

확률유한요소법을 이용한 사장교의 동적응답해석

A Study on Dynamic Response Analysis of the Cable-Stayed Bridge Using the Stochastic Finite Element Method

한성호* · 정인수** · 김진홍*** · 신재철****

Han, Sung Ho · Jung, In Su · Kim, Jin Hong · Shin, Jae Chul

ABSTRACT

In this study, the program which determine the initial cable tension force by the initial shape analysis for cable stayed bridge is developed. Also, DSFEMP(Dynamic Stochastic Finite Element Analysis Program) is developed to consider the variance of random variables at each step of dynamic response analysis, not use existing methods that apply to the theory of reliability at the final step of structural analysis. In addition, the output from the developed program was compared with the results from DMCS(PDirect Monte Carlo Simulation Program) to prove its validity.

1. 서 론

사장교는 주변환경 조건에 용이하게 적용될 수 있는 장점을 가진 교량 형식이지만 설계 및 시공과정에서 다른 형식의 교량에 적용되는 이론과 상당히 다른 구조해석 및 설계기술이 필요하다.^{(1),(2),(3)} 또한, 정확한 거동을 파악하기 위해서는 비선형 해석을 수행하여야 하며, 전체 강성에 영향을 주는 여러 변수들을 분석하는 것이 중요하므로 정적해석, 고유치해석, 동적응답해석 및 시공단계해석 등을 병행해야 한다.^{(4),(5),(6)} 이와 같은 구조해석 과정에서 가장 중요한 것은 구조형식 및 설계변수에 따라 구조물의 역학적 성상을 파악하고, 전체 구조물에 어떤 영향을 주는가를 충분히 검토하는 것이다. 그러나, 기존의 확정론적 방법에 의한 구조해석으로는 확률변수에 따른 구조물의 역학적 성상 및 설계변수에 대한 영향을 명확하게 파악하기 어려운 뿐만 아니라 경험에 의한 안전계수를 사용한 평가방법 역시, 구조물의 안전성을 파악하기는 어렵다. 이와 같은 문제

* 정회원 · 충남대학교 토목공학과 공학박사 · E-mail : han2001@cnu.ac.kr

** 충남대학교 토목공학과 공학박사 · E-mail : hayundad@kcpri.re.kr

*** 충남대학교 토목공학과 박사과정 · 공학석사 · E-mail : jinong2@hanmail.net

**** 정회원 · 충남대학교 토목공학과 교수 · 공학박사 · E-mail : shin120@cnu.ac.kr

점을 해결하기 위한 대안으로 매우 정확한 해석 결과를 얻을 수 있는 DMCS(Direct Monte Carlo Simulation) 방법을 이용하여 해석을 수행하는 것이 보편화되었다. 하지만, DMCS 방법은 비선형 상태함수를 구하기 위해, 반복적 구조해석을 수행해야 하므로, 시간이 과다하게 소요되는 단점이 있어, 동적응답해석에는 적합하지 않은 평가방법이며, 다른 근사해법에 대한 검증방법으로 주로 이용되고 있다. 따라서, 동하중을 받는 사장교 구조물을 대상으로 확률유한요소법(SFEM : Stochastic Finite Element Method)을 정식화하여 구조물의 동적응답해석을 보다 효율적으로 수행할 수 있는 프로그램을 개발함으로써, 기존의 확정론적인 방법 및 DMCS 응답해석에 따른 해석방법과는 다른 새로운 해석방법 개발을 연구목적으로 한다.

2. 섭동법에 의한 동적확률유한요소해석

구조물의 확률론적 동적운동방정식 (1)를 이용하여 변위 $[X]^{(0)}$ 를 정식화한 영차(Zeroth-Order) 섭동방정식은 다음 식과 같다.

$$[M]^{(0)}\{\ddot{X}\}^{(0)} + [C]^{(0)}\{\dot{X}\}^{(0)} + [K]^{(0)}\{X\}^{(0)} = \{F\}^{(0)} \quad (1)$$

또한, 확률변수 $[K]$, $\{F\}$ 에 대한 식 (1)의 편미분에 의하여 1차 섭동(First-Order Perturbation) 방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]^{(0)}\left\{\frac{\partial \ddot{X}}{\partial K}\right\} + [C]^{(0)}\left\{\frac{\partial \dot{X}}{\partial K}\right\} + [K]^{(0)}\left\{\frac{\partial X}{\partial K}\right\} = -\{X\}^{(0)} \quad (2)$$

$$[M]^{(0)}\left\{\frac{\partial \ddot{X}}{\partial F}\right\} + [C]^{(0)}\left\{\frac{\partial \dot{X}}{\partial F}\right\} + [K]^{(0)}\left\{\frac{\partial X}{\partial F}\right\} = \{1\} \quad (3)$$

같은 방법으로 1차 섭동 방정식 (2), (3)을 구한 후, 다시 편미분을 하면, 식 (4)와 같은 2차 섭동(Second-Order Perturbation)방정식을 구할 수 있으며, 식 (4)를 간단하게 정리하면, 식 (5)와 같이 정리 할 수 있다.

$$[M]^{(0)}\left\{\frac{\partial^2 \ddot{X}}{\partial K \partial F}\right\} + [C]^{(0)}\left\{\frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial K \partial F}\right\} + [K]^{(0)}\left\{\frac{\partial^2 X}{\partial K \partial F}\right\} = -2\left\{\frac{\partial X}{\partial F}\right\} \quad (4)$$

$$[M]^{(0)}\{\ddot{X}\}^{(2)} + [C]^{(0)}\{\dot{X}\}^{(2)} + [K]^{(0)}\{X\}^{(2)} = -2\{X\}^{(1)} \quad (5)$$

따라서, 섭동법에 의한 동적확률유한요소해석에 따른 변위에 대한 응답의 평균과 분산은 식 (6), (7)로 계산 할 수 있으며, 속도, 가속도에 대한 응답의 평균과 분산도 변위에 대한 응답과 같은 방법으로 계산할 수 있다.

$$E[\{X\}] = \{X\}^{(0)} + \frac{1}{2} \{X\}^{(2)}[Var(K) + Var(F)] \quad (6)$$

$$Var[\{X\}] = \begin{bmatrix} \left\{\frac{\partial X}{\partial K}\right\} \\ \left\{\frac{\partial X}{\partial F}\right\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Var(K) & 0 \\ 0 & Var(F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{\frac{\partial X}{\partial K}\right\} \\ \left\{\frac{\partial X}{\partial F}\right\} \end{bmatrix} \quad (7)$$

3. Direct M.C.S(Monte Carlo Simulation) 방법

Direct M.C.S 방법은 가정하는 임의장에 대한 표본을 생성하고, 생성된 표본에 대한 해석을 수행하는 것으로 구조해석시 재료의 특성, 즉 단면 2차 모멘트, 탄성계수 및 부재의 길이, 외부 하중의 불확실량에 대하여 평균과 분산(또는 표준편차)에 맞게 랜덤포본추출(Random Variable Generation)을 시행해 이것을 변수에 대입하여 변위 및 부재력에 대한 평균 및 분산을 구함으로써, 구조해석시 이러한 인자들이 결과에 미치는 영향을 분석할 수 있는 방법이다. 그러나, 이 방법에서는 임의장을 생성하는 정확한 시뮬레이션(Simulation) 프로그램이 필요하며, 중심극한정리(Central Limit Theorem)를 만족시키기 위해서 많은 수의 표본을 사용해야 하기 때문에, 랜덤포본 추출시마다 구조해석을 수행해 평균 및 표준편차와 같은 통계적 특성을 산정해야 하므로, 시간이 많이 걸린다는 단점이 있다.

4. 동적확률유한요소해석 결과 검증

섭동법의 정식화 과정을 통해 개발한 DSFEMP(Dynamic Stochastic Finite Element Method Program)에 의해 사장교 응답해석 결과의 타당성을 검토하기 위한 수치해석 예로써, 그림 1과 같은 1개의 케이블 요소와 10개의 보요소로 구성된 구조물에 표 1과 같은 구성요소에 대한 평균과 표준편차를 적용하여 해석을 수행하였다. 앞 절에서 언급한 것과 같이 DMCS(Direct Monte Carlo Simulation Program)에 의한 해석을 병행하여 구조물의 변위와 단면력의 평균 및 표준편차에 대한 결과를 서로 비교·검토하였다. 이때, 불확실성을 포함한 구성요소들은 편의상 통계적으로 서로 독립인 정규분포를 갖는 확률변수로 가정하여 구조해석을 수행하였다. 또한, 개발한 DSFEMP는 변동계수(Coefficient of Variance ; C.O.V)가 비교적 작은 구조물에 적용해야 만족한 결과를 얻을 수 있으므로, 사장교의 동적확률유한요소해석에 적당한 변동계수의 범위를 제안하였다.

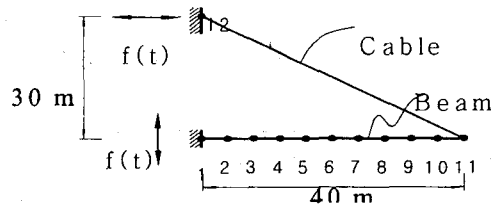


그림 1. 보-케이블 구조물의 검증 모델

표 1. 보-케이블 구조물의 부재 물성

물성(확률변수)	부재	평균크기	표준편차크기	변동계수
탄성계수	보	$2.1 \times 10^7 \text{ tonf/m}^2$	$2.1 \times 10^6 \text{ tonf/m}^2$	10 %
	케이블	$2.1 \times 10^7 \text{ tonf/m}^2$	$2.1 \times 10^6 \text{ tonf/m}^2$	10 %
사하중	보	15.7 tonf/m	1.57 tonf/m	10 %
	케이블	0.2355 tonf/m	0.02355 tonf/m	10 %
초기긴장력	케이블	389.5294 tonf	38.95294 tonf	10 %
단면이차모멘트	보	0.04167 m^4	0.004167 m^4	10 %
단위중량	보	7.85 tonf/m^3	-	-
	케이블	7.85 tonf/m^3	-	-

그림 1과 같은 구조물에 대한 동적확률유한요소해석 수행시 확률변수는 보요소의 단면적, 단면이차모멘트, 탄성계수와 케이블요소의 단면적, 초기긴장력, 탄성계수 및 정현파 지점운동($f(t) = 4.5\sin(2t)$)의 영향 등을 고려하였으며, 각각의 확률변수에 대한 변동계수(C.O.V)는 10%를 적용하여 수치해석을 수행하였다. 기진력은 세가지 형태의 동하중의 경우, 보요소의 모든 절점에 수직방향으로 적용하였으며, 구조물의 감쇠비는 5%로 가정하였다. 또한, 정현파 지점운동의 경우, 수평(1번 절점)·수직(12번 절점) 방향으로 적용하였으며, 감쇠비는 무시하였다.

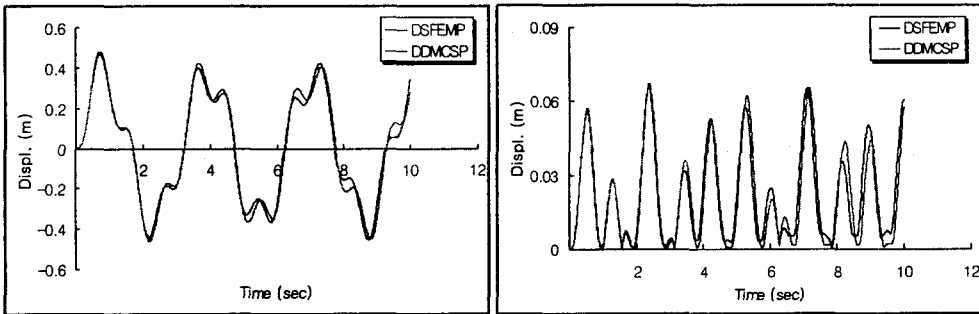


그림 2. DSFEMP와 DDMCSP에 의한 7번 절점의 수직변위의 평균 및 표준편차

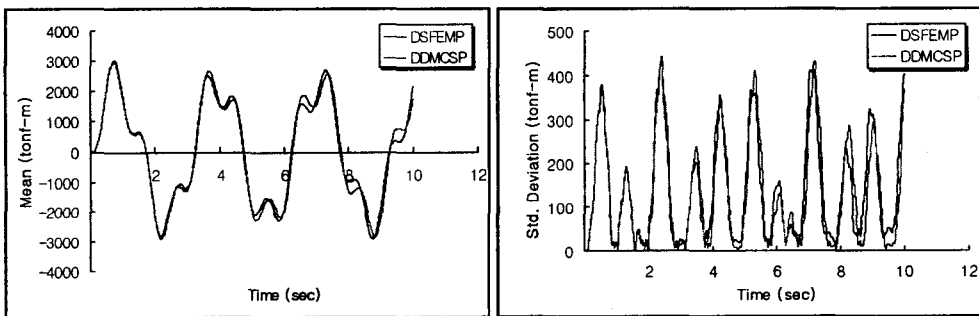


그림 3. DSFEMP와 DDMCSP에 의한 7번 절점의 모멘트의 평균 및 표준편차

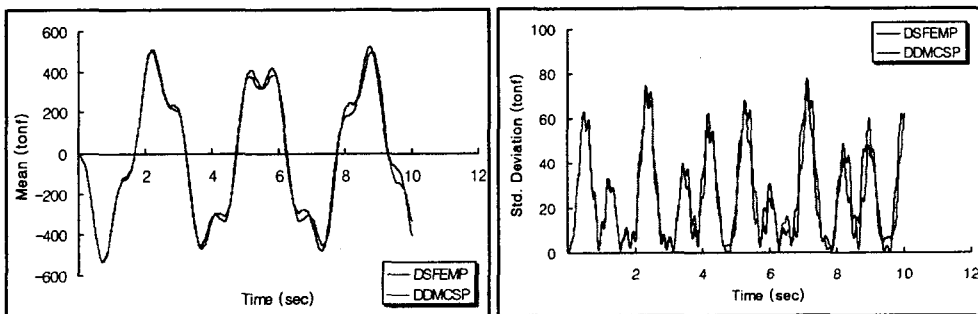


그림 4. DSFEMP와 DDMCSP에 의한 케이블 긴장력의 평균 및 표준편차

케이블과 보의 질량은 각각 $0.024, 0.16 \text{ ton} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$ 이며, 수치해석 방법은 시간이력해석법중

Newmark- β 방법을 이용하였다. DSFEMP의 결과 검증은 동적응답해석시 최대 수직처짐이 나타난 7번 절점 수직변위의 평균과 표준편차에 대해서 검토하였으며, DMCSPP와 비교한 결과를 그림 1과 같이 도시하였다. 또한, 부재력의 경우는 7번 절점의 모멘트 및 케이블의 긴장력에 대해 검토하였으며, DMCSPP와 비교한 결과를 그림 2~그림 3과 같이 도시하여 비교·검토하였다.

정현파 지점운동에 의한 7번 절점의 수직 변위에 대한 변동계수는 14.1%로 나타났다. 또한 모멘트 및 케이블 긴장력에 대한 응답해석 결과 또한 평균과 표준편차가 거의 일치함을 보이고 있으므로, 변위의 검토 방법과 같은 방법으로 DSFEMP에 의한 해석 결과 중 최대 부재력이 나타난 시점에서 변동계수를 검토하였다. 정현파 지점운동에 의한 7번 절점의 모멘트의 변동계수는 14.8%, 케이블 긴장력에 대한 변동계수는 14.7%로 나타났다. 위와 같은 해석 결과에 의하면, 본 연구에서 개발한 DSFEMP는 DMCSPP에 의한 변위 및 부재력 응답 결과와 전반적으로 일치하고 있으며, DMCSPP에 의한 해석에 비해 시간상 상당히 유리함을 보이고 있으므로, 동적확률유한요소해석시 상당히 유용한 해석프로그램으로 판단된다.

4.1 프로그램의 적용성 평가

본 해석프로그램은 확률변수의 변동계수를 10%로 가정하여 확률유한요소 정식화이론을 바탕으로 구성하였으므로, 확률변수의 변동계수가 얼마만큼이나 해석 결과의 변동특성에 영향을 미치는가를 판단할 수 있어야 한다. 따라서, 최대 수직절점변위가 나타난 7번 절점을 선택하여 탄성계수의 변동계수에 따른 DMCSPP에 의한 해석 결과를 기준으로 DSFEMP에 대한 비율을 그림 4와 같이 나타냈으며, 결과를 검토해보면, 각각의 오차들은 탄성계수의 변동계수가 10% 이하일 때, 5% 이하의 오차를 보이는 반면, 25%에서는 14.49%, 30%에서 38.04%, 35%에서 60.52%로써, 변동계수 증가함에 따라 어느 기점을 기준으로 급격히 증가함을 알 수 있다. 그러므로, 본 연구에서 개발한 프로그램은 변동계수가 10%이하 일때, 유용성이 있다고 판단된다.

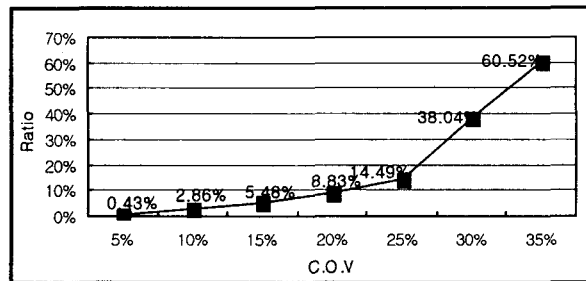


그림 5. 탄성계수에 대한 표준편차와 변동 비율(Simulation Number = 10,000)

5. 사장교의 동적확률유한요소해석 모델링

확률변수로 지진하중을 고려한 경우에는 그림 6과 같은 하프형 사장교에 대해서 실시하였으며, 사장교의 수치해석은 Nazmy and Abdel-Ghaffar[8]가 제시한 방법에 의해 실시하였다. 대상 사장교의 전체적인 개형은 주경간장이 335.28m, 측경간장이 137.16m, 주탑의 높이가 60.96m인 사장교를 총 24개의 절점과 12개의 케이블(등가트러스)요소, 23개의 보요소로 구성하였으며, 케이블, 주탑과 주형의 구성요소에 대한 제원은 표 2와 같다.

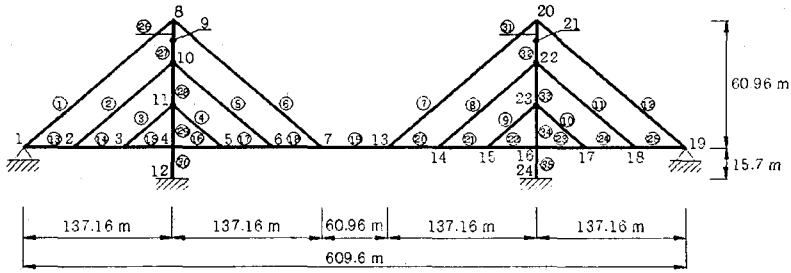


그림 6. 하프형 사장교의 모델링

표 2. 사장교 부재의 물성치

Properties	A(m ²)	E(tonf/ m ²)	I(m ⁴)	ρ(tonf/ m ³)
Girder	0.60	2.1× 10 ⁷	1.50	7.85
Tower	0.80	2.1× 10 ⁷	1.90	7.85
Cable	Top	0.043	1.6× 10 ⁷	0
	Middle	0.037		
	Bottom	0.030		

6. 동적확률유한요소해석 결과 분석

계 인자 중에서 질량과 감쇠는 시간에 대한 변화가 없는 확정적인 변수로 고려하였으며, 부재의 강성과 기진력이 갖는 불확정성을 모두 확률변수로 고려한 응답해석을 수행하였다. 여기서, 사장교의 강성에 영향을 주는 확률변수로는 케이블 요소의 단면적, 탄성계수, 주탑과 주형의 단면적, 탄성계수, 단면이차모멘트 등을 확률변수로 고려하였고, 기진력은 그림7과 같은 지진하중을 확률변수로 고려하였으며, 각각 중앙경간의 절점에 수직으로 작용하고 있다고 가정하였다. 이러한 조건으로 개발된 DSFEMP에 의하여 대상 사장교의 주탑과 주형의 절점변위 응답, 주형과 주탑의 축력 및 모멘트 응답, 케이블의 긴장력 응답에 대한 평균과 표준편차를 계산하였다.

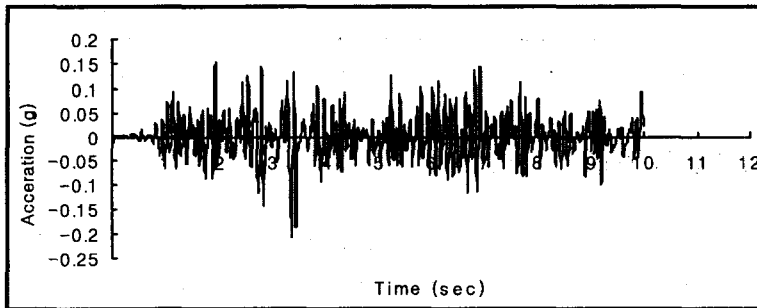


그림 7. Imperial Valley Earthquake Record 1940, EL Centro Array (UP)

6.1 절점변위 응답

그림 6에 도시한 사장교에 지진하중 고려한 경우, 변위 응답해석은 감쇠비를 무시하여 수행하였다. Nazmy and Abdel-Ghaffar가 제시한 방법과 같이 사장교의 중앙경간에 지진하중을 적용시켜 주형에서는 7번 절점의 수직변위를 검토하였으며, 주탑에서는 8번 절점에서의 수평변위를 검토한 결과, 최대 변위에 대한 변동계수는 7번 절점의 경우, 25.08%로 나타났으며, 8번 절점의 경우, 24.50%의 결과를 얻을 수 있었다.

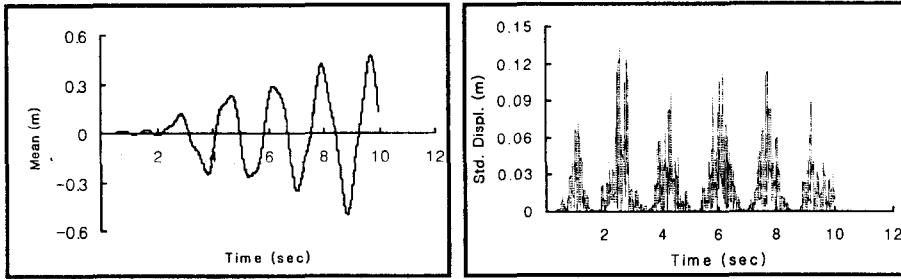


그림 8. DSFEMP에 의한 7번 절점의 수직변위의 평균 및 표준편차

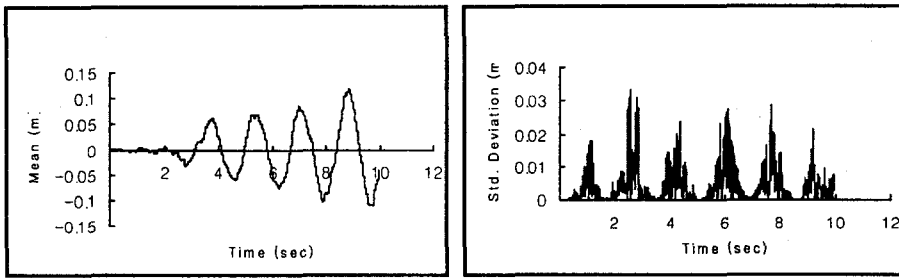


그림 9. DSFEMP에 의한 8번 절점의 수평변위의 평균 및 표준편차

6.2 부재력 응답

주형에서는 중앙경간 19번 부재의 축력 및 모멘트에 대한 평균과 표준편차를 해석하였으며, 주탑에서는 주형과 주탑이 교차하는 30번 부재의 축력 및 모멘트에 대한 평균과 표준편차를 해석하였다. 결과를 검토해보면, 최대부재력 발생시 19번 부재의 축력 및 모멘트에 대한 변동계수는 7.0%, 14.1%로 나타났으며, 30번 부재의 축력 및 모멘트에 대한 변동계수는 11.9%, 14.1%로 나타났다.

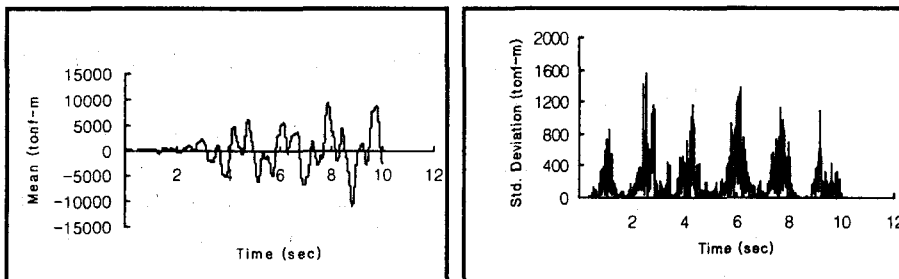


그림 10. DSFEMP에 의한 7번 절점 모멘트의 평균 및 표준편차

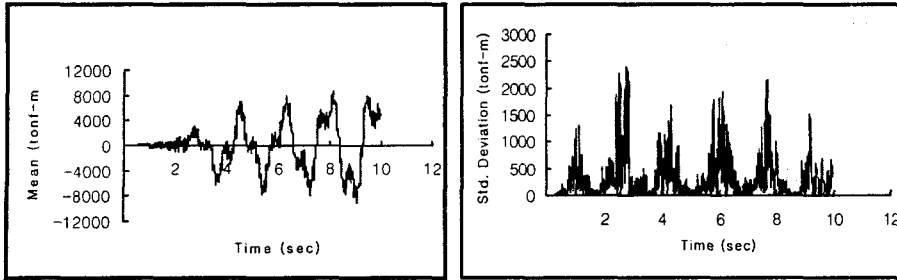


그림 11. DSFEMP에 의한 8번 절점 모멘트의 평균 및 표준편차

4. 결 론

본 연구에서는 확률유한요소법을 이용하여 개발한 프로그램의 타당성을 검토하였고, 개발한 프로그램 해석 결과에 의해 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

1. 프로그램 DSFEMP(Dynamic Stochastic Finite Element Method Program)는 반복적인 동적응답해석시 시간이 과다하게 소요되는 DMCSF(Direct Monte Carlo Simulation Program)의 단점을 해결할 수 있으며, 간단한 응답해석으로 확률변수에 대한 영향을 명확하게 파악할 수 있는 유용한 수단으로 판단된다.
2. 사장교의 응답 및 변동계수에 대한 수치해석 결과는 하중의 불확실량에 의해 대부분의 영향을 받고 있으나, 케이블 긴장력 및 전체 강성을 구성하는 단면계수의 불확실량을 적절히 고려하여 해석을 수행해야 할 것으로 사료된다.
3. 극한하중을 견딜 수 있도록 설계된 구조물이라도 외부하중 및 구조물이 갖는 불확실성에 의한 파괴확률이 내재되어 있으며, 불확실성의 정도에 따라 파괴확률이 위험한 수준까지 증가할 수 있으므로, 불확실량을 고려한 해석이 필요하다. 따라서, 본 연구에서 제시한 평가방법은 사장교의 신뢰성해석 및 안전성 평가를 효율적으로 수행할 수 있는 방법으로 판단된다.

참고 문헌

1. Fleming, J. F., "Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridge Structure," Computers & Structures, Vol. 10, pp. 621-635, 1979.
2. Bathe, K.J., Ramm, E., Wilson, E. L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis", Int. J. for Numerical Method in Engineering, Vol. 9, pp. 353-386, 1975.
3. Morris, N. F., "Dynamic Analysis of Cable-Stiffened Structures", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST5, pp. 971-982, 1974.
4. JHON F. Fleming, ENGIN A. Egesell, "Dynamic Behaviour of a Cable-Stayed Bridge", Earthquake Engineering and Structure Dynamics. Vol. 8, pp. 1-16, 1980.
5. Nazmy, A. S., Abdel-Ghaff, A. M., "Three-Dimensional Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridges", Computers & Structures, Vol. 34, No. 2, pp. 257-271, 1990.
6. ALY S. Nazmy, AHMED M. Abdel-Ghaffar, "Non-linear Earthquake-Response Analysis of Long-Span Cable-Stayed Bridges : Theory", Earthquake Engineering and Structure Dynamics. Vol. 19, pp. 45-62, 1990.