

B-Spline 곡면 모델링을 이용한 기하비선형 쉘 유한요소

Shell Finite Element Based on B-Spline Representation for Finite Rotations

노희열* 조맹효**
Roh, Hee-Yuel Cho, Maenghyo

ABSTRACT

A new linkage framework between elastic shell element with finite rotation and computer-aided geometric design (CAGD) for surface is developed in the present study. The framework of shell finite element is based on the generalized curved two-parametric coordinate system. To represent free-form surface, cubic B-spline tensor-product functions are used. Thus the present finite element can be directly linked into the geometric modeling produced by surface generation tool in CAD software. The efficiency and accuracy of the previously developed linear elements hold for the nonlinear element with finite rotations. To handle the finite rotation behavior of shells, exponential mapping in the $SO(3)$ group is employed to allow the large incremental step size. The integrated frameworks of shell geometric design and nonlinear computational analysis can serve as an efficient tool in shape and topological design of surfaces with large deformations.

1. 서 론

지난 20 여 년 동안 수많은 비선형 쉘 유한요소들이 활발히 개발되어왔고 아직도 많은 연구가 이루어지고 있다. 그 중에서 3차원 연속체에서 유도된 쉘 유한요소인 감절점 쉘 유한요소가 수치 해석의 방법으로 널리 사용되어왔다. 쉘 구조물의 선형해석을 Ahmad⁽¹⁾ 등이 감절점 쉘 유한요소로 시작한 이후로 비선형 해석에 이르기까지 많은 연구가 이루어졌다. 감절점 쉘 유한요소가 널리 성공적으로 사용되는 이유는 수치 해석적 측면에서 매우 간단히 다룰 수 있고 또한 C^0 연속성을 요구하기 때문이었다. 그러나 감절점 쉘 요소는 요소내에서의 기하학적인 쉘의 형상을 근사를 통해 보간 하므로 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 쉘을 해석하는데는 효율적이지 않을 수 있다. 그러므로 효율적인 해석을 위해 정확한 기하학적인 형상을 고려한 쉘 이론에 근거한 유한요소의 개발이 수행되어 왔다. 최근의 비선형 쉘 유한 요소는 Cosserat 곡면에 기초한 방법을 사용하고 있는데, 이 방법에서는 쉘 곡면을 2차원의 Cosserat 곡면과 곡면에 수직인 방향 벡터(director vector)로 나누어 생각한다. 방향 벡터를 이용한 방법과 감절점 쉘 요소와의 개념적인 차이는 쉘 곡면의 두께 방향으로의 적분방법에 있다.

* 서울대학교 기계항공공학부 대학원

** 정희원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

이러한 쉘 이론에 기초한 방향 벡터 사용법의 해석 측면에서의 주요 성과는 유한 변위각을 명확하게 다룰 수 있는 점이다. Argyris⁽²⁾의 선구적 연구 이후로 Simo 와 Vu-Quac⁽³⁾, Simo, Fox 그리고 Rifai⁽⁴⁾, Buechter와 Ramm⁽⁵⁾, Brank⁽⁶⁾, Ibrahimbegovic⁽⁷⁾등에 의한 연구가 있다.

본 연구자들에 의해 일반 곡선 좌표계를 사용한 일반 텐서에 기초한 쉘 이론으로부터 선형 쉘 이론으로부터 유한요소가 개발되었고⁽⁸⁾, B-spline 곡면 표현과 연동하는 선형 요소가 개발되었다⁽⁹⁾. 본 연구에서는 B-spline 곡면과 연동하는 큰 회전각 변위를 가지는 쉘 유한요소를 개발하고자 한다. 쉘의 두께가 얇아지면 일어나는 수치적 문제인 전단 변형 잠김현상과 멤브레인 잠김 현상을 저감시키기 위해서 ANS기법을 사용하여 전단 변형 형상과 멤브레인 형상의 잠김을 방지하며 동시에 안정적인 쉘 유한 요소를 개발하였다. 유한요소의 수렴성을 기준에 개발된 다른 유한요소와 비교하고 또한 CAD 시스템을 이용하기 위해 CAD에서 기하학적 모델링을 하고 그 데이터를 이용해서 유한요소에서 바로 해석하여 그 정확도를 살펴보았다.

2. 쉘의 기하학

기하학적으로 정확한 쉘 이론에서는 쉘 곡면은 하나의 방향벡터를 갖는 Cosserat 곡면으로 간주된다. 본 연구에서는 쉘 구조물을 해석하기 위해 쉘의 기준면과 두께방향으로의 독립적인 방향벡터로 나누어 접근하는 하나의 방향벡터 방법을 사용하였다. 방향벡터는 일반적으로 쉘의 중립면에 수직하지는 않는다. 변형전의 변위장은 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{X} = \varphi_0(\xi^1, \xi^2) + \xi \mathbf{T}(\xi^1, \xi^2), \quad \text{with } (\xi^1, \xi^2) \in S, \xi \in [h_0^-, h_0^+] \quad (1)$$

같은 방법으로 변형후의 변위장을 살펴보면 다음과 같다.

$$\mathbf{x} = \varphi_1(\xi^1, \xi^2) + \xi \mathbf{t}(\xi^1, \xi^2), \quad \text{with } (\xi^1, \xi^2) \in S, \xi \in [h_0^-, h_0^+] \quad (2)$$

여기서 S 는 중립면의 매개변수 영역을 나타내고, ξ 는 쉘의 두께를 나타낸다. R^3 영역에 있는 고정 좌표계의 기저벡터 $\{\vec{e}_i\} i=1,2,3$ 이라면, 벡터 \mathbf{X} , \mathbf{T} , \mathbf{x} 와 \mathbf{t} 는 다음과 같이 기저벡터와 성분으로 나누어 쓸 수 있다.

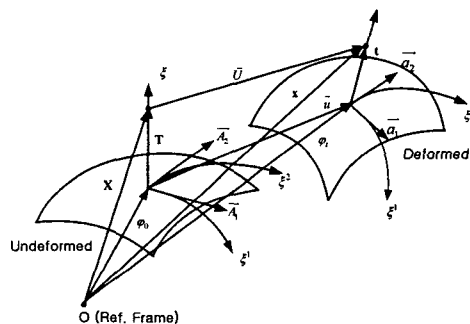


Fig.1 Shell geometry in the undeformed and the deformed configurations

$$\begin{aligned} \vec{X} &= X^i \vec{e}_i, \quad \vec{x} = x^i \vec{e}_i \\ \vec{T} &= T^i \vec{e}_i, \quad \vec{t} = t^i \vec{e}_i \end{aligned} \quad (3)$$

곡면 위의 한점 $X(\xi^1, \xi^2, \xi)$ 는 그림 1에서처럼 나타낼 수 있다. 쉘 곡면에서의 변위장 \vec{U} 는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\vec{U} = \vec{u} + \xi(\vec{t} - \vec{T}) \quad \text{where } \vec{u} = \vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0 \quad (4)$$

2.1 곡면에서의 메트릭 텐서(Metric tensors)

곡면 위의 한점 $X(\xi^1, \xi^2, \xi)$ 의 접평면에서의 공변기저 벡터는

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i}, \quad \vec{G}_i \in T_x S \quad \text{and} \quad \vec{g}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i}, \quad \vec{g}_i \in T_x s, \quad \text{for } i=1,2,3 \quad (5)$$

이고, 여기에 기본 쉘의 기하학적 가정을 도입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \vec{G}_\alpha &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^\alpha} + \xi \frac{\partial \vec{T}}{\partial \xi^\alpha} = \vec{A}_\alpha + \xi \vec{T}_{,\alpha} \\ \vec{g}_\alpha &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^\alpha} + \xi \frac{\partial \vec{t}}{\partial \xi^\alpha} = \vec{a}_\alpha + \xi \vec{t}_{,\alpha} \\ \vec{G}_3 &= \vec{A}_3 = \vec{T}, \quad \vec{g}_3 = \vec{a}_3 = \vec{t} \end{aligned} \quad (6)$$

벡터 $\vec{A}_\alpha = \vec{G}_\alpha|_{\xi=0}$ 는 변형전의 중립면에서의 공변 기저벡터이고, 벡터 $\vec{a}_\alpha = \vec{g}_\alpha|_{\xi=0}$ 는 변형후의 중립면에서의 공변 기저벡터이다. 쉘 곡면의 변형전과 변형후의 중립면에서의 공변 성분들은 다음과 같다.

$$A_{\alpha\beta} = \vec{A}_\alpha \cdot \vec{A}_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \quad (7)$$

2.2 변형률(Strain measures)

일반적으로 Green-Lagrange 변형률 텐서는 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (8)$$

식(6)를 식(8)에 대입하면 변형률 텐서는 변위장 벡터인 \vec{u} 와 \vec{t} 로 나타낼 수 있다. 변형률을 면내 변형률과 전단변형률로 나눌 수 있으며, 또 면내 변형률을 멤브레인량과 굽힘량으로 나누면 다음의 식같이 각각 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\vec{A}_\alpha \cdot \vec{u}_{,\beta} + \vec{A}_\beta \cdot \vec{u}_{,\alpha} + \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{u}_{,\beta}) \\ \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\vec{A}_\alpha \cdot (\vec{t}_{,\beta} - \vec{T}_{,\beta}) + \vec{A}_\beta \cdot (\vec{t}_{,\alpha} - \vec{T}_{,\alpha}) + \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{t}_{,\beta} + \vec{u}_{,\beta} \cdot \vec{t}_{,\alpha}) \\ \gamma_{3\alpha} &= \frac{1}{2}(\vec{A}_\alpha \cdot (\vec{t} - \vec{T}) + \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{t}) \end{aligned} \quad (9)$$

2.3 회전 텐서(Rotation tensor)

회전 텐서에 대해 간략하게 살펴보면, 3차원에서 강체 운동을 모사하기 위해서는 변위와 회전에

대한 정보가 필요하다. 위치 즉 변위는 3차원 벡터로 쉽게 나타낼 수 있는 반면 회전은 특별한 직교 그룹(SO(3))인 회전 텐서를 이용하여 나타낸다. 이러한 회전 텐서를 나타내는 방법 중에 지수 사상(exponential mapping)법이 대표적이다. Rodrigues formula 사용하여 회전 텐서를 나타내면,

$$\mathbf{R} = \cos(\|\vec{s}\|) \mathbf{1} + \frac{\sin(\|\vec{s}\|)}{\|\vec{s}\|} \mathbf{S} + \frac{1 - \cos(\|\vec{s}\|)}{\|\vec{s}\|^2} \vec{s} \otimes \vec{s} \quad (10)$$

여기서 \mathbf{S} 는 회전 텐서와 관련된 비대칭 텐서이고 \vec{s} 는 회전축 벡터이다.

회전 텐서에 의한 방향 벡터의 운동에 대해 살펴보면, 방향 벡터는 변형전, 후에 그 크기가 변하지 않는다. 식(10)을 이용하여 변형전과 변형후의 방향 벡터의 관계를 살펴보면, 다음과 같다.

$$\vec{i} = \mathbf{R}\vec{T} = \cos(\|\vec{s}\|)\vec{T} + \frac{\sin(\|\vec{s}\|)}{\|\vec{s}\|} \vec{s} \times \vec{T} \quad (11)$$

여기서 벡터 \vec{i} , \vec{s} 그리고 \vec{T} 의 기저는 고정 좌표계의 기저인 $\{\vec{e}_i\}$ 이다. 여기서 한가지 중요한 점은 고정 좌표계의 기저를 갖는 벡터 \vec{s} 의 각 성분이 서로 독립이 아니라는 것이다. 따라서 다른 좌표계를 잡는게 적당한데, 본 연구에서는 접평면에 평행한 벡터를 기저 벡터로 사용하였다.

2.4 유한요소화

본 연구에서는 총 Lagrangian 방법을 사용하여 비선형 유한요소를 구성하였다. 두께가 얇아지면 나타나는 수치적 문제인 전단 변형 잠김현상과 멤브레인 잠김 현상을 저감시키기 위해서 ANS 기법을 사용하였다 ANS 기법에 대한 자세한 내용은 Dvorkin과 Bathe⁽¹⁰⁾를 참조하였다. 쉘의 기하 형상과 변수들은 일반적인 4 절점 형상함수로 보간하였다.

$$N^i(\theta^1, \theta^2) = \frac{1}{4}(1 + \theta^1 \theta_i^1)(1 + \theta^2 \theta_i^2) \quad (i=1,2,3,4) \quad (\theta_i^1 = -1,1,1,-1 \text{ and } \theta_i^2 = -1,-1,1,1) \quad (12)$$

여기서 $(\theta^1, \theta^2) = (\xi, \eta)$ 라면, 중립면의 변수들은 다음과 같이 보간된다.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^4 N^i(\theta^1, \theta^2) \vec{u}_i \quad \vec{i} = \sum_{i=1}^4 N^i(\theta^1, \theta^2) \vec{i}_i \quad (13)$$

ANS 기법에 기초한 전단 변형장의 보간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(1 - \theta^2)\gamma_1^A + \frac{1}{2}(1 + \theta^2)\gamma_1^C \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}(1 - \theta^1)\gamma_2^D + \frac{1}{2}(1 + \theta^1)\gamma_2^B \end{aligned} \quad (14)$$

2.5 B-Spline 곡면 형상 표현

앞 절에서 개발될 유한요소와 CAD에서의 기하학적 곡면 모델링의 연동을 위해서는 B-spline 곡면 형상을 구성해야한다. 본 절에서는 그 방법에 대해 간략히 설명한다. 자세한 내용은 참고 문헌에서 찾을 수 있다.⁽¹¹⁾

B-spline 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) P_i \quad (15)$$

여기서 $B_{i,p}(t)$ 는 B-spline이 기저 함수이고, P_i 는 조정점을 나타내는 벡터이다. P 는 B-spline 곡선의 차수를 나타낸다. 그리고 $[t_0, t_1, \dots, t_{n+p}]$ 는 곡선을 따라 분포하는 매개변수 t 를 결정하기 위한 간격 벡터이다. B-spline 기저 함수 $B_{i,p}(t)$ 는 B-spline 혼합 함수이다.

B-spline 곡면은 B-spline 곡선의 확장된 개념으로 생각하면 쉽게 얻을 수 있다. 즉 B-spline 곡면은 B-spline 곡선의 텐서 곱으로 정의할 수 있다. $(p \times q)$ 차 B-spline 곡면은 다음의 식과 같이 정의할 수 있다.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n V_{i,j} M_{j,q}(v) N_{i,p}(u) \quad (u_{p-1} \leq u \leq u_{m+1}, v_{q-1} \leq v \leq v_{n+1}) \quad (16)$$

여기서 $(m+1)(n+1)$ 개의 조정점 $V_{i,j}$ 는 3차원의 조정 그물망을 만들고, $N_{i,p}$, $M_{j,q}$ 는 각각 u 와 v 방향으로의 차수가 p 와 q 인 B-spline 기저 함수를 이룬다. 그림 2는 곡면을 만들기 위해 사용된 쌍 3차 비균일 B-spline 형상을 보여준다.

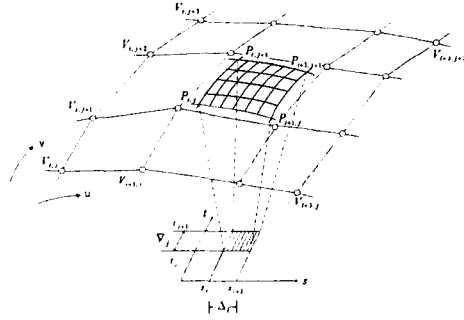


Fig.2 Geometric configuration defining a bi-cubic NUBS patch

2.6 B-Spline 곡면 형상과 유한요소와의 연동

본 절에서는 B-spline 곡면과 유한요소와의 연동 방법에 대해 간략히 설명한다. 먼저, 계산 시간의 효율을 높이기 위해 Kont 간격, 조정점들과 같은 기하학적 정도들은 격자 생성모듈에서 B-Spline 곡면 생성방법을 통해 미리 계산해 둔다. 따라서, 적분단계에서 필요한 요소단위의 계산을 위해 반복적으로 곡면을 생성할 필요가 없고, 유한요소가 위치한 곳을 찾아 그곳에서 필요한 기하학적인 값들을 계산하기 위해 곡면을 지역적으로 생성한다. 자세한 내용은 참고 문헌[]을 참조하기 바란다.

3. 해석 결과

본 장에서는 B-spline 곡면 모델링과 비교하기 위해 이론적 곡면 표현식이 있는 문제에 대해 본 연구에서 얻은 유한요소의 성능을 알아본다. 본 연구에서는 곡면 모델링을 위해 쌍 3차 비균일

B-spline이 사용되었다.

3.1 원통형 셸에 집중하중이 가해지는 문제

그림 3은 양단이 다이아프램으로 고정된 원통형 셸에 양 중앙에 크기 1 인 집중하중이 가해지는 문제이다. 그림 4는 하중을 점진적 증가에 대한 변위 증가를 살펴본 그림이다. 이론적 곡면식을 사용한 것과 B-spline을 이용해 곡면을 나타내서 얻은 결과를 비교하면 매우 잘 일치함을 알 수 있고, 또한 기존의 다른 연구 결과와도 잘 일치함을 알 수 있다.

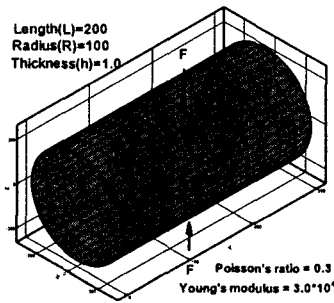


Fig.3 Pinched cylinder with rigid diaphragms

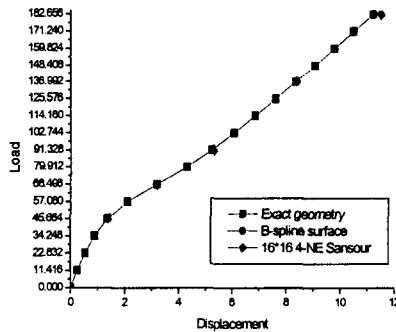


Fig4. Displacement of pinched point

3.2 구형 셸에 집중하중이 가해지는 문제

그림 5는 중앙선을 따라 90° 간격으로 반대 방향 힘이 작용하는 구형 셸이고 그림 6은 해석에 사용된 유한요소 수를 달리하여 살펴본 그림이다. 하중이 작게 걸리는 선형의 경우에는 해석에 사용된 요소 수에 상관없이 같은 값이 나왔지만 하중이 증가하여 비선형영역이 되면 사용한 요소 수에 따라 값이 달라지는 것을 알 수 있다. 요소 수가 작으면 신뢰할 수 없는 결과를 제시하는 경우가 발생할 수도 있다.

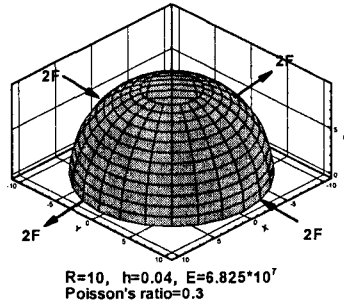


Fig.5 Pinched hemispherical shell

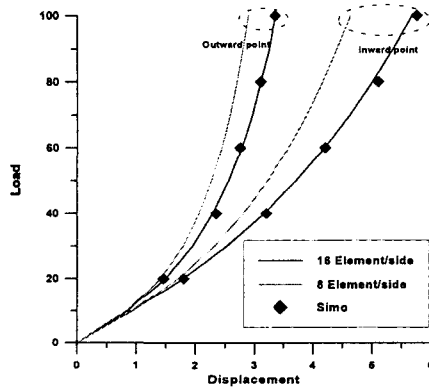


Fig.6 Displacement of two different elements

4. 결 론

본 연구에서는 CAD 시스템과 연동할 수 있는 B-spline 곡면 표현과 일반 곡선 좌표계를 사용한 비선형 쉘 유한요소를 개발하였다. 이러한 비선형 해석을 위하여 방향벡터를 도입하였다. 또한 전단 변형 잠김현상과 멤브레인 잠김 현상을 저감시키기 위해서 ANS기법을 사용하여 전단 변형 형상과 멤브레인 형상의 잠김을 방지하는 안정적인 쉘 유한 요소를 개발하였다. CAD 시스템을 이용하기 위해 CAD에서 기하학적 모델링을 수행하고 그 데이터를 이용해 유한 변위각을 갖은 문제를 유한요소에서 직접해석 하도록 하였고 그 정확도가 매우 높음을 확인하였다.

5. 참고 문헌

- 1 S. Ahmad, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved element," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.2, 1970, pp.419-451
2. J.H. Argyris, "Excursion into large rotations," Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg, Vol.32,

1982, pp.85-155

3. J.C. Simo, L. Vu-Quoc, "Three-dimensional finite-strain model- Part II: Computational aspects," *Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg*, Vol.58, 1986, pp.79-116
4. J.C. Simo, D. D. Fox and M. S. Rifai, "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory," *Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg*, Vol.79, 1990, pp.21-70
5. N. Buechter, E. Ramm, "Shell theory versus degeneration: A comparison in large rotation finite element analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.34, 1992, pp.39-59
6. B. Brank, D. Peric, F.B. Damjanic, "On large deformations of thin elasto-plastic shells: Implementation of a finite rotation model for quadrilateral shell element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.40, 1997, pp.689-726
7. A.Ibrahimbegovic, B. Brank, P.Courtois, "Shell resultant geometrically exact form of classical shell model and vector-like parameterization of constrained finite rotations," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.52, 2001, pp.1235-1252
8. M. Cho, H.Y. Roh, "Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates," *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol.56, 2003, pp.81-115
9. H.Y. Roh, M. Cho "The Application of Geometrically Exact Shell Elements to B-Spline Surfaces," *Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg*, submitted.
10. E.N. Dvorkin, K.J. Bathe, "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis," *Eng. Comput.*, Vol.1, 1984, pp.77-88
11. G. Farin, *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*, Academic Press, New York (1993).