

자동조종장치 지연을 고려한 미사일의 이동구간 유도법칙

A receding horizon guidance law considering autopilot lag

한 창 운*
(Chang Woon Han)

* 고려대학교 전기공학부(전화:(02)3290-3695, 팩스:(02)928-8909, E-mail : kusaint@cello.korea.ac.kr)

Abstract : In recent years, a receding horizon guidance law based on receding horizon control and optimal control is proposed. A receding horizon guidance law considering autopilot lag and constraints is proposed. The performance of receding horizon guidance law in the presence of target maneuvers is confirmed by simulation results. Through many simulation, a suitable selection of weighting matrix can minimize effect of disturbance, target acceleration, which is meaning of this paper.

Keywords : RHC, constrained, guidance

I. 서 론

일반적인 유도 시스템의 유도 목표는 이용 가능한 정보를 이용하여 오차거리(miss distance)를 영으로 하도록 유도무기를 적절한 방향으로 날아가게 하는 유도 명령을 산출하는 것이다. 기동성이 우수한 목표물이 계속 등장함에 따라 향상된 유도법칙들이 지속적으로 개발되고 있다. 유도시스템 설계에 적용되는 대표적인 기법은 시선지령식(command to line-of-sight), 비례항법(proportional navigation)과 최적유도법칙(optimal guidance law) 등이 있다. 유도무기에 대한 기존의 유도법칙들에서의 문제점을 개선하기 위하여 이동구간 제어기법(receding horizon control)을 사용하여 유도무기의 유도법칙을 설계하는 기법을 소개한다. 이동구간 유도법칙은 기존의 최적유도법칙이 가지는 장점들인 여러 변수들에 대한 모델링 능력은 그대로 가지게 된다. 그러나 이동구간 유도법칙은 충돌시점에 대한 정보를 전혀 사용하지 않기 때문에 잔여충돌시간(time-to-go)에 대한 추정이 불필요하다는 큰 장점을 갖는다. 그러나 여전히 최적제어이론에 기초를 두고 있다[3]. 본 논문에서는 미사일이 가속도 제한을 갖는 경우에 대해 비용함수에 종말가중치 행렬을 갖는 이동구간 제어기법을 이용 최적화 문제를 설정하고, 이를 SDP(semi-definite programing)로 풀기 위해 불변가능타원체(invariant ellipsoid), 선형행렬부등식(LMI)을 이용 유도법칙을 유도하고, 시뮬레이션을 통해 가중치 행렬의 영향, 오차거리에 대한 다양한 예제를 풀었다.

II. 이동구간 유도법칙

1. 이동구간 제어

입력 제한과 상태 제한을 갖는 시불변 이산시간 선형 시스템에 대해 살펴보자

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (1)$$

subject to

$$\begin{aligned} -u_{\lim} &\leq u_k \leq u_{\lim}, \quad k = 0, 1, \dots, \infty \\ -g_{\lim} &\leq Gx_k \leq g_{\lim}, \quad k = 0, 1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $x_k \in R^n$ 은 상태변수, $u_k \in R^m$ 은 제어입력, 그리고 $u_{\lim} \in R^m, G \in R^{n \times n}, g \in R^n$ 이다. 출력 제한 $-y_{\lim} \leq y_k \leq y_{\lim}$ 은 일반적으로 출력 수식이 $y_k = Cx_k$ 로서 표현되기 때문에 식 (2)의 상태 제한으로 표현 할 수 있다. 식 (2)에 주어진 제한조건을 고려하여 최적화 문제를 설정하자. 시간 k 에서 최소화해야 할 비용함수는 아래와 같다.

$$J(x_k, k) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{k+i}^T Q x_{k+i} + u_{k+i}^T R u_{k+i}) + x_{k+M}^T \Psi x_{k+M} \quad (3)$$

여기서, 종말가중치 행렬을 포함한 항은

$$x_{k+M}^T \Psi x_{k+M} = \sum_{i=N}^{\infty} (x_{k+i}^T Q x_{k+i} + u_{k+i}^T R u_{k+i})$$

이다. 따라서 최적화 문제는 아래와 같이

$$\min J(x_k, k) \quad (4)$$

subject to

$$\Psi \geq F^T \Psi F + Q + H^T R H, \quad F = A + B H$$

$$\begin{aligned} -u_{\lim} &\leq u_{k+i|k} \leq u_{\lim}, \quad i=0,1,\dots,\infty \\ -g_{\lim} &\leq Gx_{k+i|k} \leq g_{\lim}, \quad i=0,1,\dots,\infty \end{aligned} \quad (5)$$

로 표현되고, 말단 가중치 행렬 Ψ 가 위의 부등식을 만족한다면 최적화 문제(4)를 최소화하여 얻어지는 이동구간 제어 입력을 갖는 시스템 (1)의 페루프 안정도가 보장된다[2]. 최적화 문제를 풀기 위해서는 무한 개수의 제한조건 때문에 무한 차수의 비선형 프로그래밍 알고리즘이 필요하게 된다. 이런 어려움은 아래의 말단 가중치 행렬의 성질을 이용하면 피할 수 있다. 이제, 불변가능 타원체 (invariant-feasible ellipsoid) 성질을 소개한다. 원점을 중심으로 갖는 타원체를 다음과 같이 정의한다.

$$\varepsilon_{\Psi} = \{ \xi \in R^n | \xi^T \Psi \xi \leq \gamma \} \quad (6)$$

다음과 같은 행렬 $H \in R^{m \times n}$ 과 양정치 행렬 $\Psi \in R^{n \times n}$ 이 존재하고, 아래의 부등식을 만족하고,

$$(A+BH)^T \Psi (A+BH) - \Psi \leq 0 \quad (7)$$

모든 초기 상태가 $x_0 \in \varepsilon_{\Psi}$ 를 만족하면, 상태 궤환 제어 입력 $u_k = Hx_k$ 을 갖는 상태 궤적 $x_k (\forall k > 0)$ 는 타원체 ε_{Ψ} 에 머물러 있게 된다. 위 성질을 만족하는 성능지수를 위한 유한 말단 가중치 행렬을 쉽게 보일 수 있다. 이 사실을 이용하여 아래의 보조정리를 보인다.

보조정리1) $\Psi > 0$ 인 행렬 Ψ 가 존재하고, 식 (7)와 아래의 선형 행렬 부등식 (LMI) 를 만족한다면,

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{ii} \leq u_{j,\lim}^2, \quad j=1,2,\dots,m \quad (8)$$

$$GXG^T \leq Z, \quad Z_{ii} \leq g_{j,\lim}^2, \quad j=1,2,\dots,n_g \quad (9)$$

여기서, $X = \gamma_2 Q^{-1}$, $Y = HX$ 이고, $g_{j,\lim}$, $u_{j,\lim}$ 은 각각 g_{\lim} , u_{\lim} 의 j 번째 성분이다. 따라서, 상태 궤환 제어입력 $u_k = Hx_k$ 는 모든 초기 상태가 $x_0 \in \varepsilon_{\Psi}$ 인 시스템을 지수함수적으로 안정화시킨다. 그동안 제한조건 식(2)는 만족된다. 그리고, 그 결과 상태의 궤적 x_k 는 ε_Q 영역 안에 머무르게 된다.

Ψ 가 부등식 (7)를 만족하면, H 가 지수함수적인 안정화 궤환 이득임을 쉽게 확인할 수 있다. 제한조건식 (2) 이 만족하는 동안 상태의 궤적은 타원체에 머물러 있다. 그럼, 영역 ε_{Ψ} 안에서 제한조건이 만족되는지 살펴보기로 하자. 먼저, 시간 k 에서 u_k 의 j 번째 요소에 대한 최대값을 고려하자.

$$|u_k(j)| \leq u_{\lim}(j), \quad k \geq 0, \quad j=1,\dots,m \quad (10)$$

따라서,

$$\begin{aligned} \max_{k \geq 0} |u_k(j)|^2 &= \max_{k \geq 0} |(YX^{-1}x_k)_j|^2 \\ &\leq \|(YX^{-1/2})_j\|_2^2 \\ &= (YX^{-1}Y^T)_{jj} \end{aligned}$$

입력 제한조건 $-u_{\lim} \leq u_k \leq u_{\lim}$ 은 선형 행렬 부등

식 (8)에 의해 영역 ε_{Ψ} 안에서 보장된다. 상태 제한조건도 비슷한 과정으로 확인할 수 있다. 시간 k 에서의 x_k 의 j 번째 요소에 대한 최대값을 고려하자.

$$|Gx_k(j)| \leq g_{\lim}(j), \quad k \geq 0, \quad j=1,\dots,n \quad (11)$$

그러면, 상응하는 선형 행렬 부등식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \max_{k \geq 0} |Gx_k(j)|^2 &\leq \max_{z \in \varepsilon_{\Psi}} |(Gz)_j|^2 \\ &= (GQG^T)_{jj} \end{aligned} \quad (12)$$

상태 제한조건 역시 선형 행렬 부등식 (9)에 의해 영역 ε_{Ψ} 안에서 보장된다.

위의 결과를 이용하면, 무한한 차수의 문제를 유한 차수의 문제로 변환할 수 있다. 우리가 가정한 선형 상태 궤환 제어입력 $u_{k+i|k} = Hx_{k+i|k}$ 이 구간 $i \geq N$ 에서 채택되면, 선형 행렬 부등식 (8)과 (9)를 통합하여, 제어구간 N 의 끝에서부터 모든 제한조건은 만족된다. 비용함수를 두 부분으로 나누어 제한조건을 갖는 경우에 대한 최적화 문제를 아래와 같이 구성할 수 있다. 반한정 프로그래밍을 사용하기 위해 제한조건을 선형행렬부등식으로 변환하면[3],

$$\min_{n, z, X, Y, U, \gamma_1 + \gamma_2} \quad (13)$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 - V^T U - V_0 & (W^{1/2} U)^T \\ W^{1/2} U & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & (A^N x + \overline{B} U)^T \\ A^N x + \overline{B} U & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} X & (AX+BY)^T & (Q^{1/2} X)^T & (R^{1/2} Y)^T \\ (AX+BY) & X & 0 & 0 \\ (Q^{1/2} X) & 0 & \gamma_2 I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma_2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{ii} \leq u_{j,\lim}^2, \quad j=1,2,\dots,m \quad (17)$$

$$GXG^T \leq Z, \quad Z_{ii} \leq g_{j,\lim}^2, \quad j=1,2,\dots,n_g \quad (18)$$

$$-u_{\lim} \leq u_{k+i|k} \leq u_{\lim}, \quad i=0,1,\dots,N-1$$

$$-g_{\lim} \leq Gx_{k+i|k} \leq g_{\lim}, \quad i=0,1,\dots,N-1 \quad (19)$$

주어진 시스템에 어떤 제한조건이 존재하는 경우에 최적화 문제가 이 제한조건을 만족하는 가능해가 존재하는지가 중요한 문제가 된다. 심지어, 시간 k 에서 가능해가 존재하더라도, 시간 $k+1$ 에서 가능해가 존재하지 않을 수 있다. 따라서 다음의 보조정리를 살펴보자.

보조정리2) 초기 시간 k 에서 최적화 문제 (13)의 가능해가 존재한다고 가정하면, 최적화 문제 (13)은 시간 $k+1$ 에서 항상 가능해를 갖는다.

증명) 가정으로부터, 시간 k 에서의 가능해를 $u_{k+i|k}^*$, $0 \leq i \leq N-1$ 라면, 다음 시간 $k+1$ 에서 아래의 제어수열이 가능해가 된다.

$$\begin{aligned} u_{k+i|k+1} &= u_{k+i|k}^*, \quad i=1,2,\dots,N-1 \\ u_{k+i|k+1} &= Hx_{k+i|k+1}, \quad j=N, N+1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (20)$$

정리1) 식(5)의 부등식을 가정하면, 초기시간에서 최적화 문제 (13)가 가능해를 갖는다면, 최적화 문제 (13)에서 얻어진 이동구간 제어입력이 페루프 시스템(1)을 지수함수적으로 안정화한다.

증명) 참고문헌[2] 참조.

2. 미사일-목표물 모델

미사일이 가속도 제한조건을 갖는 경우에 대해 선형 상태공간 모델로 구성된 미사일의 포획모델을 살펴보자. 그림1은 미사일 목표물 포획모델과 횡축오차거리를 나타낸다. σ 는 사선각(Line of sight angle), r 은 미사일과 목표물의 오차거리 (miss distance), y 는 횡축 오차거리(lateral miss distance), A_t 목표물의 가속도(A_{tn} normal 방향성분), V_t 목표물의 속도, A_m 미사일의 가속도(A_{mn} normal 방향성분), V_m 미사일의 속도, γ_m, γ_t 는 비행방향각이다. 미사일-목표물 모델은 아래의 비선형 식으로 표현할 수 있다[3].

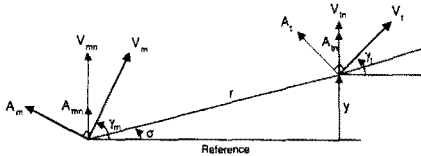


그림 1. 미사일 목표물 모델, 횡축 오차 거리.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_m(\rho \cos(\theta_t) - \cos(\theta_m)) \\ r\dot{\sigma} &= V_m(\rho \sin(\theta_t) - \sin(\theta_m)) \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, θ_t, θ_m, ρ 는 다음과 같다.

$$\theta_t = \gamma_t - \sigma, \quad \theta_m = \gamma_m - \sigma, \quad \rho = V_t/V_m$$

선형 추적 운동식을 얻기 위해 그림1 에서와 같이 목표물과 추적자의 횡축 오차거리, 즉 목표물과 기준축과의 거리를 횡축오차거리 (lateral miss distance) 라고 정의한다. 그림에서 y 가 이를 의미한다. 그러면 y 의 미분치는

$$\dot{y} = V_{tn} - V_{mn} = V_t \sin \gamma_t - V_m \sin \gamma_m \quad (22)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서 V_{tn} 과 V_{mn} 은 각각 목표물과 미사일의 법선속도 (normal velocity) 성분이다. 선형 운동식의 유도를 위해 비선형으로 표현된 식을

$$\sigma \approx 0, \quad \Delta \gamma_m \approx 0, \quad \Delta \gamma_t \approx 0. \quad (23)$$

속도 V_m, V_t 가 상수라는 가정에서, 식 (22) 의 미분은

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_{tn} - A_{mn} \\ &\approx V_t \dot{\gamma}_t \cos \gamma_{t0} - V_m \dot{\gamma}_m \cos \gamma_{m0} \end{aligned} \quad (24)$$

가 된다. 여기서, A_{tn} 과 A_{mn} 은 각각 목표물과 미사일의 법선 가속도 (normal acceleration) 성분이다.

$A_{tn} = V_t \dot{\gamma}_t$ 그리고 $A_{mn} = V_m \dot{\gamma}_m$ 이므로, 식 (24) 은

$$\dot{y} \approx A_t \cos \gamma_{t0} - A_m \cos \gamma_{m0} \quad (25)$$

로 다시 나타내어진다. 식 (24) 에 의해 자동조종장치가 1차 지연을 갖는 미사일과 목표물 사이의 모델을 상태변수 형태로 표현하면 아래와 같다.

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + GA_m(t),$$

$$A_{mn} = -\left(\frac{1}{\tau}\right)A_{mn} + \left(\frac{1}{\tau}\right)u \quad (26)$$

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ A_{mn} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\tau \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

으로 표현되고, 이를 이산시간모델로 표현하고 앞 절에서 다룬 선형 행렬 부등식을 이용 최적화 문제를 풀 수 있다.

III. 시뮬레이션

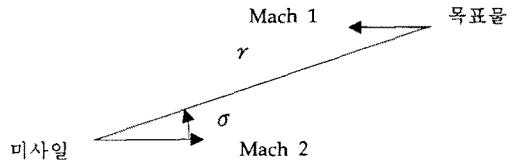


그림 2. 시뮬레이션 포획 모델

자동조종장치의 동특성, 시간지연을 1차 지연으로 고려한 미사일에 대해, 상태제한을 갖는 경우에 대해 시뮬레이션을 해보자. 정확히 τ 를 안다고 하고 가중치 행렬 Q, Ψ 를 조절해 가며 시뮬레이션을 하자. 이동구간 N 의 변화에 대해 시뮬레이션 결과를 비교해 보자. 그리고 τ 의 변화에 따른 미사일의 목표물 포획에 대한 결과를 시뮬레이션으로 보이자. 시뮬레이션을 위한 미사일과 목표물의 조건은 아래의 표와 같다.

변수	V_m	V_t	$\gamma_t(0)$	$\gamma(0)$	$\gamma_m(0)$
수치	Mach 2	Mach 1	180 deg	3050 km	-1 deg

표 1. 시뮬레이션을 위한 변수들.

$\gamma_m(0) = -1 \text{ deg}$ 이므로, 미사일은 충돌경로에 있지 않고, 따라서, $\dot{y}(0) \neq 0$ 이다. 다양한 목표물의 회피기동을 고려하기 위해, 목표물의 회피기동을 다음과 같이 가정하자. 충돌시간 t_f 에 근접한 시간내내가 되었을 때 미사일을 회피하는 방향으로 최대가속도로 기동한다. 또는 충돌시간 t_f 에 근접한 시간내내가 되었을 때 미사일을 향하여 최대가속도로 기동한다[4].

회피기동이 있는 경우, A_t 의 시간적 변화에 대해 아래와 같은 네가지 경우를 고려해보자.

$$\begin{aligned} A_{tn} &= \text{sign}(\dot{\sigma}) * (A_{tn, \max}) \quad |NR\dot{\sigma}| \geq 10 \\ \text{회피기동1. } A_{tn} &= -NR\dot{\sigma} \quad |NR\dot{\sigma}| \leq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{회피기동2. } A_m &= 10 \\ A_m &= -10 \\ \text{회피기동3. } A_m &= 0 \\ A_m &= -\text{sign}(A_{mn}) * (A_{m_{\max}}) \\ \text{회피기동4. } A_m &= 0 \\ A_m &= +\text{sign}(A_{mn}) * (A_{m_{\max}}) \end{aligned}$$

$r(0) = 3050 \text{ m}$ 는 10000 ft 를 변환시킨 수치이고, 따라서 $3050 \text{ m} * \sin 1^\circ = 52 \text{ m}$ 를 통해 $y(0)$ 를 구했다. $|\dot{y}(0)| = |V_i \sin \gamma_i(0) - V_m \sin \gamma_m(0)| \leq 11.86 \text{ m/s}$, 이 되고, 초기조건은 $(52, 10, 0)$ 으로 하였다.

a) 각 경우별 초기조건에 따른 횡축오차거리의 변화

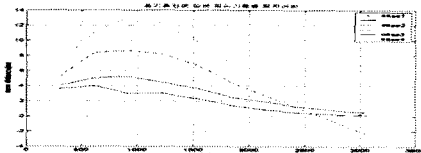


그림 3. 각 회피기동에 대해 거리별 횡축오차거리
b) 각 회피기동에 따른 미사일과 표적의 궤적

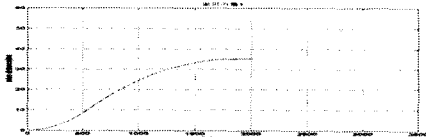


그림 4. 회피기동1.

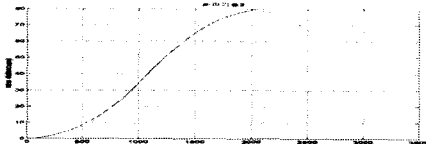


그림 5. 회피기동2.

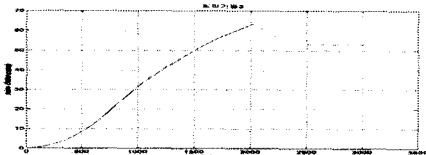


그림 6. 회피기동3.

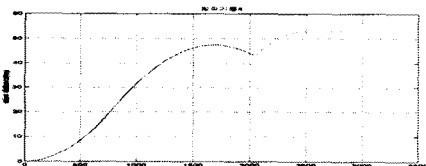


그림 7. 회피기동4.

IV. 결 론

- x_1 에 대한 영점으로의 인력을 증가시키는 것이 R, Q 이지만, 이때, 다른 상태변수 x_3 에 대한 리플이 심하게 발생하는데, 이는 R 이 Q 에 비해 너무 작은 값일 경우 더 심하다. 따라서, Q 값도 역시 작은 값을 선택하게 된다.

- 목표물의 기동이 미사일의 요격성능에 미치는 영향을 분석하였다. 시뮬레이션에서 목표물의 최대 가속도는 $10g$ 로 가정하였으며, 목표물이 회피기동 1,2,3,4 를 할 때, t_{go} 가 1.5 초 일대 기동을 시작한다. 회피기동 1에서 항법상수 N 는 3으로 하였다[4].

- 각 회피기동에 대해 이동구간 유도법칙에서의 제어구간 N 은 4 로 하였다. 각 회피기동별로 초기 지면거리에 따른 횡축오차거리를 나타낸다. 초기거리가 가까운 5000m까지는 횡축오차거리가 크게 나타나서 요격성능이 저하됨을 보았는데, 이는 미사일의 가속도 제한이라는 제한조건 때문이라 생각된다. 발사 시작부터 시선변화율의 반대방향으로 기동하는 회피기동1에 대해 횡축오차거리가 거의 0 임을 확인하였다. 미사일이 목표물을 뒤쫓는 시점 이후로는 목표물의 기동이 없으므로 속도가 빠른 미사일이 정확히 목표물을 요격한다. 회피기동 2에 대해서는 t_{go} 가 1.5 초 이내부터 진행 반대방향 최대가속도로 회피기동 하므로 미사일의 요격성능이 저하됨을 보았다. 회피기동 3,4 는 미사일의 가속도방향에 대해 목표물의 가속도 방향을 진행방향이나, 아니면 진행 반대방향이나에 따라 구분하였는데, 미사일 진행 방향과 반대방향으로 회피기동에 대해서는 요격성능이 많이 저하됨을 알 수 있다. 요격가능 횡축오차거리를 4m로 볼 때[4]는 7000m 이후에서 네 가지 회피기동이 모두 목표물을 요격할 수 있음을 볼 수 있다. 초기거리를 1000m부터 10000m까지 늘려가며 시뮬레이션 하였는데 횡축오차거리의 초기값에 따라 많은 다른 결과가 나올 수 있다. 따라서 더 많은 시뮬레이션을 여러 경우에 대해 수행해야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Lin, C. F., *Modern Navigation, Guidance, Control Processing*, Prentice Hall, 1991.
- [2] Lee, J. W., Kwon, W. H., Choi, J. H., "On Stability of Constrained Receding Horizon Control with Finite Terminal Weighting Matrix", *Automatica*, Vol.34, No.12, 1998, pp.1607-1612.
- [3] Kim, K. B., Yoon, T. W., Kwon, W. H., "Receding Horizon Guidance Laws for Constrained Missiles with Autopilot Lags", *Control Engineering Practice*, Vol.9, Issue 10, 2001, pp.1107-1115.
- [4] 국방과학연구소, 1 단계 완료 보고서, 국방과학연구소, 서울대학교 자동제어특화연구센터 유도 제어연구실, 1997.