한국전산구조공학회
2003년도 가을 학술발표회 논문집

요소의 대표 변형률값에 근거한 에러평가를 이용한 평면응력문제의 적응적 요소망 형성

Adaptive mesh generation for plane stress problems using error based on element's representative strain value

정요찬* 윤종열** 홍승표***
Jeong, Yo Chan Yoon, Chongyul Hong, Seung Pyo

ABSTRACT

The finite element method is one of the most widely used method of structural analysis that has wide applications in diverse fields of engineering and science. The method has been proven effective and reliable in many practical problems. One of the reasons for the methods' popularity is its ease of use, but still the user has to input the finite element mesh which affects the accuracy of the results. The knowledge required to form an effective mesh for a given problem is somewhat complex and for sometime there has been research effort to automate the generation of the mesh and this is called the adaptive mesh generation scheme. A good adaptive mesh scheme seemed to require an accurate assessment of error and generally this requires some additional computation. This paper looks into the possibility of generating adaptive meshes based on representative strain values in each finite element method. The proposed adaptive scheme does not require additional computations other that looking up the data values already computed as finite element analysis results and simple manipulations of these data. Two plane stress problems, a plate with a hole and a deep beam with a concentrated load at the end, are considered to show the progress of the improved generation of adaptive meshes using the scheme.

Key words: finite element method, adaptive scheme, representative strain

1. 서 론

컴퓨터의 눈부신 발전과 함께, 많은 계산량을 신속하게 처리하는 것을 요구하는 유한요소법 역시 발전하였다.[(1),(2)] 대부분의 구조해석은 유한요소해석으로 가능하다고 볼 수 있다. 유한요소해석은 전처리과정, 해석과정, 후처리과정으로 나눌 수 있다. 이 중 사용자가 입력하고, 출력받는 데이터는 전·후처리 과정에 속한다. 전처리과정에서 요소의 선택과 유한요소망의 형성은 가장 중요하며 여러 분야의 다양한 지식을 요구하는 부분이라 할 수 있다. 효율적인 요소망은 문제의 정확한 결과값을 얻을 수 있지만, 그렇지 않은 경우에는 신뢰성 없는 결과를 초래할 수도 있다. 그러므로 효율적인 요소망 형성은 필수적이며, 이를 위해서는 전문적인

* 홍익대학교 토목공학과 석사과정
** 정회원,홍익대학교 토목공학과 교수
*** 홍익대학교 토목공학과 박사과정

지식과 경험이 필요하다. 이러한 사항들을 효과적으로 처리하기 위한 유한요소프로그램 전처리과정의 한 부분으로, 자동적으로 효율적인 요소망을 형성하는 적응적 요소망 형성기법(Adaptive mesh generation scheme)에 대한 연구가 현재 다양한 분야에서 이루어지고 있다.[(1),(3),(4)]

일반적인 적응적 요소망 형성 알고리즘은 요소망에 의해 해석된 결과에 대한 오차평가와 평가된 오차에 의해 요소망을 재형성하는 과정으로 나눌 수 있다. 유한요소 해석 결과의 오차는 다양하게 분류할 수 있으며, 일반적으로 다음을 포함한다: 1) 실제 구조물을 수학적인 모델로 표현하는 과정에서 발생하는 모델링 오차(modeling error); 2) 사용자의 부주의 또는 전문지식의 부족으로 인한 부정확한 입력정보에 의하여 발생하는 입력정보 오차(input data error); 3) 컴퓨터에서 숫자를 표현할 때 한정된 비트를 사용함으로써 발생하는 반올림 오차(round-off error); 4) 계산 절차상 이전에 발생되었던 세분화 오차나 반올림 오차와 같은 오차가 다음 단계에 계속 중복되어 주로 증가하는 상속 오차(inherited error); 5) 반올림 오차가 방정식을 풀거나 수학적인 계산에서 알고리즘의 수행 순서에 따라서 발생하는 조작 오차(manipulation error); 6)테일러 급수와 같이 수학적인 무한급수 표현을 일정 항까지 절단하여 계산함으로써 발생하는 절단 오차(truncation error); 7) 수학적으로 모델링된 무한개의 자유도를 가진 연속체를 유한요소법에서 한정된 자유도로 표현함으로 발생하는 세분화 오차(discretization error). 이러한 오차들 중에서 모델링과 입력정보 오차외의 다른 오차들은 유한 요소망을 어떻게 세분화하냐에 따라서 결과값의 오차를 이론적으로 어느 정도는 줄일 수 있다. 그러므로, 적응적 유한요소망 형성 방법의 오차평가는 근본적으로 복잡하고 어려운 문제이다. 이러한 오차 평가에 근거하여, 새 요소망을 형성하는데는 다음의 방법들이 있다: 1) 절점의 좌표만 이동하는 r법; 2) 기존의 요소를 같은 형태의 더 많은 요소로 세분화하는 h법; 3) 요소의 형상함수 차수를 증가시키는 p법; 4): r, h, p법의 조합. 이 중 가장 많이 사용되는 방법은 r법과 h법을 조합한 rh법이다.

본 연구에서는 오차평가를 하지 않고, 요소의 대표 변형률값에 의한 적응적 요소망 형성 전략을 분석하였다. 일반적인 유한요소해석 결과로 계산된 가우스 점에서의 변형률값으로 구한 대표값에 근거하여 h법으로 다음 단계의 개선된 요소망을 형성하는 적응적 유한요소망 형성 기법을 평면응력문제에 적용하여 그 가능성을 확인하였다. 이 방법은 적응적 기법에서 효율적인 오차 평가에 요구되는 계상량이 거의 없으므로 수렴성만 양호하면 아주 효율적인 적응적 요소망 기법으로 개발될 가능성이 있다.

2. 대표 변형률값에 근거한 적응적 요소망 형성

적응적 요소망 형성방법에서 요소망을 평가하는 기준이 되는 오차 계산은 유한요소 해석을 수행한 후, 그 해석결과로부터 오차를 계산하는 후오차해석법이 많이 사용되고 있다. 한 요소의 응력, 변형률, 변위와 같은 유한요소 해석결과를 비교하기 위한 수단으로써 이 값들의 크기를 나타내는 놈(norm)이 오차를 평가하는 방법으로 가장 많이 사용한다. 에너지 놈(energy norm)은 적응적 요소망 오차 평가방법에서 오차를 계산하는데 많이 사용되고 있으며, 변형률에 대한 에너지 놈 $\|E\|$ 을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\|E\| = \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^T D (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \, d\Omega \right]^{1/2} \tag{1}$$

여기서, ε은 정확한 해이고, $\bar{\varepsilon}$은 유한요소법에 의해서 구해진 근사적인 값이다. 또한 Ω는 영역이고 D는 강성행렬이다. 일반적인 문제에 있어서 정확한 해 ε을 구한다는 것은 거의 불가능한 일이다. 그러므로 ε을 이용하여 오차를 계산할 수는 없다.

본 연구에서 사용하는 평균 변형률 ε^*를 이용하면 식(1)은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\|E^*\|_i = \left[\int_{\Omega_i} (\varepsilon^* - \bar{\varepsilon})^T D (\varepsilon^* - \bar{\varepsilon}) \, d\Omega \right]^{1/2} \tag{2}$$

또한, 전체 영역 Ω에 대한 값은 $\|E^{*}\|_{i}$의 합으로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\|E\|^{2}=\sum_{i=1}^{m}\|E^{*}\|_{i}^{2} \tag{3}$$

여기서, m은 요소의 수를 나타내며 i는 요소 번호이다.

식 (3)을 사용하여 요소의 대표값과 다른 요소와의 값 차이 및 전체 영역의 값을 근거로 하여 적응적 요소망을 형성할 수 있다. 유한요소 해석 수행 후 적응적 요소망의 형성을 위해서 해석과정에서 필요한 계산외에 추가적으로 실시해야하는 후오차해석과정이 필요하다. 이 후오차해석과정은 정밀한 계산이 요구될수록 많은 계산량이 필요하게 되고, 그에따라 계산 시간이 증가하게 된다. 식(2)와 식(3)은 계산된 값을 합하거나 비교하는 계산만 요구되므로, 계산량은 매우 미소하다.

2.1 대표 변형률값의 정의

각 요소의 대표 변형률값은 다음 식에 의해서 정의된다.

$$\|e\|_{ix}=\frac{\sum_{i=1}^{n_{gx}}\left[\left(\varepsilon_{jx}-\varepsilon_{x}^{*}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}{A_{i}} \tag{4}$$

$$\|e\|_{iy}=\frac{\sum_{i=1}^{n_{gy}}\left[\left(\varepsilon_{jy}-\varepsilon_{y}^{*}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}{A_{i}} \tag{5}$$

$$\|e\|_{ixy}=\frac{\sum_{i=1}^{n_{gxy}}\left[\left(\gamma_{jxy}-\gamma_{xy}^{*}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}{A_{i}} \tag{6}$$

여기서, $\|e\|_{ix}$ 는 x방향의 대표 변형률값, n_{gx} 는 x방향의 가우스점(Gauss point) 개수, ε_{jx} 는 x방향의 j 가우스점의 변형률, ε_{x}^{*} 는 x방향의 가우스점 변형률의 평균값, A_{i} 는 i요소의 면적이다. 식(5)의 $\|e\|_{iy}$, n_{gy}, ε_{jy}, ε_{y}^{*} 은 y방향으로의 값을 나타내며, 식(6)의 $\|e\|_{ixy}$, n_{gxy}, γ_{jxy}, γ_{xy}^{*} 는 전단변형률에 대한 값을 나타낸다. 이와 같은 방법으로 다른 변형률값도 유사하게 정의 할수 있다.

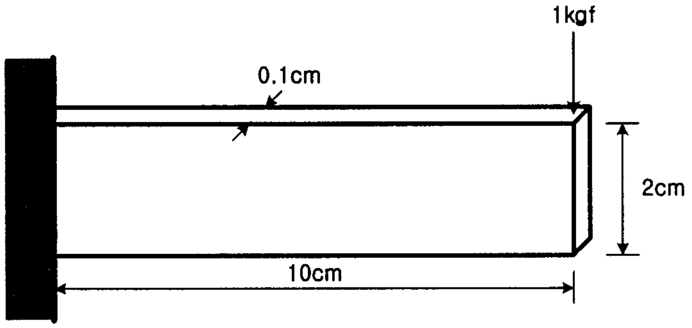
2.2 h법 적응적 요소망 형성

적응적 요소망 형성으로 본 연구에서는 h법만 사용하였다. h법을 사용함에 있어서 세분화 기준을 정해야 한다. 한 요소에서 변형률값은 방향에 따라 구분되며, 4절점 평면응력(4 nodes plane stress)요소의 경우는 3개의 변형률값, 즉 x축과 y축방향 변형률값과 전단 병형률값이 존재한다. 식 (2), (3), (4), (5), (6)을 이용하면 요소별 평가를 실시할 수 있고, 세분화 기준을 정할 수 있다. 평균값과 각 가우스점의 변형률값의 차이를 다시 평균한 값을 대표 변형률값으로 정의하고, 대표 변형률값을 오차의 정도로 간주한 것이다. 이 방법은 복잡한 계산없이 요소망에서 발생하는 오차를 간접적으로 평가하거나, 아니면 오차의 평가는 아니더라도, 한 요소내의 변형률값의 변화가 많으면 그 요소를 더 세분화 해야된다는 데에서 구현되었다. 따라서 대표 변형률값으로 오차를 정확히 평가할 수는 없지만, 효율적인 요소망은 형성 할 수 있다. 대표 변형률값을 이용하여 적응적 요소망을 형성하면 변형률값이 급변하는 구간에서는 대표 변형률값과 각 가우스 점에서 계산된

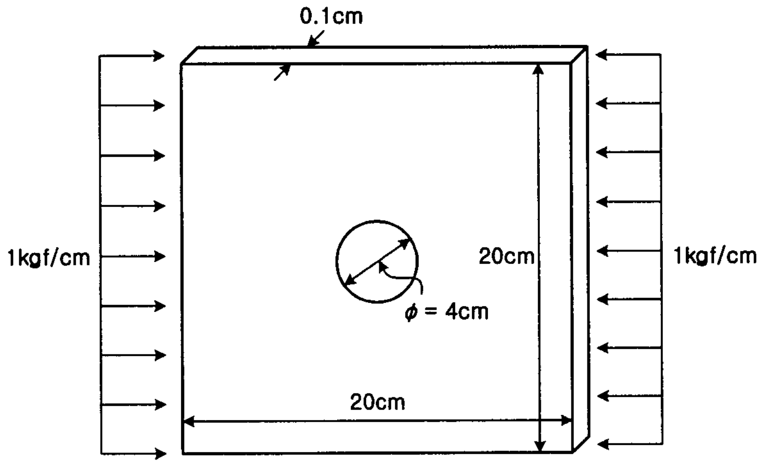
변형률값의 편차가 크며, 변형률값이 완만한 구간에서는 대표 변형률값과 각 가우스 점에서 계산된 변형률값과의 차이가 적게 된다. 이러한 원리에서 대표 변형률값에 근거하여 평가를 실시한 후, 적응적 요소망 형성 전략을 세우면, 변형률값이 급변하는 구간은 많은 요소망 수가 형성이 되고, 변형률값이 완만한 구간에서는 적은 요소망 수가 형성된다.

3. 적용 예제 및 결과 분석

앞에서 설명한 대표 변형률값에 근거한 h법 적응적 유한요소망 형성기법을 평면응력 문제에 적용하여 분석하였다. 본 연구에서 고려한 두 예제는 그림 1에서 보여주는 캔틸레버 보와 중앙에 원형의 개구부를 갖는 평판 문제로써, 유한요소해석 및 응용역학에서 자주 활용되는 예제이다.[5] 해석에 사용한 요소는 4절점 평면응력(4 nodes plane stress)요소이며, 변형률은 한 요소에 4점의 가우스 점에서 계산된다. 이 가우스 점에서 계산된 4개의 값의 평균을 구하고, 그 평균값과 각 가우스 점에서 계산된 결과값의 차이를 평균하여 대표 변형률값이라고 정의하였다. 그림 2는 요소별 대표 변형률값의 상대적인 값을 보여주며, 그림 3은 이 값을 근거로하여 재형성되어가는 h법에 의한 유한요소망의 적응적 진행 과정을 보여주며, 이는 변형률의 변화가 있는 요소가 세분화되는 것을 보여주고 있다.

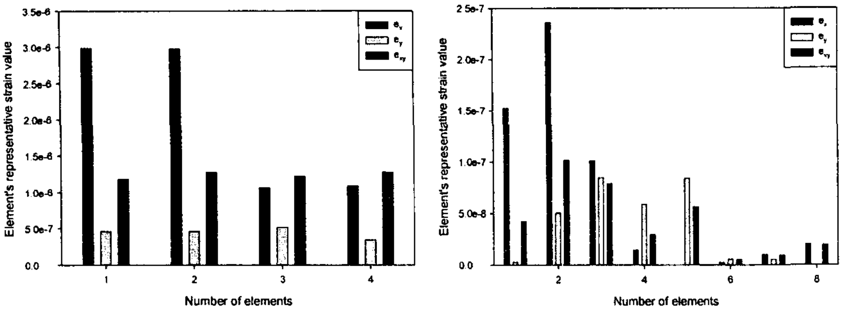


(a) 끝단 하중을 받는 캔틸레버보

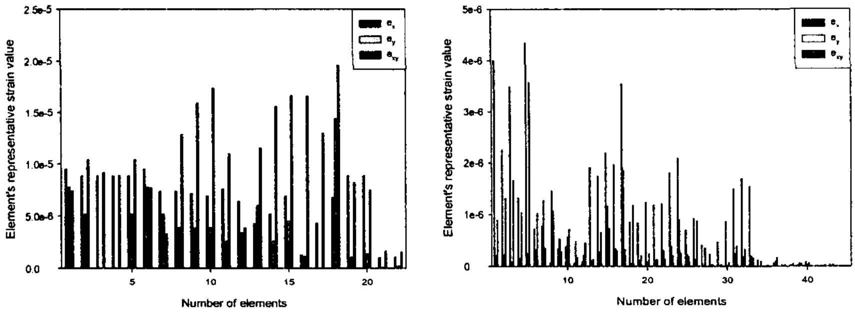


(b) 중앙에 원형개구부를 갖는 평판

그림 1 해석 예제



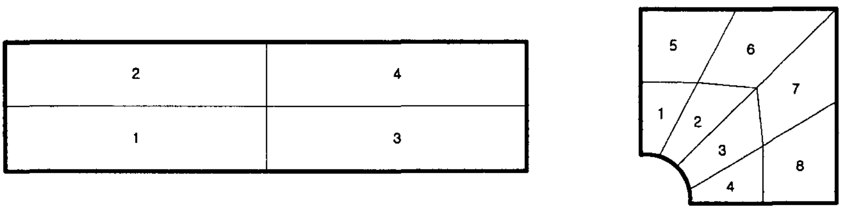
초기요소망 평가



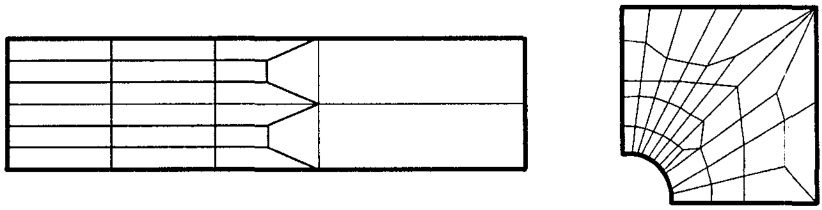
1차 적응요소망 평가

(a) 끝단 하중을 받는 캔틸레버보　　　　(b) 중앙에 원형개구부를 갖는 평판

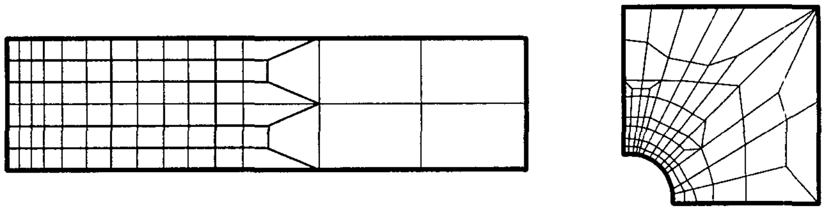
그림 2 각 단계별 요소별 대표 대형률 값



초기요소망



1차 적응적 요소망 형성결과



2차 적응적 요소망 형성결과

(a) 끝단 하중을 받는 캔틸레버보

(b) 중앙에 원형개구부를 갖는 평판

그림 3 해석 예제의 적응적 요소망 형성과정

4. 결론

오차 평가 없이 각 요소의 대표 변형률값에 근거한 h법 적응적 유한요소망 형성과정을 두 개의 평면 응력 문제를 통해 분석하여 얻은 결론을 정리하면 다음과 같다.

1) 각 요소의 대표 변형률값에 근거한 h법 적응적 유한요소망은 효율적인 유한요소망으로 수렴하는 경향을 보였다.
2) 한 단계에서 효율적인 유한요소망으로 수렴하는 정도는 다소 느리더라도, 요구되는 계산량이 미소하므로 효율적인 적응적 유한요소망 형성기법으로 개발될 수 있다.

본 연구에서 제시하는 대표 변형률값에 근거한 적응적 요소망 기법의 알고리즘을 더 상세하게 연구하면 효율적인 방법으로 개발될 수 있고, 최종 단계에서는 정확한 오차 평가를 위한 알고리즘으로 전환하는 것도 한 방법이라고 사료된다. 평면응력문제 외의 다른 문제, 즉 쉘요소 및 3차원 문제의 적용이 가능하며, h법 외의 r법, p법 및 이들의 조합에 대한 개발도 가능하다. 또한 적응적 요소망의 적용성은 선형문제 뿐 아니라 비선형, 동역학 문제들에 대한 그 유용성이 크므로 이에 대한 추가적인 연구와 개발도 필요하다.

참고 문헌

1. Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4th Ed., McGraw-Hill, New York, N.Y., 1989

2. Cook, R.D., D.S. Malkus and M.E. Plesha, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd Ed., John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1989.

3. Gago, J.P., D.W. Kelly, O.C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II - Adaptive mech refinement", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, 1983, pp.1621-1653

4. Kelly, D.W., J.P. Gago, O.C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I - Error analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, 1983, pp. 1593-1619

5. Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, N.Y., 1970