

LQ-서보형 PI 제어기에 의한 직접 구동식 DC 모터의 위치제어

Position Control of Direct Drive DC Motor By LQ-SERVO PI Controller

*조성호, 서병설
한양대학교 전기공학과

e-mail : anycall@ihanyang.ac.kr, bssuh@hanyang.ac.kr

*Sung-Ho Cho, Byung-Suhl Suh
Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University

Abstract

A LQ-servo PI controller is proposed to deal with the uncertainty caused variations of load inertia of direct drive dc motor by using loop shaping technique.

I. 서 론

직접 구동식 DC 모터는 모터 축에 부하를 직접 연결하여 높은 가속도 토크를 얻을 수 있고, 기어 열에 의한 뒤틀림이나 마찰과 같은 비선형 특성이 없다. 그리고 영구 자석과 같은 새로운 재료의 개발로 인해 크기가 작아져서 고정밀 로봇용 분야에 널리 사용되고 있어 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그러나 기어 열이 없으므로 모터는 부하의 관성의 변화에 대해 심각한 민감도를 가지게 된다. 이러한 변화를 보상하기 위해서 Butler^[1]의 모델 기준 적응제어기(Model Reference Adaptive Control)를 사용하여 변화하는 부하의 관성에 대해 보상하였고, Furuta^[2]의 bang-bang 위치제어기는 VSS(Variable Structure System)-type 적분기를 이용하여 매개변수 변화와 모델 오차에 대해 좀 더 강인성을 갖게 했다. 비선형 특성을 고려한 Hamdi^[3]의 퍼지 제어기는 복잡한 수학적 모델링이 필요 없는 장점이 있고, Kim^[4]과 Xu^[5]의 상태 제환을 갖는 적응제어기는 전향 보상을 이용하여 정상상태 위치 오차를 보상하고, 보조입력은 명령 추종 성능을 증진시켰다.

본 논문은 부하 관성의 변화에 의한 불확실성으로

부하 가속도가 민감하여 모터의 운전이 어려워지는 문제를 해결하고 모터의 위치 제어서 발생하는 오차에 대한 강인성을 확보할 수 있는 직접 구동식 DC 모터의 위치제어기로서 LQ-서보형 PI^[6] 제어기를 제안한다.

이 제어기는 LQ-서보형 구조에 부분 상태 제환을 갖는 PI구조로 루프 형성기법을 이용하여 저주파와 고주파 영역에서 루프전달함수 값을 제한하고 각 영역에 가중치를 줌으로 위치추종과 외란 제거성능을 개선했다.

II. 직접 구동식 모터의 구조

DC 모터의 표준모델 전달함수는 그림 1에서처럼 전기적인 전달함수 $1/(sL_m + R_a)$ 와 기계적인 전달함수 $1/(sJ + f)$ 로 구성된다. 자기와 기계적인 이력현상(hysteresis)에 의한 쿨롱마찰은 속도 u_ω 와 같은 부호와 크기 M_ω 을 갖는 반작용 토크의 결과이고 이 정적인 모델은 실제 마찰 효과를 단지 근사적으로 표현한다. 그리고 전류 루프의 높은 속도는 모터의 시정수와 비교하기 때문에 1로 근사할 수 있다.

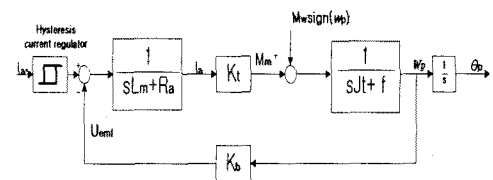


그림 1. DC 모터의 모델

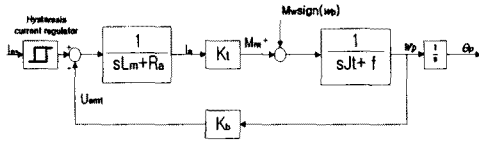


그림 2. DC 모터의 모델

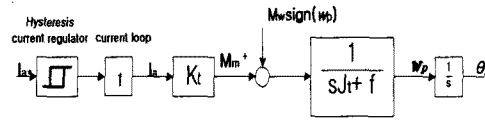


그림 3. 모터와 전류루프의 간략도

R_a : 저항, L_m : 모터 인덕턴스, K_t : 토크상수, J_a : 전
 K_f : 역기전력 상수, J_t : 전체 관성모멘트($J_t + J_m$),
 J_t : 부하관성, J_m : 모터 축 관성, M_w : 쿨롱마찰, f : 제동

III. LQ-서보형 PI 제어기 설계

3.1 LQ-서보형 PI 제어기 구조

간략화한 직접 구동식 DC 모터의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$J_t \frac{d\theta_p^2}{dt^2} + f \frac{d\theta_p}{dt} = K_t I_a \quad (1)$$

여기서, θ_p 는 출력변수 $y_p(t)$, I_a 는 제어변수 $u(t)$ 로 나타낼 수 있다.

상태 공간 모델은 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \quad (2)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t) \quad (3)$$

여기서, $A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{J_t} \end{bmatrix}$, $B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{J_t} \end{bmatrix}$, $C_p = [1 \ 0]$ 이다.

LQ-서보형 PI 제어기를 이용한 DC 모터의 구조는 그림 3과 같으며 LQ-서보형 PI제어기란 Athans^{[8][9]}에 의해 소개된 LQ-서보구조를 출력이 피드백된 제어이득 G_y 를 비례이득, 정상상태의 오차를 줄이기 위해 사용된 적분기의 제어이득 G_z 를 적분이득, 안정도-강인성을 향상시키기 위해 부분 상태 케환이득 G_r 로 해석한 것이다.

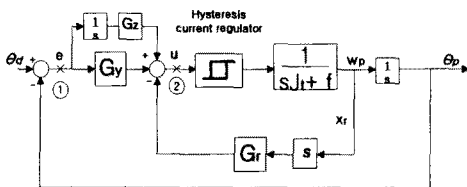


그림 3. LQ-서보 구조를 갖은 직접 구동식 DC 모터의 전체 간략도

LQ-서보형 PI제어기에 관한 상태공간식과 특성은 기존의 연구들에서 상세히 설명되었기 때문에 다음과 같이 간략히 서술한다. LQ-서보형 PI제어기는 안정도-강인성이 보장되고 있지만 성능-강인성을 부여하기 위해 개발된 방법으로 그림 3에서 플랜트의 상태변수, w_p ,의 차원을 2이라고 할 때 그 중 1개의 상태변수를 출력변수, θ_p ,로 선정하여 성능-강인성을 부여하고자 한 것이다. 나머지 상태변수, x_r ,은 부분 상태 케환으로 안정도-강인성을 더욱 향상 시키는데 기여할 수 있다. 그리고 정상상태오차를 제거하기 위해 출력의 적분을 상태에 추가하여 덧붙임 상태(augmented state) $x(t) = [w_p(t) \ \theta_p(t) \ x_r(t)]$ 가 형성되고 차원은 3이 되며 덧붙임 상태 공간 식은 식 (4)로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix}, C = [1 \ C_p] \quad (5)$$

여기서 제어법칙은 $u(t) = -G \cdot x(t)$ 이고 G 는 제어이득으로 가격함수식 (6)을 최소화 하고 식(7)의 대수 리카티식(Algebraic Riccati Equation)을 풀어서 구한다. 여기서 $G = [G_z \ G_y \ G_r]$ 인 부분적 분해(partial fraction)관계로부터 나타낼 수 있으며 G_y 은 비례이득이며 G_r 부분 상태 케환 이득이다.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (6)$$

$$A^T K + K A + Q - K B R^{-1} B^T K = 0 \quad (7)$$

식 (6)과 (7)에서 $Q = N^T N$ 이고 $R = \rho I$ 이다.

그리고 LQ-서보형 PI는 그림 3 구조의 ①에서 절단한 입력 측에서 보면 완전한 LQR 문제와 같은 구조이기 때문에 LQR의 특성인 안정도-강인성을 보장한다. 이 G_{LQ} 는 식 (8)과 같이 구할 수 있다.

$$G_{LQ} = G(sI - A)^{-1} B \quad (8)$$

또, 성능-강인성을 보장하기 위해서는 출력측 상태를 절단한 전달함수 $T(s)$ 값의 형상으로 설계하여야 한다는 것을 서론에서 설명하였다. 이 $T(s)$ 는 식 (10)과 같이 얻을 수 있다.

$$T(s) = C_p (sI - A_p + B_p G_y D_p)^{-1} B_p (G_y + \frac{I}{s G_z}) \quad (10)$$

저주파 영역과 고주파 영역에서 $T(s)$ 의 극한 값을 구하기 위해 Kwakernaak Sivan^[7]의 제어이득행렬 G 의 극한 거동인 다음과 같은 관계식을 이용한다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G = W N \quad (11)$$

여기서 W 는 일원행렬(Unitary Matrix)로 $W^T W = I$ 이다.

제어이득행렬 G 와 설계 파라미터 N 은

$G = [G_z \ G_y \ G_r]$ 와 $N = [N_z \ N_y \ N_r]$ 으로 분해하고, 각

각의 N_z, N_y, N_r 이라고 할 때 다음과 같은 극한 거동식이 얻어질 수 있다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} [G_z \ G_y \ G_r] = [N_z \ N_y \ N_r] \quad (12)$$

여기서 N_z, N_y, N_r 은 설계 매개변수이므로 W 가 단위 행렬이 되도록 하는 $\bar{N}_z, \bar{N}_y, \bar{N}_r$ 이 존재한다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} [G_z \ G_y \ G_r] = [\bar{N}_z \ \bar{N}_y \ \bar{N}_r] \quad (13)$$

그러면 관계식 (13)을 이용해 식 (10)의 $T(s)$ 의 극한 값을 저주파 영역과 고주파 영역에서 구해보자.

3.2.1 설계 매개변수 N 의 설계

$|T(j\omega)|$ 의 형상은 경계 주파수 Ω_r 을 갖는 명령 추종 및 외란 제거 장벽의 경계 값 $\alpha(w)$ 와 경계 주파수 Ω_n 을 갖는 센서 잡음과 모델링 오차의 경계 값 $\beta(w)$ 사이에 존재하며 두 경계 값을 침범하지 않아야 한다.

그러므로 $|T(j\omega)|$ 의 형상은 저주파 영역에서는 경계 값 $\alpha(w)$ 보다는 위에, 고주파 영역에서는 경계 값 $\beta(w)$ 보다는 아래에 위치하게 된다.

$\alpha(w)$ 와 $\beta(w)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\alpha(w) = \begin{cases} M_r & , w \leq \Omega_r \\ 0 & , w > \Omega_r \end{cases} \quad (14)$$

$$\beta(w) = \begin{cases} 0 & , w < \Omega_n \\ e_{\max}^{-1}(w) & , w \geq \Omega_n \end{cases} \quad (15)$$

여기서, M_r 은 $\alpha(w)$ 의 높이이고 $e_{\max}(w)$ 는 모델링 오차의 최대 값이다.

$T(s)$ 의 형상에 만족하도록 설계 매개 변수 N 을 결정하기 위해서, 다음의 주파수 제한 기술을 사용한다.

먼저, 저주파 영역에서는 $s \rightarrow 0$ 이므로 $T(s)$ 는 식 (16)과 같이 근사 되고 (15)와 같이 변형된다.

$$T(s) \approx C_p(-A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p \frac{1}{s} G_z \quad (16)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \sqrt{\rho} G_r D_p)^{-1} B_p \sqrt{\rho} G_z \quad (17)$$

한편, 플랜트 식 A_p 와 B_p 를 다음과 같이 분해 하면,

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

다음과 같이 (19)로 간략히 나타 낼 수 있다.

$$T(s) = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} A_{21} B_2 \bar{N}_z \quad (19)$$

저주파 영역에서 $T(s)$ 의 값을 제한하기 위해서는 (20)을 만족해야 하므로 이로부터 설계 매개변수 \bar{N}_z 는 (21)과 같이 결정된다.

$$T(s) = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} A_{21} B_2 \bar{N}_z \quad (20)$$

$$A_{21} B_2 \bar{N}_z = 1 \quad (21)$$

$$\therefore \bar{N}_z = B_2^{-1} A_{21}^{-1} \quad (22)$$

그리고 설계 매개변수 \bar{N}_r 은 (23)과 같이 결정된다.

$$\bar{N}_r = \sqrt{\rho} B_2^{-1} A_{22} \quad (23)$$

다음으로, 고주파 영역에서 $s \rightarrow \infty$ 이므로 $T(s)$ 를 근사화 하면,

$$T(s) = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \sqrt{\rho} G_y \quad (24)$$

또한, $\rho \rightarrow 0$ 이고 최소위상 플랜트라는 가정 하에 (13)가 성립하므로 이를 이용하여 (25)를 근사시킨다.

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \bar{N}_y \quad (25)$$

$T(s)$ 의 값을 제한하기 위하여 (26)를 만족해야 하므로 이로부터 설계 매개변수 \bar{N}_y 는 (28)과 같이 결정된다.

$$T(s) = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \bar{N}_y \quad (26)$$

$$B_1 \bar{N}_y = 1 \quad (27)$$

$$\therefore \bar{N}_y = B_1^{-1} \quad (28)$$

3.2.2 가중치 α, β, γ 를 이용한 매개변수 N 의 재설계

설계 매개변수 N , 즉 (13)에 가중치 α, β, γ 를 도입하여 루프 형상 설계 방법에서 저주파 영역의 값을 크게 하여 명령 추종 및 외란 제거에 대한 성능-강인성을 향상시키고, 고주파 영역의 값을 작게 하여 센서 잡음에 대한 성능-강인성을 향상 시킬 수 있는 방법을 SUH^[6]가 제안했다.

SUH의 방법으로 설계 매개변수 N 을 다시 설계한다.

먼저, 저주파 영역의 제한 값을 크게 하기 위해 (20)을 (29)과 같이 변형할 수 있다.

$$A_{21} B_2 \bar{N}_z = \alpha \quad (29)$$

$$\therefore \bar{N}_z = \alpha B_2^{-1} A_{21}^{-1} \quad (30)$$

α 를 1보다 큰 값으로 설계하면 저주파 영역의 제한 값이 커지고 감도 함수 행렬의 값을 작게 하여 명령 추종 및 외란 제거의 성능을 향상 시킬 수 있다.

\bar{N}_r 에 가중치를 도입하면 (31)과 같다.

$$\sqrt{\rho} \bar{N}_r = \sqrt{\rho} B_2^{-1} A_{22} \quad (31)$$

식 (31)을 살펴보면, \bar{N}_r 은 \bar{N}_z 와는 달리 ρ 에 비례하기 때문에 가중치 β 에 의한 \bar{N}_r 의 변화를 ρ 의 변화로 간주할 수 있다. $\rho \rightarrow 0$ 일 때 $T(s)$ 의 값을 작게 제한할 수 있기 때문에 $0 < \beta < 1$ 일 때 ρ 값이 더 작아진다고 볼 수 있어서 값을 더 작게 제한할 수 있음을 알 수 있다.

고주파 영역의 $T(s)$ 의 값을 제한하기 위해 (26)를 (33)과 같이 변형할 수 있다.

$$B_1 \bar{N}_y = \gamma \quad (32)$$

$$\therefore \overline{N}_y = \gamma B_1^{-1} \quad (33)$$

그러므로 $\gamma > 1$ 이면 \overline{N}_y 는 증가하게 되고, $T(s)$ 의 값 또한 증가하게 된다. 마찬가지로, $0 < \gamma < 1$ 일 때, $T(s)$ 의 값은 감소하게 된다.

IV. 시뮬레이션

직접 구동식 DC 모터의 설계사양은 다음과 같다.

$$J_t = 0.210 \text{ Nms}^2/\text{rad}, K_t = 3.26 \text{ Nm/A}$$

$$f = 0.013 \text{ Nms/rad}, M_r = 100 \text{ dB}, e_{\max} = w/10^3$$

성능-강인성을 위해 명령추종 및 외란 장벽의 경계 값은 $\Omega_d = 10^{-1}$ 으로 선정하고 센서 잡음 장벽의 경계 값은 $\Omega_n = 10^3$ 으로 선정한다. 또, 저주파 영역의 $T(s)$ 의 값을 증가시키기 위해서 $\alpha < 1$, 고주파 영역의 $T(s)$ 의 값을 작게 하여 잡음에 대한 성능을 개선하기 위해 $0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$ 인 값을 선택 한다.

그러므로 $\rho = 0.01, \alpha = 3, \beta = 0.1, \gamma = 0.9$ 로 선택하면 $\overline{N}_x, \overline{N}_y$ 는 식(22)과(28)에 의해서 결정되고, \overline{N}_r 은 (23)과 같이 결정된다.

주파수역 설계사양과 N, G 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha(w) = \begin{cases} 100 \text{ dB} & , w \leq 0.1 \\ 0 & , w > 0.1 \end{cases} \quad \beta(w) = \begin{cases} 0 & , w < 10^3 \\ 10^3/w & , w \geq 10^3 \end{cases}$$

$$N = [-19.3252 \quad 10 \quad -0.0004]$$

$$G = [193.2515 \quad 106.9259 \quad 3.706]$$

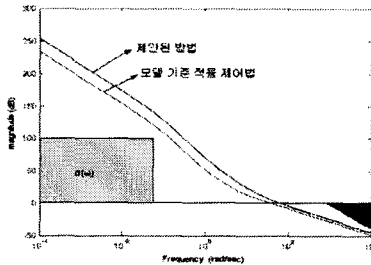


그림 5. 루프 전달함수 $T(s)$

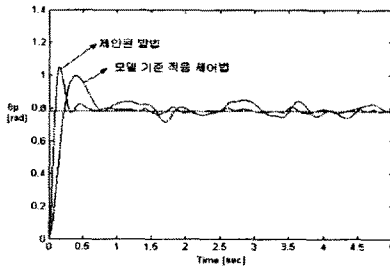


그림 6. $\theta = \pi/4, J_t = 0.210 \text{ Nms}^2/\text{rad}$ 때 모터의 응답

그림 4, 5에서 볼 수 있듯이 각 주파수영역에 가중치를 도입함으로 상승시간, 정착시간이 향상되었으나 오버슈트는 약간 증가하였고, 저주파 영역의 이득이 증가함으로 명령 추종 및 외란제거의 성능을 개선 할 수 있음을 보였다.

V. 결론

본 논문에서는 LQ-서보형 PI제어기 설계 방법을 이용하여 직접 구동식 DC 모터의 부하 관성의 변화에 의한 시스템의 불확실성으로 모터의 위치 추종시 발생하는 오차에 대해 강인성을 확보했고 명령추종과 외란 제거 성능을 향상시키기 위해 저주파영역에 가중치를 줌으로 이득이 증가하여 성능을 개선할 수 있음을 보였다. 또, 모델기준 제어방법과 본 논문에서 제안한 방법의 응답을 비교하여 나타내었다.

그러므로 적응제어기와 같은 설계상의 복잡성과 실현화의 어려움을 LQ-서보형 PI제어기로 설계하여 산업체에 널리 사용되는 PI구조로 구현이 가능하도록 하는 것에 그 의의가 있다고 할 수 있다.

참고 문헌

- [1] H.Butler, G.Hoderd, and J.V.Amerongen, "Model Reference Adaptive Control of a Direct Drive DC Motor", IEEE Control Systems Magazine, Vol. 1, Issue 1, pp. 80-84, Jan, 1989.
- [2] Katsuhisa Furuta, Seiichi Kobayashi, "Bang-Bang Position Control of Direct Drive Motor", IECON'90, 16th Annual conference of IEEE, Vol 1, pp. 148-153, 27-90, Nov, 1990.
- [3] Hoang Le-Huy and Maher Hamdi, "Control of a Direct Drive Motor by Fuzzy Logic", Industry Application Society Annual Meeting, 1993, Conference Record of the 1993 IEEE, Vol 1, pp. 732-738, 2-8, Oct, 1993.
- [4] Young T. Kim, M. R. Akbarzadeh-Tand Dong Wook Lee, "State Feedback Adaptive Control of a Direct Drive Motor", IEEE System Theory, Proceeding of the Twenty-Ninth Southeastern Symposium on, pp. 288-291, 1997.
- [5] J. D. Han, Y. C. Wang, D. L. Tan, and W. L. Xu, "Acceleration Feedback Control for Direct-Drive Motor system", Intelligent Robots and System, Proceeding. 2000 IEEE/RSJ International Conference on, Vol 2, pp. 1068-1074, 31, Oct, 2000.
- [6] 서병철, "가중치를 이용한 LQ-Servo형 PI 제어기 설계", 한국통신학회논문지, Vol.25 No.3B, pp. 570-576, 03. 2000.
- [7] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-17, pp. 79-86, 1972.
- [8] M. Athans, Lecture Note on Multivariable Control Systems, M.I.T. Ref. No. 840418/6236., 1984.
- [9] M. Athans, Lecture Note on Multivariable Control Systems, M.I.T. Ref. No. 860224/6234., 1986.