 방정식을 이용하여 그 운동 방정식을 구하여 얻는다.

2.2 단일 도립진자의 모델링

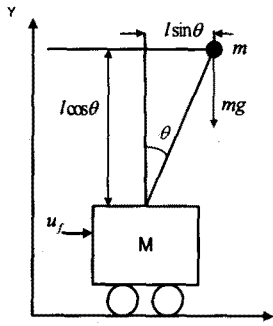


그림 1. 도립진자의 형태와 운동 방식

단일 도립진자에서 식(1)로 표시되는 오일러-라그랑지 운동 방정식의 일반화된 좌표 변수 q 는 $q = [x \ \theta]^T$ 와 같이 정의된다. 여기서 x 는 수레의 이동변위, θ 는 진자의 회전각을 의미한다. 진자와 수레의 무게, 진자 회전 중심에서 진자의 무게 중심까지의 거리는 그림 1.에 표시된 바와 같다.

또, 계통이 2 자유도를 가지고 계통의 구동기는 하나이므로 제어 입력을 u_f 라 할 때 $Q = [u_f \ 0]^T$ 이다. 이러한 계통의 에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

먼저 운동 에너지의 경우 수레에 의한 운동 에너지와 진자에 의한 회전 운동 에너지의 합으로 구하며 각각의 운동 에너지는

$$K_{cart} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (2)$$

$$K_{pendulum} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3)$$

와 같이 정의된다. 여기서 진자의 속도 v 는

$$v^2 = \left(\frac{d}{dt} (x + l \sin \theta) \right)^2 + \left(-\frac{d}{dt} (l \cos \theta) \right)^2 \\ = (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta})^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2$$

와 같이 정의 된다. 따라서 계통의 운동 에너지는 식 (2)와 (3)의 합으로

$$K = K_{cart} + K_{pendulum}$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

와 같이 표현된다. 다음으로 계통의 위치 에너지를 구하면 수레의 위치 에너지는 수레가 수평면상에서만 움직이므로 변화가 없다. 따라서 계통의 운동 방정식을 표현하는데 영향이 없으므로 진자의 위치 에너지만을 고려하여

$$P = mgl(\cos \theta - 1) \quad (5)$$

과 같이 표현된다. 식 (5)와 같이 표현한 위치 에너지는 진자가 안정한 평형 점 즉, $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) = (0, 0, \pi, 0)$ 인 경우의 위치 에너지를 $P = -2mgl$, 불안정한 평형 점 $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) = (0, 0, 0, 0)$ 인 경우의 위치 에너지를 $P = 0$ 로 정한 결과이다.

위에서 얻은 바와 같이 식 (4)와 (5)로 표현되는 단일 도립진자 계통의 에너지를 식 (1)에 대입하면

$$(M + m) \ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = u_f \quad (6)$$

$$ml \cos \theta \ddot{x} + m l^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \quad (7)$$

와 같이 계통의 모델을 얻을 수 있다.

2.3 도립진자 모델의 변형

식 (6)과 (7)에서 모든 상수 즉, M, m, l, g 를 일반성을 잃지 않고 1로 정한다.

이렇게 정리한 식은

$$2\ddot{x} + \cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2 = u_f \quad (8)$$

$$\cos \theta \ddot{x} + \ddot{\theta} - \sin \theta = 0 \quad (9)$$

이고 두 식에 (8)×cosθ-(9)×2 하면 식 (8)와 (9)를

$$(1 + \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 - 2 \sin \theta = -\cos \theta u_f \quad (10)$$

$$\cos \theta \ddot{x} = -\ddot{\theta} + \sin \theta \quad (11)$$

과 같이 간략화 된 모델로 표현 될 수 있다. 본 논문에서는 (10)만을 제어 대상으로 한다.

III. 진자의 각과 각속도를 제어하는 제어기 설계

3.1 입력 제약이 없는 경우의 제어기 설계

도립진자의 모델을 변형하여 진자에 관한 식으로 변형하였다. 이 식을 이용하여 진자를 제어하는 새로운 비선형 제어기를 설계한다.

진자에 관한 변형 식 (10)에서 $\cos \theta u_f = U$ 라 치환하고 식 (10)을 다시 표현하면,

$$(1 + \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 - 2 \sin \theta = -U \quad (12)$$

으로 표현할 수 있다.

리아프노프 후보 함수를 V 라고 하고 V 를 다음과 같이 정의하자.

$$V = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta^2$$

V 을 시간의 함수로 미분하면,

$$V = (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + k_1 \theta \quad (13)$$

과 같이 표현 할 수 있다.

(12)식은 (13)식을 이용하면

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\theta} \{ (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 - 2 \sin \theta + 2 \sin \theta + k_1 \theta \} \\ &= -\dot{\theta} (U - 2 \sin \theta - k_1 \theta) \end{aligned} \quad (14)$$

과 같이 표현 할 수 있다. 여기서 $V < 0$ 가 항상 성립하도록 하기 위해서 $U = k_1 \theta + k_2 \theta + 2 \sin \theta$ 가 된다

$\cos \theta u_f = U$ 의 관계가 있으므로 실제 입력 u_f 는

$$u_f = \frac{2 \sin \theta + k_1 \theta + k_2 \theta}{\cos \theta} \text{가 된다.}$$

정리 1.

식(10)에 다음과 같은 제어입력 u_f 를 고려하면 진자의 각과 각 속도를 0으로 가도록 제어할 수 있다.

$$u_f = \frac{2 \sin \theta + k_1 \theta + k_2 \theta}{\cos \theta} \quad (\text{제어기 1.})$$

입력에 $\cos \theta$ 항이 있기 때문에 구간이 아래와 같이 제한 되어 진다.

구간: $-\pi/2 + \epsilon < \theta < \pi/2 - \epsilon$ 단, $k_1, k_2, \epsilon > 0$

증명 1) 리야프노브 함수를 V_1 이라 하자.

$$V_1 = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta} + (\cos \theta \sin \theta) \dot{\theta}^2 + k_1 \theta \\ &= \dot{\theta} ((1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + k_1 \theta) < 0 \end{aligned}$$

(14) 식과 제어기 u_f 의해서 $V = -k_2 \dot{\theta}^2 \leq 0$ 임을 보일 수 있다.

$\dot{\theta} = 0$ 임을 항상 유지하기 위해서 $\dot{\theta} = 0$ 이어야 한다.

(10)식에 $\dot{\theta} = 0$ 을 대입하면, $-k_1 \theta = 0$ (즉, $\theta = 0$) 임을 알 수 있다. 그러므로 invariant principle 에 의해서 $V_1 < 0, \forall \theta, \dot{\theta}, (\theta = \dot{\theta} = 0)$ 임을 보일 수 있다. \blacktriangledown

3.2 입력 제약을 고려한 제어기 설계

다음과 같은 가정을 한다.

가정 2.

$$|u_{\max}| > | -2 \tan \theta^* |$$

$$(-\pi/2 + \epsilon = -\theta^* \leq \theta \leq \theta^* = \pi/2 - \epsilon)$$

u_{\max} : 인가 할 수 있는 입력의 최대 값.

특성 1. saturation function. $\langle \text{sat}(\cdot) \rangle$

$$\cdot \text{ if } x > 1, \quad x = 1$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ if } -1 < x < 1, \quad x = x \\ \cdot \text{ if } -x < -1, \quad x = -1 \end{aligned}$$

식 (10)에서 $\cos \theta u_f = U$ 라 치환하고 모델을 다시 표현하면,

$$(1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 - 2 \sin \theta = -U \quad (15)$$

으로 표현할 수 있다.

리야프노브 후보함수를 V' 라고 하면

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + k_3 \int_0^\theta \text{sat}(\theta) d\theta > 0 \\ &= -\dot{\theta} (U - 2 \sin \theta - k_3 \text{sat}(\theta)) \end{aligned} \quad (16)$$

$V' < 0$ 되도록 하기 위해서 $U = k_3 \text{sat}(\theta) + k_4 \text{sat}(\dot{\theta}) + 2 \sin \theta$ 가 된다. $\cos \theta u_f = U$ 의 관계가 있으므로 실제 입력은

$$u_f = \frac{k_3 \text{sat}(\theta) + 2 \sin \theta + k_4 \text{sat}(\dot{\theta})}{\cos \theta} \text{가 된다.}$$

정리 2.

가정 2. 가 존재하고, 식(10)에 다음과 같은 제어입력 u_f 를 고려하면 제약이 있는 입력 아래에서도 진자의 각과 각 속도를 0으로 가도록 제어할 수 있다.

$$u_f = \frac{2 \sin \theta + k_3 \text{sat}(\theta) + k_4 \text{sat}(\dot{\theta})}{\cos \theta} \quad (\text{제어기 2.})$$

입력에 $\cos \theta$ 항이 있기 때문에 구간이 다음과 같이 제한되어 진다. 구간: $-\pi/2 + \epsilon < \theta < \pi/2 - \epsilon$

또한 설계 파라미터 k_3, k_4 는 조건 ($u_{\max} \geq u_f$)을 만족 시키도록 충분히 작은 값으로 설계하여야 한다. 단, $k_3, k_4, \epsilon > 0$

증명 2) 리야프노브 후보함수 V_2 라 하자.

$$V_2 = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + k_3 \int_0^\theta \text{sat}(\theta) d\theta > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= (1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta} + (\cos \theta \sin \theta) \dot{\theta}^2 + k_3 \text{sat}(\theta) \dot{\theta} \\ &= \dot{\theta} ((1 + \sin^2 \theta) \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + k_3 \text{sat}(\theta)) \end{aligned}$$

(16)과 u_f 식에 의해서 $\dot{V}_2 = -k_4 \text{sat}(\dot{\theta}) \dot{\theta} < 0$ 임을 보일 수 있다. 앞 절에서 보인 invariant principle 에 의해서 위의 안정도 증명을 완성 할 수 있다. \blacktriangledown

알 수 있는 값 u_{\max} 로부터 θ^* 를 얻을 수 있고 θ^* 값으로부터 $\cos \theta^*, \tan \theta^*$ 값을 얻을 수 있다. $\theta, \dot{\theta}$ 의 최대 값이 1 이므로 조건을 만족 하는 k_3, k_4 를 구할 수 있다.

IV 모의실험

각 파라미터들의 값들은 다음과 같다.

무게(M) = 1.0309, 진자의 무게(m) = 0.6191, 진자의

길이(l) = 0.2425, 중력가속도(g) = 9.8이고 설계 파라미터는 $k_1=10, k_2=10, k_3=0.3, k_4=0.4$ 이다.

또한, $u_{max}=3, \theta^*=\pi/4$ 라 가정하고 본 모의 실험을 수행하였다.

본 질에서 제어기1. 은 입력 제약이 없는 제어기이고 제어기2. 는 입력 제약을 고려한 제어기이다.

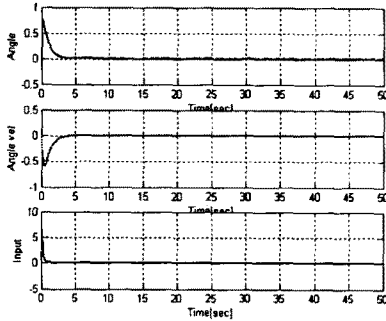


그림 2. 초기값 $(\theta, \dot{\theta} = \pi/4, 0)$ 제어기 1.

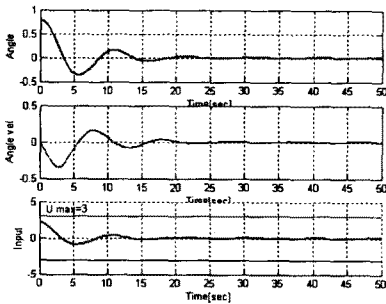


그림 3. 초기값 $(\theta, \dot{\theta} = \pi/4, 0)$ 제어기 2.

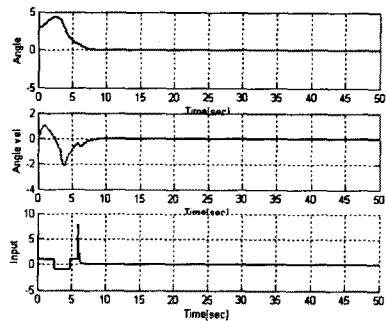


그림 4 초기값 $(\theta, \dot{\theta} = \pi/1.1, 0)$ 제어기 1.

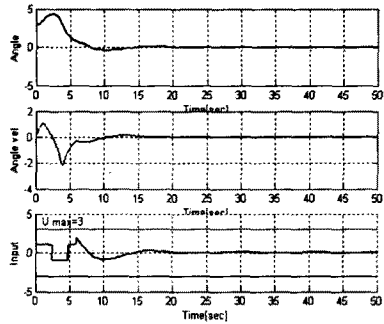


그림 5. 초기값 $(\theta, \dot{\theta} = \pi/1.1, 0)$ 제어기 2.

초기 값이 수평면 아래에 있을 경우 진자가 제어 공간에 들어오도록 하기 위해서 u_{max} 보다 작은 입력 값을 가속도의 방향에 따라 적절히 가하였다.

$$(u_f = u \text{sign}(\cos \theta \cdot \dot{\theta})) \text{ 단, } u \leq u_{max}$$

IV 결론

본 논문은 도립진자의 각과 각속도의 제어하는 간단한 형태의 비선형 제어를 구현하였다. 하지만 실제 도립진자의 경우 입력의 크기에 제한이 되어 있다. 본 논문에서는 제한된 입력 아래에서도 진자의 각과 각속도를 제어할 수 있는 제어를 설계 하였는데 그 의의가 있다고 할 수 있다.

참고 문헌

- [1] Zongli Lin, Ali Saberi & Michael Gutmann, Yacov Shamash,(1995) "Linear Controller for an Inverted Pendulum Having Restricted Travel -A High-and-Low Gain Approach." *IEEE Proceedings of the American Control Conference* .
- [2] Tay Sam Leng, Nah Swee Leng(1993) "Control of an inverted pendulum using a neuro-fuzzy controller." *IEEE Motion Control Proceedings, 1993 Asia-Pacific Workshop on Advances in, 15-16 July page:212-217*
- [3] Lozano, R., Fantoni, I. & Block, D. J.(2000). "Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic " orbit. *System & Control Letters, Vol.40, Issue 3, pp. 197-204*
- [4] 김상철 (2002), " 단일 도립진자 계통의 에너지 기반 슬라이딩 모드 제어. " *고려대학교 전기전자공학 석사학위논문*
- [5] Marino, R & Tomei, P. (1995), Nonlinear control design-geometric.
- [6] Hassan K. Khalil (1996) Nonlinear Systems [second edition]
- [7] <http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum>