

슬라이딩 모드를 이용한 견실 최적 제어기 설계†

Design of Robust, Optimal Controller using Sliding Mode

변지영*, 유관호**

(Ji-Young Byun and Kwan-Ho You)

* 성균관대학교 정보통신공학부(전화: (031) 290-7984, E-mail: mam1203@skku.edu)

** 성균관대학교 정보통신공학부(전화: (031) 290-7148, E-mail: khyou@ece.skku.ac.kr)

Abstract : The general time optimal control law provides the optimal solution for a minimum time control problem. But in most real systems with disturbances and model uncertainties, the time optimal control law leads to chattering effect. This chattering effect can cause the system to be unstable. Therefore, we propose a robust optimal control algorithm for the nonlinear second order systems with model uncertainty. The proposed algorithm is combined with bang-bang control and sliding mode control. Thus the proposed algorithm has two state space regions to implement to control algorithm. In each region, the appropriate linear or nonlinear feedback control law is used satisfying the dynamic system equations. Simulation results show the superiority of the proposed controller in comparison with pure time optimal control(bang-bang control).

Keywords : Bang-bang control, sliding-mode control, nonlinear systems, switch curve.

1. 서론

최적 시간 제어 이론에서 뱅뱅 제어기는 최단 시간 제어를 위한 해답을 제공한다. 그러나 불확실한 매개 변수를 포함하는 시스템에 뱅뱅 제어를 사용했을 경우, 상태는 목표점으로 정확히 수렴하지 않고 그 주위에서 진동하게 된다. 이런 현상을 떨림 효과(chattering effect)라 한다. 이런 떨림 효과는 시스템을 불안정하게 만드는 원인이 되므로 뱅뱅 제어기는 불확실한 매개변수를 포함한 시스템에 적용되기 어렵다. 따라서, 최적 시간 제어를 사용하여 시스템의 안정성과 견실성을 증가시키기 위해 많은 연구가 진행되었다[5]-[9]. 대상 시스템의 강인성을 높이기 위해 가변구조제어이론(Variable Structure System)[6]-[8]이 연구되었다. 가변구조제어이론은 상태 공간 내에서 미리 정의된 슬라이딩 면을 따라 시스템의 상태를 목표점에 도달하게 하는 제어 방법이다. 슬라이딩 면의 기울기에 따라서 시스템 상태가 목표점에 도달하는 시간이 달라진다. 슬라이딩 면의 기울기를 작게 함으로써 시스템의 강인성 및 안정성은 증가되었지만, 시스템 상태가 목표점에 도달하는 시간은 길어지게 되었다.

제안된 제어기는 뱅뱅 제어기와 슬라이딩 모드 제어가 결합된 형태이다. 뱅뱅 제어를 사용하여 최단 시간 내에 시스템 상태를 목표점 근처까지 이동시킨다. 그리고 singular 해법을 슬라이딩 면으로 사용하는 슬라이딩 모드 제어를 사용하여 떨림 효과를 없애고

시스템 상태를 목표점에 정확히 도달하게 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 뱅뱅 제어기 그리고 슬라이딩 모드 제어기에 관해서 살펴본다. 3장에서는 제안된 제어 알고리즘에 대해 논의하며, 4장에서는 제안된 알고리즘을 이용하여 시스템에 어떻게 적용되는지 시뮬레이션 결과를 보여줄 것이다. 마지막으로 5장에서는 논문의 결론에 대해 간단히 정리하였다.

II. 최적 시간 제어

1. Bang-bang control

다음과 같은 비선형 이차 시스템을 대상으로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, \Delta(x_1, x_2)) + u \\ |u| &\leq u_{\max} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$ 는 상태 변수, $f(\cdot)$ 는 주어진 시스템 방정식, Δ 는 불확실한 매개 변수, 그리고 u 는 제어 입력이다. 시스템 방정식은 아래와 같이 표현된다고 가정한다.

$$f(x_1, x_2, \Delta(x_1, x_2)) = f(x_1, x_2) + \delta(x_1, x_2) \quad (2)$$

$\hat{f}(\cdot)$ 는 $f(\cdot)$ 를 근사화한 식이며, δ 는 불확실한 매개 변수이다. 이 영역에서 우리는 다음과 같은 비용함수를 고려한다.

† 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R05-2003-0100-12262-0) 지원으로 수행되었음.

$$J_1 = \int_0^t dt \quad (3)$$

제어 입력 u 는 시스템의 임의의 초기 상태에서 최소 시간에 원하는 상태로 시스템을 움직인다. 이와 같은 시간 최적제어 이론은 이전부터 많이 연구되어 왔다[1]-[2]. 제어 입력의 크기가 정해져 있을 경우, 하나의 구간 내에서 비용함수를 최소로 하는 제어 입력을 구하는 것이 뱅뱅 제어의 원리이다.

시스템의 상태 변수 값에 따라 제어 입력은 $+u_{sat}$ 또는 $-u_{sat}$ 의 값으로 변한다. 제어 입력 u 값의 부호가 바뀌는 스위칭 시간을 찾기 위해서 아래와 같이 해밀토니안(Hamiltonian)을 정의한다.

$$H_1(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 1 + \eta_1 x_2 + \eta_2 \dot{f}(x_1, x_2) + \eta_2 u \quad (4)$$

여기서 η_1 과 η_2 는 라그랑지 승수이다. Pontryagin의 최대치 정리[4]로부터 제어 입력은 비용함수를 최소로 유지하며 시스템의 상태를 원하는 상태에 도달하게 한다.

$$u^* = -u_{sat} \operatorname{sgn}(\eta_2^*) \quad (5)$$

η^* 는 주어진 해밀토니안 방정식(4)을 최소화 시키는 최적의 해이다. 제어 입력의 변화는 η^* 이 영이 될 때 발생하기 때문에 $\eta^* \equiv 0$ 이 되면, 시간 최적 제어기(u^*)를 적용할 수 없다. 이런 특이한 조건(singular condition)에서 최적해를 구하는 방법에 대해서는 다음 절에서 자세히 논의할 것이다. 이때 $\eta^* \equiv 0$ 이 되는 함수를 스위치 곡선이라 한다.

2. Singular solution

뱅뱅 제어는 시스템에 추가되는 예측할 수 없는 외란이나 불확실성에 민감하게 반응하므로 실제로 사용되기 어렵다. 특히, 평형점에 가까이 도달할 때 시스템에 추가된 불확실한 매개변수 때문에 제어입력은 스위치 곡선 상에서 한점에서 다른 한점에서의 변화가 지속적으로 발생하는데 이런 현상을 떨림(chattering) 효과라고 한다. 떨림 효과를 감소시키기 위해서 평형점인 원점 주위에서 아래와 같은 비용함수를 설정한다.

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^t (x_1^2 + x_2^2) dt \quad (6)$$

실제 시스템에서 충분히 발생 가능한 떨림 현상은 선형 피드백 제어를 사용함으로써 줄일 수 있다. 다음과 같은 평형점이 존재한다고 가정하자.

$$0 = \dot{f}(x_1^0, x_2^0) + u^0 \quad (7)$$

평형점에서 비선형 시스템의 선형화는 아래와 같이 나타내어진다.

$$\dot{\mathbf{x}}_s = A\mathbf{x}_s + B\mathbf{u}_s \quad (8)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{u}_s = u - u^0$$

계산상의 편의를 위해서, 평형점(\mathbf{x}^0)을 원점으로 한다. 변경된 비용함수의 해밀토니안은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_2(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \eta_1 x_2 + \eta_2 (-a_1 x_1 - a_2 x_2) \\ &\quad + \eta_2 u \\ &= u\Phi(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) + \Psi(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\Phi = \eta_2$$

$$\Psi = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \eta_1 x_2 + \eta_2 (-a_1 x_1 - a_2 x_2) \quad (10)$$

앞 절에서 언급한 singular condition은 $\Phi(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ 이 영이 될 때 발생한다. Transversality condition으로부터 아래의 시스템 상태 변수 사이의 관계를 유도해 낼 수 있다[5]. $\Phi = \dot{\Phi} = \ddot{\Phi} = 0$, $\Psi = \dot{\Psi} = \ddot{\Psi} = 0$ 이므로 상태 변수 사이의 관계는 아래와 같이 나타난다.

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad (11)$$

위 식은 $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ 2개의 singular sub-arc를 가지게 된다. $x_1 - x_2 = 0$ 는 시스템을 불안정하게 하므로, 최적해가 될 수 없다. 따라서 singular condition에서 최적해는 $x_1 + x_2 = 0$ 가 된다.

아래의 singular surface를 다음 절에서 소개할 슬라이딩 모드 제어기의 슬라이딩 면으로 둘 것이다.

$$|x_1| \leq \left| \frac{u_{sat}}{1 + a_1 - a_2} \right|, \quad x_1 + x_2 = 0 \quad (12)$$

3. Sliding mode control

비선형 시스템의 안정성 및 견실성을 개선하기 위해 슬라이딩 모드 제어를 사용한다. 슬라이딩 모드 제어는 미리 정의되어 있는 슬라이딩 면 $s(x_1, x_2) = 0$ 을 따라서 시스템의 상태 변수를 움직이게 한다.

$$s(x_1, x_2) = x_2 + c_1 x_1 \quad (13)$$

뱅뱅 제어를 사용할 수 없는 singular condition에서 슬라이딩 모드 제어를 사용하므로, 제안되는 제어기에서 슬라이딩 면은 singular 최적해로 정의한다.

Lyapunov 함수를 $V = \frac{1}{2}s^2$ 라고 두고, 이를 미분한다.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s[\dot{x}_2 + c_1\dot{x}_1] \\ &= s[\dot{f}(x_1, x_2) + \Delta(x_1, x_2) + u + c_1x_2]\end{aligned}\quad (14)$$

따라서 슬라이딩 모드 제어기의 최적 제어 입력은 다음과 같다.

$$u^* = -\dot{f}(x_1, x_2) - c_1x_2 - \gamma \text{sat}(s, \epsilon) \quad (15)$$

여기서, $\gamma = \xi + \bar{\delta}$, $\xi > 0$, $\dot{V} \leq -\xi|s| \leq 0$

$$\text{sat}(s, \epsilon) = \begin{cases} 1, & s > \epsilon \\ s/\epsilon, & -\epsilon \leq s \leq \epsilon \\ -1, & s < -\epsilon \end{cases} \quad (16)$$

III. 제어기 설계

제안된 제어기는 2개의 다른 제어기로 구성되어 있으므로 2개의 시스템 상태 공간 영역을 가진다. 이 상태 영역을 그려보면 그림 1과 같다.

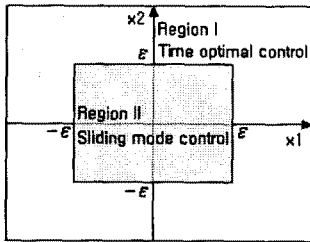


그림 1. 시스템 상태 공간 정의.

Fig 1. Definition of state space regions.

그림 1에서 ϵ 는 singular 해법으로부터 결정된다.

$$\epsilon = \left| \frac{u_{sat}}{1 + a_1 - a_2} \right| \quad (17)$$

상태 공간 영역 I에서는 비용함수 J_1 를 이용하는 뱁뱁 제어기를 사용하고, 영역 II에서는 슬라이딩 모드 제어기를 사용한다. 각 영역에 따라 해당 제어기를 사용함으로써 시스템 상태 변수가 목표점에 가까이 갈수록 발생하는 진동을 없애고 목표점에 정확히 찾아 갈 수 있게 된다.

제안된 제어기는 아래와 같이 정리 할 수 있다.

$$u^* = \begin{cases} -\dot{f}(x_1, x_2) - c_1x_2 - \gamma \text{sat}(s, \epsilon), & \text{for } |x_1|, |x_2| \leq \left| \frac{u_{sat}}{1 + a_1 - a_2} \right| \\ -u_{sat} \text{sgn}(\eta_2^*), & \text{Otherwise.} \end{cases} \quad (18)$$

IV. 시뮬레이션

다음과 같은 불확실한 매개변수를 가지고 있는 비선형 이차 시스템(Pendulum system)을 고려하여 제안된 알고리즘을 적용한다[2].

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin\theta = M(t) \quad (19)$$

위의 식을 정리하여 불확실한 매개변수를 포함한 비선형 시스템의 방정식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= z \\ \dot{z} &= -\sin\theta - \alpha z + \delta(\theta, z) + \beta(t)\end{aligned}\quad (20)$$

여기서 $\delta(\theta, z)$ 는 시스템에 추가된 불확실한 매개변수로 $\delta(\theta, z) = 0.1\sin(z)$ 로 둔다.

$|\beta(t)| \leq 4$, $\alpha = 2.5$ 로 정하고, 이 비선형 시스템의 목표점은 안정상태인 $(\theta, z) = (0, 0)$ 로 한다.

상태 공간 영역 I에서 뱁뱁 제어에 의해 구해진 최적의 제어입력은 아래와 같다.

$$\beta^*(t) = -\text{sgn}(\eta_2^*) \quad (21)$$

여기서 η_2^* 는 Pontryagin의 최대치 정리[4]를 만족하는 스위치 함수이다. 영역 II에서는 슬라이딩 모드 제어가 작동되므로 상태 변수 목표치 근처에서 제안된 최적의 제어 입력은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\beta^*(t) &= \sin\theta + 2.5z - z - (\xi + 0.1)\text{sat}(s, 1.5) \\ s &= \theta + z, \quad |\theta|, |z| \leq 1.6\end{aligned}\quad (22)$$

여기서 s 는 singular surface로 나타내어진 슬라이딩 면이다.

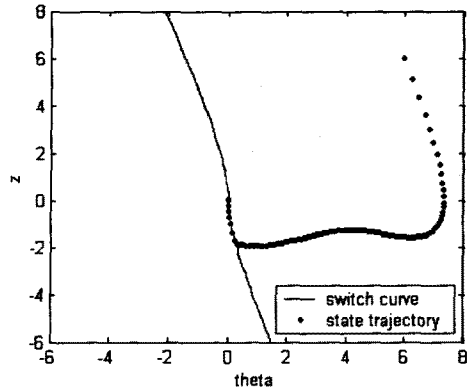


그림 2. 상태 공간에서 스위치 곡선과 상태 변수 궤적.

Fig 2. Switch curve and state trajectory in state space.

시뮬레이션 결과는 제안된 제어기가 시스템에 포함된 불확실성에 대해 강인성을 가지며, 동시에 시간 최적 제어의 특성을 가짐을 보여준다. 그림 2는 상태공간영역에서 스위치 곡선과 상태변수의 궤적을 보여준다. 시스템의 초기 상태에서는 뱅뱅 제어가 작동하여 최단 시간을 가지고 상태 변수가 목표점으로 이동한다. 상태 변수가 목표점에 근접하게 되면, 제안된 제어기는 singular 최적해로 정의된 슬라이딩 면으로 상태변수를 움직이게 함으로써, 목표점으로 정확히 수렴하게 된다.

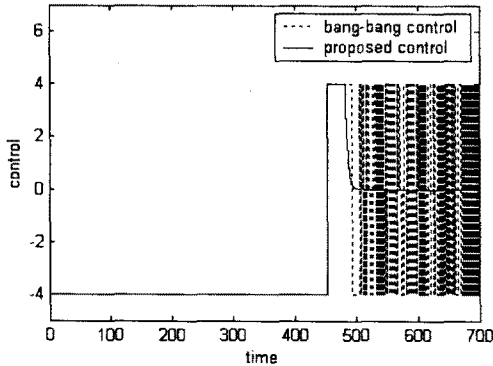


그림 3. 뱅뱅 제어기와 제안된 제어기의 제어 입력 비교.

Fig 3. Control law for bang-bang control and proposed control.

그림 3은 뱅뱅 제어기의 제어 입력과 제안된 제어기의 제어 입력의 변화를 보여준다. 뱅뱅 제어기만을 사용한 경우 원점 근처에서 발생하는 제어입력의 떨림 현상이 나타남을 알 수 있다. 그러나 제안된 제어기를 사용하게 되면 떨림 현상이 제거되었음을 알 수 있다.

V. 결론

뱅뱅 제어기는 불확실한 매개변수를 포함한 시스템에서 불안정하고 외부 외란에 민감하다는 단점 때문에 실제 시스템에서 사용이 제한된다. 본 논문에서는 뱅뱅 제어기를 사용함으로써 나타나는 떨림 현상을 제거하기 위한 건설 최적 제어기를 제안한다. 제안된 제어기는 뱅뱅 제어기와 슬라이딩 모드 제어기를 결합한 형태로 이루어져 있다. 뱅뱅 제어기를 사용할 수 없는 singular condition에서 최적해를 구한 후 이를 슬라이딩 모드 제어기의 슬라이딩 면으로 사용한다. 시뮬레이션을 통하여 제안된 제어기의 효율성이 증명되었다. 제안된 제어기는 뱅뱅 제어기를 기본으로 하고 있기 때문에, 빠른 추적 시간을 가짐과 동시에 안정성과 강인성이 향상됨을 알 수 있다.

- [1] F.L. Lewis and V.L. Syrmos, *Optimal Control*, Wiley, N. Y., 1995.
- [2] E.B. Lee and L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley, N. Y., 1967.
- [3] D.J. Bell and D.H. Jacobson, *Singular Optimal Control Problem*, Academic Press, London, 1975
- [4] L.I. Rozonoer, "Pontryagin Maximum principle in the Theory of Optimum Systems," *Automation and Remote Control*, vol.20, 1959, pp. 1288-1302.
- [5] C.K. Wellington and E.B. Lee, "Robust Near Time Optimal Dual Mode Control of Nonlinear Second Order Systems," *Technical Paper, University of Minnesota*, 1998.
- [6] V.I. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, N. Y., 1992.
- [7] V.I. Utkin, "Variable Structure System with Sliding Modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 22 1977, pp. 212-222.
- [8] Y. Li, "Model Reference Sliding Control of Non-linear System," *Proc. 31th IEEE Conf, Decision Contr.*, 1992, pp. 289-290.
- [9] J.J. Slotine and S.S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surface, with application to robot manipulators," *Int. J. Contr.*, vol. 38, no. 2, 1983, pp. 465-492.
- [10] M.J. Davis, "A Property of the Switching Curve for Certain Systems," *International Journal of Control*, vol. 12, no. 3, 1970, pp. 457-463.