

불확실한 파라미터를 갖는 비홀로노믹 이동로봇의 적응제어

Adaptive Control of a Nonholonomic Mobile Robot with Parametric Uncertainty

백 종 익*, 윤 태 웅**

* 고려대학교 전기공학과(전화:(02)3290-3695, 팩스:(02)928-8909, E-mail : baikjo@cello.korea.ac.kr)

** 고려대학교 전기공학과(전화:(02)3290-3240, 팩스:(02)928-8909, E-mail : twy@cello.korea.ac.kr)

Abstract : This paper presents an adaptive control scheme for parking or regulating a nonholonomic mobile robot of an unicycle type with parameter uncertainty. The kinematics can be described with Brockett's nonholonomic integrator. The control law is designed in cylindrical coordinates together with the estimation law for the uncertain parameters such that the controlled signals converge to zero while guaranteeing the boundedness of the estimation errors. The effectiveness of the proposed scheme is demonstrated using simulations

Keywords : Adaptive control, the cylindrical coordinates transformation, projection algorithm.

I. 서 론

최근 비홀로노믹 구속 조건(Nonholonomic constraint)을 가지는 제어 시스템이 로봇 분야를 중심으로 많이 연구되고 있다. 비홀로노믹 시스템은 가제어성(Controllable)이지만 연속 시불변 상태 피드백(Continuous time invariant state feedback)으로는 안정화 시킬 수 없다[3]. 이러한 문제에 대하여 몇 가지 제어 기법들이 연구되어 왔다. 불연속 시불변 제어(Discontinuous time invariant control)는 지수적 수렴(Exponential convergence)을 보장 하지만, 불연속점(구간)에 대해서는 스위칭 제어(Switching control)를 사용해야 한다. 한편, 시변 안정화 제어(Time varying stabilization control)는 수렴성이 떨어지고 진동이 존재하지만 스위칭 기법을 사용하지 않아도 된다. 이종 안정화 제어(Hybrid stabilization control)는 이산 사건 형태(Discrete event features)와 연속 시간 형태(Continuous-time features)가 혼합된 제어로써 여러 개의 연속 시간 제어기(Continuous-time controllers) 사이를 이산 시간 순간(Discrete time instant)에 스위칭 하는 것을 기본으로 한다[4].

이동로봇의 질량이나 바퀴 또는 바퀴간 거리에 의해 정해지는 파라미터는 모델링 과정에서 정확하지 않을 수 있다. [1]에서는 파라미터를 포함한 운동방정식(kinematics)을 원통 좌표계를 이용하여 설계하였다.

본 논문은 운동방정식이 비선형이지만 파라미터에 대하여 선형으로 표현되는 것을 이용하여 불확실한 파라미터를 추정하고, 상태 피드백(state feedback)과 함께 제어 입력에 사용하여 이동로봇이 원점으로 가도록 하는 것이 목적이다. 리아프노프 안정도 이론을 이용하면 적절한 제어 입력과 파라미터 추정 법칙을 유도할 수 있다. 이 때 파라미터 추정법칙은 프로젝션 알고리

즘(Projection algorithm)을 사용하여 파라미터 추정치가 0보다 큰 특정구간에 존재하도록 해야 한다[6]. 마지막으로 Barbarlat의 보조정리를 이용하여 시스템이 안정함을 보인다[8].

II. 불확실한 파라미터를 갖는 이동로봇의 모델링

비홀로노믹 구속방향으로 미끄러짐이 발생하지 않는다는 가정 하에 unicycle형의 이동로봇의 운동방정식은 다음과 같다[1],[2],[7].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1 w_1 \cos \theta \\ \dot{x}_2 &= p_1 w_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= p_2 w_2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 제어 입력(control input)은 w_1, w_2 이고 x_1, x_2 는 이동로봇의 직교좌표계에서 좌표이며, θ 는 (x_1, x_2) 점에서 x_1 축에 대한 이동로봇의 방향각이다. p_1 과 p_2 는 양의 파라미터이다. 식 (1)에 대한 제어기 설계는 대부분 다음과 같은 좌표변환을 이용한다.

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ y &= \theta \\ z &= 2(x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta) - \theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)를 이용하면 식 (1)을 다음과 같은 Brockett 비홀로노믹 적분기 형태로 표현할 수 있다[3].

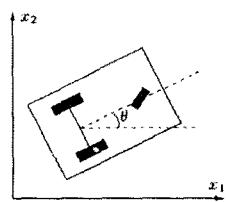


그림 1 이동로봇의 모델링

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{z} &= xv - yu\end{aligned}\tag{3}$$

이 때, u, v 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u &= p_1 w_1 - p_2 w_2 \xi \\ v &= p_2 w_2\end{aligned}\tag{4}$$

여기서 ξ 는 식 (2)에서 $x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta$ 를 치환한 변수이다. 식 (4)에서 제어 입력 w_1 과 w_2 를 다시 쓰면,

$$w_1 = \frac{u + v\xi}{p_1}, \quad w_2 = \frac{v}{p_2}\tag{5}$$

와 같다. 파라미터 p_1 과 p_2 가 불확실한 경우 추정된 파라미터를(the estimated parameters) 사용한 제어 입력은 다음과 같다.

$$w_1 = \frac{\hat{u} + \hat{v}\xi}{\hat{p}_1}, \quad w_2 = \frac{\hat{v}}{\hat{p}_2}\tag{6}$$

여기서 \hat{p}_1 과 \hat{p}_2 는 추정된 파라미터이다. 이 때 파라미터의 오차는 다음과 같다.

$$\tilde{p}_1 = \hat{p}_1 - p_1, \quad \tilde{p}_2 = \hat{p}_2 - p_2\tag{7}$$

III. 원통 좌표계를 이용한 제어기 설계

x, y 를 다음과 같이 원통좌표계에서 표현하면,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \psi \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \neq 0 \\ y &= r \sin \psi\end{aligned}\tag{8}$$

와 같고[1], 식 (8)을 미분하면 식 (3)에 의하여

$$\begin{aligned}u &= \dot{r} \cos \psi - r \dot{\psi} \sin \psi \\ v &= r \sin \psi + r \dot{\psi} \cos \psi\end{aligned}\tag{9}$$

와 같고, 여기서 $\dot{r} = \bar{u}$, $r\dot{\psi} = \bar{v}$ 라고 하면 u, v 는

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}\tag{10}$$

와 같이 \bar{u}, \bar{v} 를 ψ 만큼 회전시킨 형태이다. \bar{u}, \bar{v} 를 이용하면 식 (3)은 다음과 같이 r, ψ, z 의 식으로 표현된다.

$$\dot{r} = \bar{u}, \quad \dot{\psi} = \frac{\bar{v}}{r}, \quad \dot{z} = r\bar{v}\tag{11}$$

적절한 \bar{u}, \bar{v} 는 리아프노프 관점에서 점근적으로 수렴한다. 예를 들면,

$$\bar{u} = -r^2, \quad \bar{v} = -z \quad (r_0 \neq 0)\tag{12}$$

와 같은 입력은 $\dot{\psi} = c$ (상수)를 만족한다. 이것은 r 과 z 가 일정한 비를 유지하며 지수적으로 감소하여 시간이 무한대로 감에 따라 r 과 z 가 0으로 수렴하게 된다.

이것은 r 의 초기값(r_0)이 0이 아닐 때만 성립한다. (6)의 제어입력을 사용하여 식 (11)에 대한 에러모델로 표현하게 되면,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \bar{u} - \frac{\tilde{p}_1}{\hat{p}_1} \left(\bar{u} \frac{x^2}{r^2} - \bar{v} \frac{xy}{r^2} + \bar{u} \frac{xy}{r^2} \xi + \bar{v} \frac{x^2}{r^2} \xi \right) \\ &\quad - \frac{\tilde{p}_2}{\hat{p}_2} \left(\bar{u} \frac{y^2}{r^2} + \bar{v} \frac{xy}{r^2} - \bar{u} \frac{xy}{r^2} \xi - \bar{v} \frac{x^2}{r^2} \xi \right) \\ \dot{z} &= \bar{r}v + \frac{\tilde{p}_1}{\hat{p}_1} \left(\bar{u} \frac{xy}{r} - \bar{v} \frac{y^2}{r} + \bar{u} \frac{y^2}{r} \xi + \bar{v} \frac{xy}{r} \xi \right) \\ &\quad - \frac{\tilde{p}_2}{\hat{p}_2} \left(\bar{u} \frac{xy}{r} + \bar{v} \frac{x^2}{r} + \bar{u} \frac{y^2}{r} \xi + \bar{v} \frac{xy}{r} \xi \right)\end{aligned}\tag{13}$$

와 같다. 식 (13)으로부터 분모의 r 로 인해 발산하지 않도록 \bar{u}, \bar{v} 가 고려되어야 하며 파라미터 추정 법칙은 이동로봇의 상태를 고려하여 설계되어야 한다.

IV. 적응 알고리즘

식 (3),(4)은 다음과 같이 파라미터 p_1, p_2 에 대하여 선형적으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \xi \\ 0 & w_2 \\ -w_1 y & w_2(x + y\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}\tag{14}$$

(6)의 제어입력을 사용하면 이동로봇의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{X} = \Phi^T \Theta\tag{15}$$

이 때 X, Φ^T, Θ 는 다음과 같다.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \Phi^T = \begin{bmatrix} \frac{u + v\xi}{\hat{p}_1} & -\frac{v\xi}{\hat{p}_2} \\ 0 & \frac{v}{\hat{p}_2} \\ -\frac{(u + v\xi)y}{\hat{p}_1} & \frac{v(x + y\xi)}{\hat{p}_2} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

식 (15)에 대한 상태 추정 방정식과 상태 오차 방정식은

$$\dot{\hat{X}} = \Phi^T \hat{\Theta} + \Omega E\tag{16}$$

$$\dot{E} = \Phi^T \tilde{\Theta} + \Omega E\tag{17}$$

$$\Omega^T P + P \Omega = -Q$$

와 같다. 여기서 P, Q 는 양정치 행렬(positive definite matrix)이고, $\hat{\Theta}$ 는 추정된 파라미터 벡터이고, $\tilde{\Theta}$ ($=\hat{\Theta} - \Theta$)는 파라미터 오차 벡터이다. E 는 $\hat{X} - X$, 즉 상태 오차 벡터이다.

정리 1. 식 (15)~(17)에 대하여 아래의 파라미터 추정 법칙과 제어 입력은 (12)와 같은 상태 제한 입력에 대하여 시간이 무한대일 때 이동로봇 시스템의 상태 X 가 0으로 수렴하도록 한다.

$$\dot{\hat{\Theta}} (= \dot{\tilde{\Theta}}) = -I\Phi(P\Theta - \gamma X)$$

$$w_1 = \frac{u + v\xi}{\hat{p}_1}, \quad w_2 = \frac{v}{\hat{p}_2}$$

(증명)

파라미터 추정 법칙을 구하기 위하여 다음과 같은 $X, E, \tilde{\Theta}$ 에 대한 리아프노프 함수를 이용한다.

$$V(X, E, \tilde{\Theta}) = \gamma X^T X + E^T P E + \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} \quad (18)$$

여기서 γ 는 양의 스칼라 이득이며, Γ 는 양정치 대칭행렬(positive symmetric matrix)이다. 먼저 리아프노프 후보 함수의 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(X, E, \tilde{\Theta}) &= 2\gamma X^T \Phi^T \tilde{\Theta} - E^T Q E + 2\tilde{\Theta}^T (\Gamma^{-1} \tilde{\Theta} + \Phi P E - \gamma \Phi X) \\ &= 2\gamma X^T \Phi^T \tilde{\Theta} - E^T Q E + 2\tilde{\Theta}^T (\Gamma^{-1} \tilde{\Theta} + \Phi P E - \gamma \Phi X) \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서 $-E^T Q E \leq 0$ 는 항상 성립하며 등호는 $E = 0$ 일 때 성립한다. 파라미터 추정 법칙은 $\tilde{\Theta}$ 에 관한 식으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\Gamma \Phi (P E - \gamma X) \quad (20)$$

이 때, $\tilde{\Theta}$ 가 0에 가까워질수록 w_1, w_2 의 값이 발산할 수 있으므로 $\tilde{\Theta}$ 는 0보다 큰 특정 구간의 값이 되기 위해 프로젝션 알고리즘(Projection Algorithm)[6]을 적용하면 다음의 성질을 얻는다.

$$-\tilde{\Theta} \Gamma^{-1} \text{Proj} \Gamma \Phi (P E - \gamma X) \leq -\tilde{\Theta} \Gamma^{-1} \Gamma \Phi (P E - \gamma X)$$

또한, 식 (19)에서 $2\gamma X^T \Phi^T \tilde{\Theta}$ 을 구하면

$$\begin{aligned} 2\gamma X^T \Phi^T \tilde{\Theta} &= 2\gamma [x \ y \ z][u \ v \ x \ v - y \ u]^T \\ &= 2\gamma [xu + yu + z(xv - yu)] \quad (21) \\ &= 2\gamma r(\bar{u} + \bar{z}\bar{v}) \end{aligned}$$

와 같다. 식 (21)은 (12)와 같은 상태 케환 입력에 대해서 아래와 같이 항상 0보다 작게 된다.

$$-2\gamma r(r^2 + z^2) < 0 \quad (r_0 > 0) \quad (22)$$

식 (22)는 r_0 이 0보다 큰 경우 항상 $\dot{V}(X, E) < 0$ 을 만족하지만 이것은 단지 $V(X, E)$ 가 감소함수이고 유한한 값임을 의미한다. Barbalat의 보조정리를 이용하면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\dot{V}(X, E) \rightarrow 0$ 을 보일 수 있다.

*Barbalat의 보조정리(Lyapunov-like Lemma[8])

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $\dot{V} < \infty$ 이면, $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\dot{V} \rightarrow 0$ 이다.

이 정리를 이용하기 위한 $\dot{V}(X, E)$ 는 다음과 같다.

$$\dot{V}(X, E)$$

$$\begin{aligned} &= 2\gamma [(\bar{u} + \bar{z}\bar{v})\dot{r} + \bar{z}\bar{v}\dot{r} + (\bar{u} + \bar{z}\bar{v})\dot{r}] + \dot{E}^T Q E + E^T Q \dot{E} \\ &= 2\gamma [\bar{u}^2 + \bar{v}^2 r^2 + (\bar{u} + \bar{z}\bar{v})\dot{r}] + 2E^T Q(\Phi^T \tilde{\Theta} + \Omega E) \\ &\quad - 2\gamma \frac{\hat{p}_1}{p_1} \left(\bar{u}^2 \frac{x^2}{r^2} + \bar{v}^2 y^2 - \bar{u}\bar{v} \frac{xy}{r^2} - \bar{u}\bar{v}xy + \bar{u}^2 \frac{xy}{r^2} \xi + \bar{u}\bar{v} \frac{x^2 z}{r^2} \xi \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}\bar{v} \frac{x^2 z}{r^2} - \bar{v}^2 \frac{xyz}{r^2} + \bar{u}\bar{v} \frac{xyz}{r^2} \xi + \bar{v}^2 \frac{x^2 z}{r^2} \xi + \bar{u}\bar{v} y^2 \xi + \bar{v}^2 xy \xi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 2\gamma \frac{\hat{p}_2}{p_2} \left(\bar{u}^2 \frac{y^2}{r^2} + \bar{v}^2 x^2 + \bar{u}\bar{v} \frac{xy}{r^2} + \bar{u}\bar{v}xy - \bar{u}^2 \frac{xy}{r^2} \xi - \bar{u}\bar{v} \frac{x^2}{r^2} \xi \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}\bar{v} \frac{y^2 z}{r^2} + \bar{v}^2 \frac{xyz}{r^2} - \bar{u}\bar{v} \frac{xyz}{r^2} \xi - \bar{v}^2 \frac{x^2 z}{r^2} \xi + \bar{u}\bar{v} y^2 \xi + \bar{v}^2 xy \xi \right) \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에서 $\left| \frac{x^2}{r^2} \right| \leq 1, \left| \frac{y^2}{r^2} \right| \leq 1, \left| \frac{xy}{r^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ 은 항상 성립

하므로, $\frac{\hat{p}_1}{p_1} < \infty, \frac{\hat{p}_2}{p_2} < \infty, \bar{u} < \infty, \bar{v} < \infty$ 이면,

$\dot{V}(X, E) < \infty$ 이며, 이것은 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\dot{V}(X, E) \rightarrow 0$ 이므로, 결국 $X \rightarrow 0$ ($r_0 > 0$)을 알 수 있다. 따라서 식 (19)에서 γ 가 0이라면 $t \rightarrow \infty$ 에서 $X \rightarrow 0$ 임을 보일 수 있지만, 이와 같이 $\gamma \neq 0$ 인 경우에 대해서는 파라미터 추정법칙인 식 (20)과 제어입력이 (6)과 같은 경우에 상태 케환 입력의 식 (12)는 X 가 0으로 점근적으로 수렴하도록 한다.

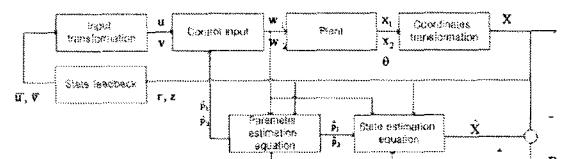


그림 2 파라미터 추정 알고리즘을 이용한 이동로봇 시스템의
블록선도

V. 모의실험

초기 위치	$x_1(0) = 5, x_2(0) = 1, \theta(0) = \pi/3$
실제 파라미터	$p_1(t) = 1, p_2(t) = 1$
추정 파라미터	$\hat{p}_1(0) = 1.5, \hat{p}_2(0) = 2$
상태 케환 입력	$\bar{u} = -r^2, \bar{v} = -z$
Γ 이득	$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
γ 이득	$\gamma = 0, \gamma = 0.5$

표 1 모의실험을 위한 실험 조건

모의실험은 γ 를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우에 대한 결과를 보여준다. 여기에 사용된 프로젝션 알고리즘의 불록집합(Convex set) S 는 다음과 같다[6].

$$S = \{\Theta \in R^2 | g(\Theta) \leq 0\}$$

$$\text{s.t } g(\Theta) = (\hat{\Theta} - \Theta^*)^T (\hat{\Theta} - \Theta^*) - M^2$$

여기서 Θ^* 과 M 은 $\Theta^* = [2 \ 2], M = \pm [1.5 \ 1.5]^T$ 이다.

$g(\Theta)$ 는 스칼라(scalar) 함수이고, Θ^* 는 공정 값(nominal value)이고, M 은 Θ^* 로부터 떨어진 거리의 벡터이며, $\hat{\Theta}$ 는 $\Theta \pm M$ 사이에 존재하게 한다. 그림 3, 4($\gamma = 0$)는 파라미터 오차가 남아있으면 r 은 0으로 수렴하지만 z 가 수렴하

지 못하는 경우이다. 그림 5, 6은 $\gamma = 0.5$ 일 때, 파라미터 추정이 $\gamma = 0$ 인 경우보다 잘 되고, r, z 모두 수렴함을 볼 수 있다.

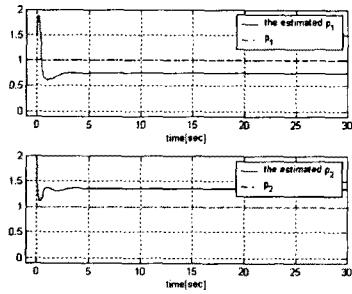


그림 3 $p_1, \hat{p}_1, p_2, \hat{p}_2$ ($\gamma = 0.5$)

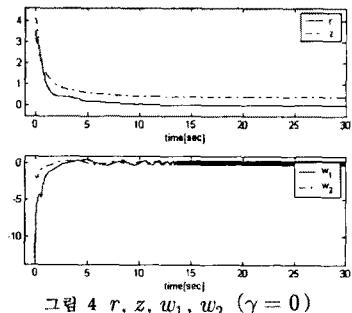


그림 4 r, z, w_1, w_2 ($\gamma = 0$)

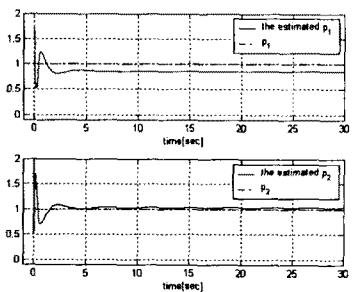


그림 5 $p_1, \hat{p}_1, p_2, \hat{p}_2$ ($\gamma = 0.5$)

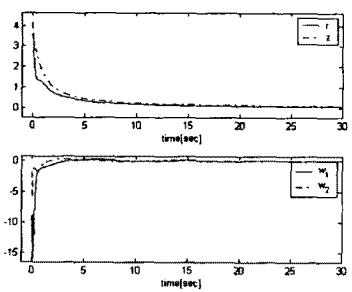


그림 6 r, z, w_1, w_2 ($\gamma = 0.5$)

VI. 결론

본 논문은 파라미터를 추정하여 제어입력에 사용하고, 입력이 발산하는 것을 막기 위해 프로젝션 알고리즘을 사용한다. 또한 리아프노프 안정도 이론을 이용한 파라미터 추정 법칙과 적절한 상태 케환 입력에 대하여($r_0 > 0$) $\dot{V} < 0$ 과 Barbarat 보조정리로부터 $\dot{V} \rightarrow 0$ 을 만족함으로써 결국 X 가 원점으로 수렴함을 증명하였다.

본 논문은 기존의 것과 달리 백스텝핑(Backstepping) 기법과 상태 스케일링(State scaling)을 사용하지 않고도 원통 좌표계로 변환된 입력을 사용하면 시스템을 안정화하는 파라미터 추정 법칙이 쉽게 설계된다는 점에서 의미가 있다[2],[7]. 그러나 γ 의 값을 어떻게 결정하느냐에 대한 문제는 아직 다루지 않았다. 본 논문에서는 실제 상태(x_1, x_2, θ)에 대하여 지수적인 수렴이 보장되는 것이 아니며 x_2 축을 중심으로 무한히 진동하면서 원점으로 접근적인 수렴을 하기 때문에 실제의 경우(Practical case)를 고려할 필요가 있다[1]. 특히 ψ 의 특성, 즉 r 이 매우 작고 z 가 큰 경우에 나타나는 문제점을 해결하기 위한 방안이 요구된다.

참고 문헌

- [1] J.P. Hespanha, D. Liberzon, A.S. Morse, "Logic based switching control of a nonholonomic systems with parametric modeling uncertainty," *Systems & Control Letters*, vol. 38, pp. 167-177, 1999.
- [2] S.S. Ge, Zhuping Wang, T.H. Lee, "Adaptive stabilization of uncertain nonholonomic systems by state and output feedback," *Automatica*, vol. 39, pp. 1451-1460, 2003.
- [3] R.W. Brockett, "Asymptotical stability and feedback stabilization, in: Differential Geometric Control Theory," Birkhäuser, Boston, pp. 181-191, 1983.
- [4] I. Kolmanovsky, N.H. McClamroch, "Developments in nonholonomic control problems," *IEEE Control systems Magazine*, vol. 15, no. 6, pp. 20-36, 1995.
- [5] D.-K. Lee, T.-W. Yoon, B. Lee and G.-T. Park, "Adaptive Nonlinear Control of a Power System," In *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pp 1240-1244, Italy, 1998.
- [6] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, "Nonlinear and adaptive control design," JOHN WILEY & SONS, INC. 1995.
- [7] A. Tayerbi, A. Rachid, "Adaptive controller for nonholonomic mobile robots with matched uncertainties," *Advanced Robotics*, vol. 14, no. 2, pp. 105-118, 2000.
- [8] J.E. Slotine, W. Li, "Applied nonlinear control," Prentice-Hall. Inc. 1991.