

상수 출력궤환 선형 시스템의 안정화 및 H_∞ 제어기 설계

Stabilization and H_∞ control of linear systems with static output feedback

김형진*, 김명순**, 김진훈***

(Kim Hyeong Jin*, Myeong-Soon Kim**, Jin-Hoon Kim***)

* 충북대학교 제어계측공학과(E-mail : regulus@just.chungbuk.ac.kr)

** 충북대학교 제어계측공학과(E-mail : robust3650@hotmail.com)

*** 충북대학교 전기전자공학부(전화(043)261-2387, E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr)

Abstract - In this paper, we consider the stabilization and H_∞ control of linear systems with static output feedback control. The static output feedback control represents the simplest closed-loop control that can be realized in practice, and, moreover, it is less expensive to be implemented and is more reliable. In spite of its advantages, it is one of the open problems which is not sloved analytically or numerically yet. After decompose the closed-loop system into feedback form, by adopting the small gain theorem, we obtain a sufficient condition for stabilization and a sufficient condition for H_∞ control expressed as linear matrix inequalities. Finally, we show the usefulness of our results by a numerical example.

Keywords : 상수 출력궤환(Static output feedback: SOF), 시스템 분할(System decomposition), 소이득 정리(Small gain theorem), L_2 이득(L_2 gain), 선형 행렬 부등식(LMI)

1. 서론

현대 제어공학에 있어서 상수 출력궤환(Static Output Feedback: SOF) 안정도 문제는 아마도 가장 중요하면서도 아직 풀리지 않는 문제중의 하나일 것이다. 이 문제는 간단히 말해서, 폐루프 시스템의 접근 안정도를 보장하는 상수 출력 궤환 제어기를 구성하는 것이다[1].

상수 출력 궤환제어는 출력만을 이용한 제어 방법이므로, 전체 시스템이 가장 간단한 폐루프 시스템으로 표현되고, 많은 상태 변수를 필요로 하는 상태 궤환(State Feedback) 제어에 비해 경제적이고 보다 높은 신뢰성을 확보할 수 있다. 또한 동적 출력 궤환(Dynamic Output Feedback)과 달리 시스템의 차수가 증가하지 않는다[2][3]. 이러한 상수 출력 궤환 제어의 장점들 때문에 그 동안 이론적으로나 실제 응용면에서 많은 연구들이 이루어졌지만, 아직까지 해석적으로나 수치적 접근방법으로도 잘 해결이 되지 않고 있다. 이는 최근 조사 논문[1]에 잘 요약하여 기술되어 있으며, 접근방법들에 대해서도 요약·비교하고 있다. 접근방법으로써는 Riccati 방정식의 재해석, 최적화 기술, 극점 또는 고유치구조 배치기술등이 주목할 만하다[4].

최근까지 시스템의 외부입력으로부터 출력까지의 이득을 정해진 바운드까지 보장하게 하는 H_∞ 제어 이론이 강인제어 분야에서 효과적인 설계 기술로 간주되어 왔으며, 특히 강력한 톨로 각광받은 선형 행렬 부등식(LMI)과 더불어 다양한 분야에 응용되고 있다[9].

이에 본 논문에서는 출력궤환 제어기를 갖는 선형 시스템의 안정성을 보장하는 안정화 문제와, 외란으로부터 측정 출력까지의 에너지 전달률(즉, L_2 이득)이 주어진 값 이하를 만족시키는 H_∞ 제어기 설계 문제에 대해 새로이 폐루프 시스템을 궤환 형태로 분할한 후, 소이득정리(Small gain theorem)에 기초하여 선형행렬 부등식 형태의 결과를 제시할 것이다. 끝으로, 수치 예제를 통해 본 논문의 유용성을 보이도록 하였다.

이 논문에서 사용되는 기호 및 약어는 다음과 같다. $(\cdot)^T$ 는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고 대칭(symmetric)행렬 X 에 대하여 $X > 0$, $X \geq 0$ 는 각각 행렬 X 가 양확정(positive definite), 준 양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 그리고, $\|G(s)\|_\infty = \sup_{w \in R} \sigma_{\max} [G(jw)]$ 이다. 끝으로, \mathbb{R}^n 는 $p \times p$ 항등(indentity)행렬이다.

II. 문제 기술 및 예비 결과

2.1 문제 기술

다음으로 기술되는 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= C_2 x(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x \in R^n$ 는 상태, $u \in R^m$ 는 제어입력, $y \in R^p$ 는 출력, $z \in R^q$ 는 측정 출력, 그리고 행렬 A, B, B_w, C, C_2 는 적당한 차원을 갖는 상수 행렬이다.

우리는 이 논문에서 위에 기술된 선형 시스템(1)에 대하여 다음의 두 부분에 대하여 논의하겠다.

- 1) $w(t) = 0$ 일때, 제어 입력을 $u(t) = Ky(t)$ 로 갖는 선형 시스템(1)의 폐루프가 안정화되는 충분조건,
- 2) 선형 시스템(1)의 외란으로부터 측정 출력까지의 에너지 전달률(즉, L_2 이득)이 주어진 값 이하를 만족시키는 충분조건.

2.2 예비 결과

선형 시스템(1)의 출력 행렬 C 를 $[I_p : 0]$ 으로 변환하는 잘 알려진 유사 변환[7]을 고려하자. 여기서 변환 행렬 T 의 역행렬이 존재하도록 행렬 $R \in R^{(n-p) \times n}$ 을 결정하여 $T = [C^T : R^T]^T$ 로 정하면, 변환 행렬 T 는 정칙(nonsingular)이 된다. 시스템의 상태를 $\bar{x} = Tx$ 로 새롭게 정의 하면, 다음을 얻을 수 있고

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_w w(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}_1 \bar{x}(t) \\ z(t) &= \bar{C}_2 \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^{-1} = [I_p : 0]$, $\bar{C}_2 = C_2 T^{-1}$ 이다.

이제, 벡터 \bar{x} 와 행렬 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}_2$ 를 다음과 같이 분할하자.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \bar{C}_2 = [\bar{C}_{21} : \bar{C}_{22}] \quad (3)$$

여기서, $\bar{x}_1 \in R^p, \bar{x}_2 \in R^{(n-p)}, \bar{A}_{11} \in R^{p \times p},$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{12} &\in R^{p \times (n-p)}, \bar{A}_{21} \in R^{(n-p) \times p}, \bar{A}_{22} \in \\ &R^{(n-p) \times (n-p)}, \bar{B}_1 \in R^{p \times m}, \bar{B}_2 \in R^{(n-p) \times m}, \\ \bar{C}_{21} &\in R^{q \times p}, \bar{C}_{22} \in R^{q \times (n-p)} \text{이다.} \end{aligned}$$

이와 같이 분할하면, 그림 1의 블록 선도(block diagram)와 같이 상수 출력 궤환 제어 $u(t) = Fy(t)$ 를 적용하여 얻은 다음의 폐루프 시스템을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{B}_1 F & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} + \bar{B}_2 F & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{w1} \\ \bar{B}_{w2} \end{bmatrix} w \\ z &= [\bar{C}_{21} : \bar{C}_{22}] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

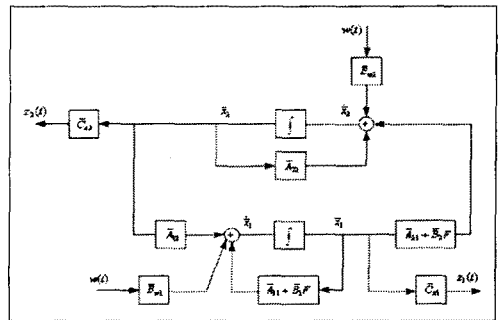


그림 1. 폐루프 시스템의 블록선도

Fig 1. Block diagram of the closed-loop system

다음의 보조정리는 본 논문의 주요결과를 확인하는데 필요한 유용한 결과이다.

보조정리 1[9]: 임의의 대칭행렬 $Q = Q^T > 0$ 와 양의 스칼라 $\gamma > 0$ 에 대하여 아래에 제시한 선형 행렬 부등식(i)과 식 ii)는 서로 동치(equivalent)이다.

$$i) \begin{bmatrix} AQ + QA^T & QC^T & B \\ CQ & -\gamma & 0 \\ B^T & 0 & -\gamma \end{bmatrix} < 0$$

$$ii) \|G(s)\|_{\infty} = \|C(sI - A)^{-1}B\|_{\infty} < \gamma.$$

III. 주요 결과

주요 결과는 선형 행렬 부등식 형태로 표현된 정리 1과 정리 2로 기술된다. 우선 정리 1은 SOF 안정성 문

제이고, 정리 2는 L_2 이득 문제에 대한 기술이다. 본 논문에서 증명은 그림 1을 참조하여 소이득 정리[11]와 보조정리 1을 이용하면, 얻을 수 있으므로 지면 관계상 생략하도록 하겠다.

3.1 SOF Stabilization

정리 1 : 부분 행렬 \bar{A}_{22} 가 안정하고, $\|(sI - \bar{A}_{22})^{-1}\|_{\infty} = \gamma_2$ 를 만족한다고 하자. 만약 다음에 오는 선형 행렬 부등식을 만족하는 양의 대칭행렬 $Q = Q^T \in R^{p \times p} > 0$ 와 임의 행렬 $Y \in R^{m \times p}$, 그리고 양의 스칼라 $\gamma_1 > 0$ 이 존재하면

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}Q + Q\bar{A}_{11}^T + \bar{B}_1Y + Y^T\bar{B}_1^T & (\bar{A}_{21}Q + \bar{B}_2Y)^T & \bar{A}_{12} \\ (\bar{A}_{21}Q + \bar{B}_2Y) & -\gamma_1 & 0 \\ \bar{A}_{12}^T & 0 & -\gamma_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

선형 시스템(1)은 $\gamma_1\gamma_2 < 1$ 이 만족되는 한 안정하다. 그 때의 제어 입력은 다음과 같다.

$$u(t) = Fy(t) = (YQ^{-1})y(t). \quad (6)$$

3.2 L_2 gain problems

정리 2 : 부분 행렬 \bar{A}_{22} 가 안정하다고 하고, 다음과 같이 4부분의 $\|G(s)\|_{\infty}$ 을 정의 하자.

$$\begin{aligned} \|G_{02}(s)\|_{\infty} &= \gamma_{01}, \quad \|\bar{C}_{22}G_{02}(s)\bar{B}_{w2}\|_{\infty} = \gamma_{02}, \\ \|G_{02}(s)\bar{B}_{w2}\|_{\infty} &= \gamma_{03}, \quad \|\bar{C}_{22}G_{02}(s)\|_{\infty} = \gamma_{04}. \end{aligned}$$

만약 다음에 오는 4개의 선형 행렬 부등식과 $\gamma_{01}\gamma_{11} < 1$ 을 만족하는 양의 대칭행렬 $Q = Q^T \in R^{p \times p}$ 와 임의 행렬 $Y \in R^{m \times p}$, 그리고 양의 스칼라 $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14} > 0$ 이 존재하면

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}Q + Q\bar{A}_{11}^T + \bar{B}_1Y + Y^T\bar{B}_1^T & Q\bar{A}_{21}^T + Y^T\bar{B}_2^T & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21}Q + \bar{B}_2Y & -I & 0 \\ \bar{A}_{12}^T & 0 & -\gamma_{11}^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}Q + Q\bar{A}_{11}^T + \bar{B}_1Y + Y^T\bar{B}_1^T & Q\bar{C}_{21}^T & \bar{B}_{w1} \\ \bar{C}_{21}Q & -I & 0 \\ \bar{B}_{w1}^T & 0 & -\gamma_{12}^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}Q + Q\bar{A}_{11}^T + \bar{B}_1Y + Y^T\bar{B}_1^T & Q\bar{C}_{21}^T & \bar{A}_{12} \\ \bar{C}_{21}Q & -I & 0 \\ \bar{A}_{12}^T & 0 & -\gamma_{13}^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}Q + Q\bar{A}_{11}^T + \bar{B}_1Y + Y^T\bar{B}_1^T & Q\bar{A}_{21}^T + Y^T\bar{B}_2^T & \bar{B}_{w1} \\ \bar{A}_{21}Q + \bar{B}_2Y & -I & 0 \\ \bar{B}_{w1}^T & 0 & -\gamma_{14}^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

제어 입력 (6)는 선형시스템(1)의 페루프가 안정하다는 것을 보장하며, 외란 $w(t)$ 에서 측정 출력 $z(t)$ 까지의 $\|G_{zw}(s)\|_{\infty}$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\gamma_R := \|G_{zw}(s)\|_{\infty} \leq \frac{\gamma_{12} + \gamma_{02} + \gamma_{13}\gamma_{03} + \gamma_{14}\gamma_{04}}{1 - \gamma_{01}\gamma_{11}} := \gamma_E.$$

IV. 수치 예제

이제 위에서 얻어진 결과의 유용성을 보이기 위해서 수치예제를 보이도록 하겠다. 이 예제는 상수 출력 제어 문제의 예제로 많이 사용되어진 VTOL 헬기의 상하 운동에 대한 상태공간 모델이며, 이 예제의 행렬 요소들의 값을 다음에 나타내었다[5][6][7][8].

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_w = I_4, C = [0 \ 1 \ 0 \ 0], C_z = \text{diag}(I_2, 0_{2 \times 2}).$$

이 예제의 개루프에 대한 시스템 행렬 A의 고유치 $\lambda(A) = \{-2.0727, -0.2325, 0.2758 \pm 0.2576i\}$ 를 확인함으로써 쉽게 시스템이 불안정하다는 것을 알 수 있다.

4.1 SOF Stabilization

먼저 유사 변환 행렬 $T = [C^T; R^T]^T$ 를 위해 행렬 $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.01 & -10 \end{bmatrix}$ 를 결정하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\lambda(\bar{A}_{22}) = \{-0.0631, -0.3411 \pm 1.5695i\},$$

$$\|(sI - \bar{A}_{22})^{-1}\|_{\infty} = \gamma_2 = 28.1238.$$

또한, Matlab의 LMI Toolbox[10]를 이용하여 얻어진 정리 1의 조건을 만족하는 해로 다음의 결과를 얻게 되어

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0.0185, \\ F &= YQ^{-1} = [-1.7585 \ 1.2900]^T \times 10^4, \\ \gamma_1 \gamma_2 &= 0.5213 < 1, \end{aligned}$$

전체 폐루프 시스템은 안정하다. 이를 확인하기 위해 폐루프 시스템의 구하여 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda(A+BFC) \\ = \{-1.6027 \times 10^5, -0.0766, -0.3308 \pm 1.5261i\} \end{aligned}$$

4.2 L₂ gain problems

$$\text{위의 예제와 마찬가지로 행렬 } R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.001 & -50 \end{bmatrix}$$

을 결정하면, 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{A}_{22}) &= \{-0.063, -0.3391 \pm 1.5704i\}, \\ \gamma_{01} &= 62.4340, \gamma_{02} = 16.6157, \\ \gamma_{03} &= 104.2012, \gamma_{04} = 24.6528. \end{aligned}$$

또한, 정리 2의 선형 행렬 부등식 (7) - (10)으로 인하여 L₂ 이득을 최소로 하게 하는 결과들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 0.0047, \gamma_{12} = 0.0290, \\ \gamma_{13} &= 0.0031, \gamma_{14} = 0.0451, \\ F &= [-9.0048, 6.6047]^T \times 10^4 \\ \gamma_{01} \gamma_{11} &= 0.2953 < 1. \end{aligned}$$

이 결과들로 계산된 L₂ 이득 $\gamma_E = 25.6497$ 이지만, 정리 2를 만족하는 SOF 이득 행렬 F로 계산된 실제 L₂ 이득은 $\gamma_R = 14.3387$ 이다.

III. 결 론

이 논문에서는 상수 출력 궤환 제어를 갖는 선형 시스템의 안정성과 H_∞ 제어를 설계하는 방법을 새로운 폐루프 시스템 분할법과 소이득 정리를 통하여 LMI 형태로 표시하였다. 수치 예제에서는 제시된 조건을 만족하는 제어기는 실제로 시스템의 안정성을 보장한다는 것을 폐루프 시스템의 고유치를 확인함으로써 보였고, 또한, 제시된 방법으로 설계된 H_∞ 제어기의 L₂ 이득값은 실제 제어 시스템의 L₂ 이득값의 상한임을 보였다. 그러나 이는 유사 변환 행렬 T를 결정하는 행렬 R의 선택에 따라 유동적으로 적합한 행렬 R을 찾는 문제가 또 다른 연구 과제가 될 것이다.

- [1] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis, Static Output Feedback-A Survey, *Automatica*. Vol. 33. No. 2, pp. 125-137, 1997.
- [2] A. Astolfi and P. Colaneri, Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems, in Proc. 39th IEEE Conf, Decision Control, Sydney, Australia, 2000, pp. 2920-2925.
- [3] Robert E. Benton, Jr. and Dirk Smith, Static Output Feedback Stabilization with Prescribed Degree of Stability, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 43, No. 10, pp. 1493-1496, 1998.
- [4] Germain Garcia, Bernard Pradin and Fanyou Zeng, Stabilization of Discrete Time Linear Systems by Static Output Feedback, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 46, No. 12, pp. 1954-1958.
- [5] Laurent El Ghaoui, Francois Oustry and Mustapha AitRami, A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output Feedback and Related Problems, *IEEE Trans. Automat. Control*, pp. 1171-1176, 1997.
- [6] Yong-Yan Cao, James Lam and You-Xiam Sun, Static Output Feedback Stabilization, *Automatica*. Vol. 34. No. 12, pp. 1641-1645, 1998.
- [7] E. Prempain, I. Postlethwaite, Static output feedback stabilisation with H_∞ performance for a class of plants, *Syst. Control Lett.*, 43, pp. 159-166, 2000.
- [8] J. C. Geromel, C. C. de Souza and R. E. Skelton, Static Output Feedback Controllers: Stability and Convexity, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 43, No. 1, pp. 120-125, 1998.
- [9] S. Bord. L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [10] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide with MATLAB*, The MathWork. Inc, 1995.
- [11] Michael Green and David J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice Hall, 1996.