

Kriging 보간법에 의한 응력 평활화 Stress Smoothing by Kriging Interpolation

이동진* 홍종현** 이채규*** 우광성****
Yi, Dong-Jin Hong, Jong-Hyun Lee, Chae-Gue Woo, Kwang-Sung

ABSTRACT

Kriging interpolation is one of the generally used interpolation techniques in Geostatistics field. This research refers to the contents about important experimental variogram and the study of theoretical variogram and formulation of Kriging interpolation. Kriging interpolation is applied as interpolation for stress smoothing in finite element method. Posteriori error estimation which makes use of stress smoothing from the FEM is very important part, we try to make practical application of surface regeneration ability from Kriging interpolation. This research is necessary preceding one in order to materialize adaptive FEM through posteriori error estimation. For instance, find the estimate value and estimate the propriety through various theoretical variogram models of the reference analyzed from tensional L-shape domain. It also provides possibility of the Kriging interpolation through comparing to existing Least square method as well.

1. 서 론

지구통계학 분야에 널리 사용되는 Kriging 보간법은 주어진 지리·공간 정보로부터 미지점의 광물 분포도를 찾아내기 위한 방법으로 제안되었고 그 후 지구통계적 기법으로 널리 사용되면서 매장된 광물의 등급분포, 광범위한 지역의 지하수위 예측에서부터 최근에는 공간 자료(spatial data)로부터 보간된 새로운 곡면의 재생성 능력으로 인해 컴퓨터 그래픽스(computer graphics)분야에 까지 널리 사용되고 있다.

한편, 유한요소해석에서 오차평가기법을 위해 제안된 여러 가지 방법 중 복구기법(recovery technique)은 유한요소해석으로 얻어진 응력값 등을 이용하여 추정해를 구하고 이를 정해로 대치하여 오차를 평가하는 기법이며 Zienkiewicz와 Zhu에 의해 제안된 SPR(superconvergent patch recovery)기법은 복구기법의 한 방법으로 유한요소해석을 통해 도출된 응력값을 최소제곱의 원리를 이용해 보간된 복구응력을 얻고 이를 유한요소해석 해와 비교하여 오차를 측정한다. 본 연구는 응력복구기법을 통한 적응적 유한요소해석을 구현하기 위한 선행연구로서 기존의 응력복구기법에서 사용되는 최소제곱법과 본 연구에서 제안하는 Kriging 보간법을 사용하여 도출된 결과로부터 새로이 제안된 보간법의 적합성 여부를 판단하고자 한다.

2. Kriging 보간법

* 학생회원 · 영남대학교 토목도시환경공학부 토목공학과 석사과정

** 정회원 · 탐라대학교 토목환경공학과 전임강사

*** 정회원 · 한국건설품질연구원 토목담당 이사

**** 정회원 · 영남대학교 토목도시환경공학부 토목공학과 교수

Kriging 보간법은 공간 자료(spatial data)의 처리 기법중 하나로 지구 통계학 분야에서 널리 사용되는 보간법의 하나이다. Kriging 보간법은 관심 대상 지점의 미지의 특성치를 이미 알고 있는 지점의 공간·지리적 정보와 특성치들 간의 가장 선형조합으로부터 예측한다. 이를 간단히 수식으로 표현하면 식 (1)과 같다.

$$z^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \quad (1)$$

식 (1)에서 z^* 는 대상 지점에서의 Kriging 보간법에 의한 예측치가 되고 λ_i 는 예측을 위해 사용된 각각의 자료값들에 대한 가중치, 그리고 z_i 는 위치정보와 값을 알고 있는 자료점이다. 이러한 개념은 Kriging 보간법에서 가장 기본적인 개념이라 할 수 있다. Kriging 보간법에서 각 자료점에 대한 가중치를 구하기 위해 이들의 공간적 상호관계를 나타내는 지표로서 베리오그램(variogram)이 사용되며 자료점들간의 거리에 따른 베리오그램을 계산하여야 한다.

2.1 베리오그램의 모델링

(1) Experimental Variogram

베리오그램은 주어진 자료들의 공간적 유사성을 나타내는 척도로서 식 (2)와 같이 정의된다.

$$2\gamma(h) = E[(z(x) - z(x+h))^2] \quad (2)$$

식 (2)에서 알 수 있듯이 베리오그램은 거리 h 만큼 떨어진 두 자료값들간의 차이를 제곱값의 기대치를 나타낸다. 일정 영역에 분포되어 있는 자료점에 대한 베리오그램은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [z(x_i) - z(x_i+h)]^2 \quad (3)$$

식 (3)은 거리가 h 만큼 떨어진 자료의 개수가 n 개 일 때의 베리오그램을 나타낸다. 이렇게 계산된 베리오그램과 거리 h 에 의한 그래프를 그려보면 자료들간의 공간적 상관관계를 파악할 수 있게 된다. 표 1은 Kriging 보간법을 위한 자료의 위치와 값을 나타내고 이들 자료로부터 작성된 실험적 베리오그램을 그림 1에 나타내었다.

표 1. 실험적 베리오그램을 위한 자료 위치와 값

| No. of data | x(m) | y(m) | value |
|-------------|------|------|-------|
| 1 | 45 | 15 | 10 |
| 2 | 135 | 45 | 12 |
| 3 | 75 | 75 | 11 |
| 4 | 105 | 105 | 9 |
| 5 | 15 | 135 | 8 |

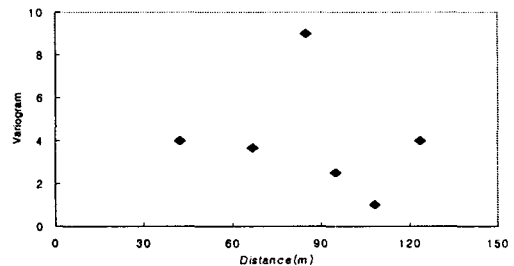


그림 1. 실험적 베리오그램의 계산

(2) Theoretical Variogram

주어진 자료로부터 계산된 실험적 베리오그램은 자료들간의 공간적 상관관계를 나타내는 지표로 사용될 수 있지만 실험적 베리오그램으로부터 Kriging 보간법을 수행할 수는 없다. Kriging 보간법을 위해서는 자료점들 간의 거리와 실험적 베리오그램의 관계로부터 이들의 관계를 대표하는 이론적 베리오그램을 찾아내는 과정을 수행해야 한다.

이론적 베리오그램은 몇가지 비교적 단순한 수식을 사용하여 자료들의 상관관계를 나타낸다. 자료들의 상관관계를 적절히 묘사하기 위해 제안된 이론적 베리오그램의 모델은 다음과 같이 분류할 수 있다. 제안된 모델의 수식에서 C_0 는 자료들의 상관성이 감소하여 실험적 베리오그램의 값이 일정하게 유지되는 부분의 베리오그램 값을 의미하고 a 는 C_0 까지의 거리, 그리고 h 는 자료간의 거리를 나타낸다.

① Linear Model : 가장 간단하게 표현되는 이론적 베리오그램 모델이지만 자료들의 상관성이 선형적으로 변화한다는 가정의 한계로 인해 실제로 분포하는 자료간의 특징을 잘 묘사하지는 못한다.

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 \frac{h}{a}, & \text{for } h \leq a \\ C_0, & \text{for } h > a \end{cases} \quad (4)$$

② Spherical Model : Spherical Model은 이론적 베리오그램의 모델 중 가장 빈번하게 사용된다. 이 모델은 거리 a 까지는 3차 다항식의 형태로 표현되며 a 보다 거리가 커지면 Linear Model과 마찬가지로 일정한 C_0 를 가진다.

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 \left[1.5 \left(\frac{h}{a} \right) - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{for } h \leq a \\ C_0, & \text{for } h > a \end{cases} \quad (5)$$

앞서 언급한 Linear Model이나 Spherical Model과 같이 명확하게 a 와 C_0 가 나타나지는 않지만 거리가 증가할수록 C_0 에 수렴하는 성질을 나타내는 실험적 베리오그램은 다음과 같은 모델로부터 이론적 베리오그램을 결정할 수 있다.

③ Exponential Model : Exponential Model은 Spherical Model과 흡사하지만 정확하게 거리 a 에서 구별되지 않고 거리의 증가에 따라 C_0 에 수렴해 가는 성질이 있다.

$$\gamma(h) = C_0 \left[1 - \exp \left(- \frac{3h}{a} \right) \right] \quad (6)$$

그림 2는 각각의 이론적 베리오그램 모델을 그림으로 도식화한 것이다.

이론적 베리오그램 모델링은 실험적 베리오그램 자료의 공간적 상관관계를 표현할 수 있는 정식화된 수학적 모델중에 적합한 모델을 선택하는 과정이다. 이 과정에서 사용자의 주관이 개입되며 이러한 주관의 개입은 최종적인 예측 결과에 상당한 영향을 미칠 수도 있다. 이러한 사용자의 주관을 배제하고 보다 정확한 계산을 위해 최소제곱법 등의 방법을 사용하여 거리와 베리오그램에 대한 근사식을 찾아낼 수도 있다. 본 연구에서는 이론적 베리오그램 모델의 정식화를 최소제곱법을 통해 수행하고 있다.

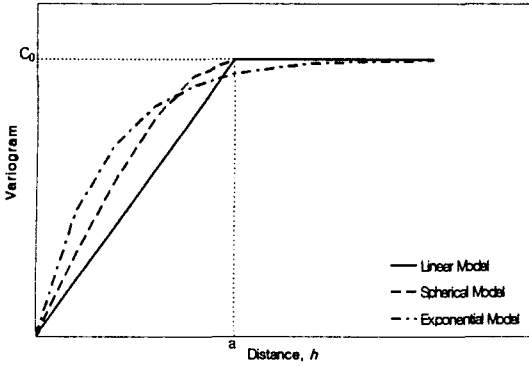


그림 2. 이론적 베리오그램

자 평균과 그 모집단의 인자를 예측하기 위한 추정식의 평균의 차이로 정의할 수 있고 그 차이가 없을 때 편향되지 않았다(unbiased)고 한다. 앞의 식 (1)이 편향되지 않을 조건은 다음의 식 (7)과 같다.

$$b_z = E(z) - E(z^*) = E(z) - E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i\right) = 0 \quad (7)$$

Kriging 보간을 위해 사용된 자료는 실제값이므로 동일한 평균을 가지고 식 (7)의 조건을 만족하기 위해서 모든 자료값에 대한 가중치의 합은 1이 되어야 한다.

$$1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (8)$$

따라서 Ordinary Kriging 보간법에서 오차분산을 최소가 되게 하고 편향되지 않을 조건을 구체적인 수식으로 표현하면 식 (9)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}^2, \quad \sigma_{ij}^2 = \text{Cov}(z_i, z_j) \\ & \text{Subject to } 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

이러한 제약조건을 가진 문제를 풀어내는 방법에는 여러 가지가 있지만 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method)을 사용하여 풀어내면 식 (10)과 같은 오차분산식을 얻게 된다.

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \omega) = \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}^2 + 2\omega \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \quad (10)$$

여기서 $L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \omega)$ 은 라그랑지 목적함수, ω 는 라그랑지 승수를 나타내며 식 (10)의 최소값은 식 (9)의 최소값과 같으며 주어진 제약조건도 만족한다. 식 (10)과 같이 주어진 목적함수는 극값에서 최소값을 가지

2.2 정규 Kriging 보간법

Kriging 보간법에서 Simple Kriging 보간법과 Ordinary Kriging 보간법을 구별짓는 특징으로 편향(bias)에 대한 조건을 가진다. Simple Kriging 보간 추정식은 그 평균과 모집단의 평균이 일치하지 않는 문제점을 가지고 있다. 이는 Simple Kriging 보간 추정식이 편향되어있기 때문인데, 다른 제약조건없이 오차분산을 최소로 하는 가중치를 구하므로 편향되는 것이다. Ordinary Kriging 보간법은 오차분산을 최소로 하는 조건에 더불어 편향되지 않을 조건을 만족하는 추정식을 구성한다. 편향(bias)은 모집단의 인

며 λ 와 ω 에 대해 편미분하여 극값을 구할 수 있다. 식 (10)을 편미분하여 정리하면 식 (11)을 얻을 수 있고 이를 행렬의 형태로 표현하면 식(12)와 같다.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ij}^2 - \omega = \sigma_{0i}^2, l=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1n}^2 & 1 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2n}^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \dots & \sigma_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{02}^2 \\ \dots \\ \sigma_{0n}^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

식 (12)의 행렬식을 풀어내면 사용된 각각의 자료에 대한 가중치를 구할 수 있다.

3. 유한요소법으로의 적용

유한요소법에서 오차의 측정과 평가는 중요한 부분을 차지한다. 유한요소법이 연속체의 이산화를 통한 근사해를 구하는 방식이고 오차의 발생 또한 피할 수 없기 때문이다. 공학 전반에 대해 대두되는 임의의 문제는 그 정해(exact solution)를 알아낼 수 없는 경우가 대부분이므로 유한요소법에서 오차의 측정과 평가를 위해서는 알 수 없는 정해를 여러 가지 방법에 의해 추정하고 이로부터 오차를 측정하고 평가해야 한다.

유한요소법에서 오차의 측정을 위해 제안된 복구기법(recovery technique)은 유한요소법을 통해 구해진 해의 일차 미분량인 응력값 등을 이용하여 이들의 복구(recovery)를 통해 얻어진 해를 정해로 대체하는 방식이다. 만약 응력 특이(stress singularity)가 발생하는 문제에서 응력복구기법을 통해 오차를 평가하고자 할때 응력 경사(stress gradient)가 급하게 나타나는 영역에 대한 적절한 보간이 이루어지지 않는다면 이는 계산된 오차의 신뢰성에 대한 문제와 직결된다. 즉 해석 영역에서 불균등하게 분포하는 응력값을 자료로 보간을 통한 응력의 공간적 분포형상을 제대로 묘사하지 못한다면 오차의 측정은 신뢰할 수 없게 된다. 이러한 사실들로부터 Kriging 보간법의 적용에 대한 근거를 제시할 수 있다.

4. 인장력을 받는 L-형 평판단면

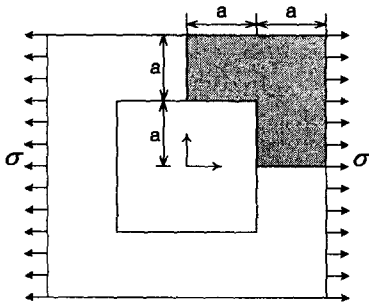


그림 3. 개구부가 있는 평판의 인장

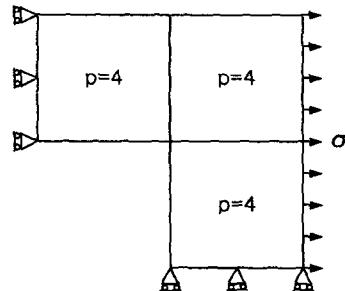


그림 4. 유한요소해석 모델

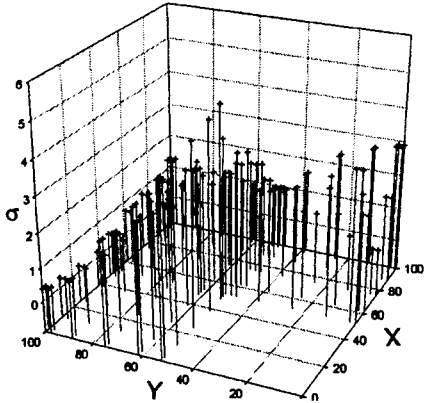


그림 5. 유한요소해석에 의한 응력값

그림 3과 같이 개구부(cut-out)가 있고 축방향에 대해 인장력을 받고 있는 평판에서 빗금친 부분에 대해 유한요소해석을 수행하였다. 그림 4는 유한요소해석 모델을 나타낸다. 그림 3에서 a 는 50cm이며 작용하는 인장력 $\sigma = 1 \text{ kgf/cm}^2$ 이다. 탄성계수 $E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 이고 $\nu = 0.3$ 이다. 유한요소해석은 각 요소의 형상함수 차수를 4차로 고정하여 수행하였고 그림 5와 같은 결과를 보여준다. 그림 5에서처럼 개구부의 모서리 부분과 인장력이 작용하는 면에서 응력이 크게 발생하는 것을 알 수 있다. 유한요소해석에 의해 도출된 응력값을 자료로 하여 최소제곱법과 Kriging 보간법을 통한 응력 복구를 수행하였다. Kriging 보간법을 수행하기 위해 실험적 베리오그램을 작성하고 이러한 자료의 공간적 상관관

계를 대표할 수 있는 이론적 베리오그램의 정식화를 수행하였다. 다음의 그림 6은 실험적 베리오그램이고 이를 도식화하여 C_0 와 거리 a 를 결정하였다. $C_0 = 3.1999$ 이고 $a = 53.4771(\text{cm})$ 이다.

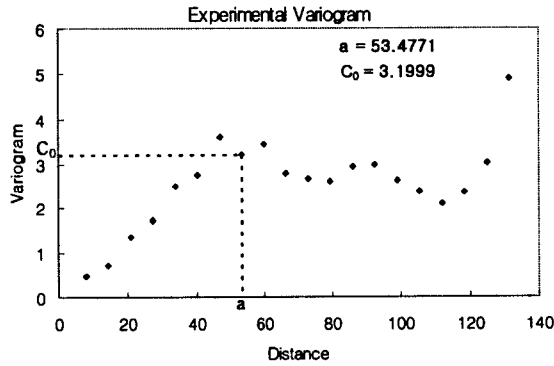


그림 6. 실험적 베리오그램

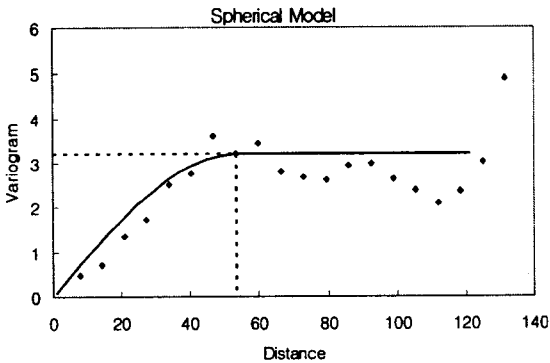


그림 7. Spherical Model

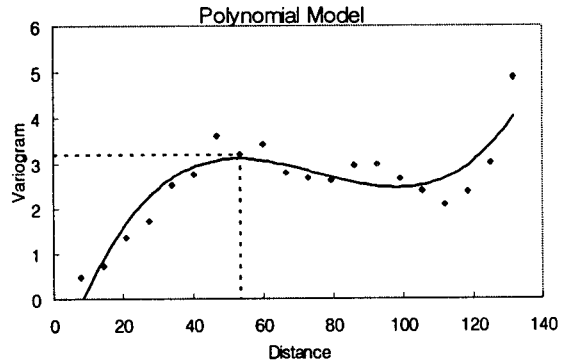


그림 8. Polynomial Model

표 2. 이론적 베리오그램 모델에 따른 예측값

| No. of sample | x | y | Value | Spherical | Polynomial | L.S.M. |
|---------------|---------|---------|--------|---------------|------------|--------|
| | | | | Weight Factor | | |
| 1 | 52.3455 | 2.3455 | 3.5178 | 0.0038 | -0.0094 | . |
| 2 | 52.3455 | 11.5383 | 3.2001 | 0.0067 | 0.0106 | . |
| 3 | 52.3455 | 25.0000 | 2.6545 | 0.0065 | 0.0120 | . |
| 4 | 52.3455 | 38.4617 | 2.4382 | 0.0004 | 0.0079 | . |
| 5 | 52.3455 | 47.6545 | 3.3961 | -0.0025 | 0.0023 | . |
| 6 | 61.5383 | 2.3455 | 1.9622 | 0.0022 | 0.0013 | . |
| 7 | 61.5383 | 11.5383 | 1.8453 | 0.0007 | 0.0065 | . |
| 8 | 61.5383 | 25.0000 | 1.7342 | -0.0016 | 0.0031 | . |
| 9 | 61.5383 | 38.4617 | 2.1275 | -0.0044 | 0.0014 | . |
| 10 | 61.5383 | 47.6545 | 3.1499 | -0.0059 | 0.0006 | . |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | . |
| 75 | 97.6545 | 97.6545 | 1.2677 | 0.8928 | 0.0360 | . |
| Est. point | 100 | 100 | | 1.3601 | 1.4427 | 0.9986 |

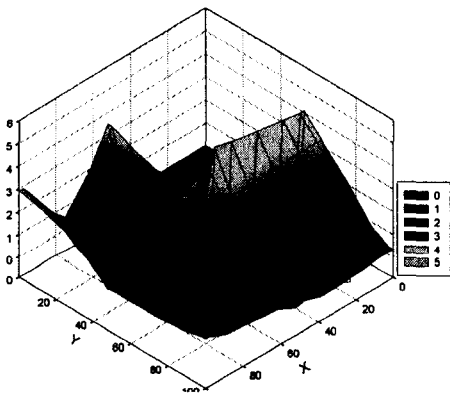


그림 9. FEM($p=4$)

표 2는 이론적 베리오그램 모델을 달리하여 예측한 결과를 제시한다. 많이 사용되는 Spherical Model 과 본 연구에서 사용한 Polynomial Model을 사용하여 한 점에 대해 추정하였다. 그리고 최소제곱법을 통해서도 같은 점에 대해 추정하여 그 예측값을 계산하였다. 두가지 이론적 베리오그램 모델을 사용한 예측결과는 값을 예측한 점에서 가장 가까운 점의 응력값과 비슷한 값을 예측한다.

그림 9는 유한요소해석을 통한 응력값을 나타내고 그림 10은 Polynomial Model을 사용한 Kriging 보간법을 통해 응력면을 재생성하였고 그림 11은 최소제곱법을 통해 재생성된 응력면을 나타내고 있다.

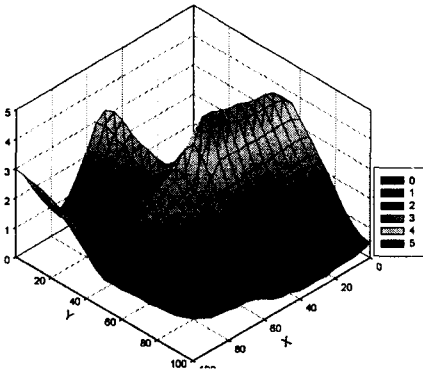


그림 10. Kriging 보간법

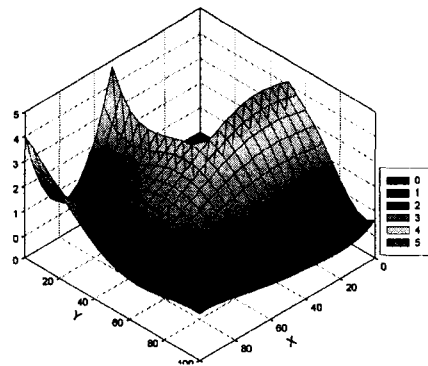


그림 11. 최소제곱법

5. 결과분석 및 결론

인장력을 받는 L-형 평판단면에 대한 유한요소해석과 해석을 통해 도출된 결과를 자료로 이용하여 해석 영역에 대한 응력 평활화를 수행하여 그 결과를 등고선도로 나타내었다. 본 연구를 통해 얻어진 성과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 다양하게 제시된 이론적 베리오그램 모델을 각각 적용하여 Kriging 보간법을 수행하고 예측값을 얻었다. 이론적 베리오그램 모델의 적절한 선택이 최종적으로 도출되는 예측값의 정도에 중요한 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 또한 본 연구에서 수행한 Polynomial Model에 의한 이론적 베리오그램 모델이 수학적인 수식으로 제안된 다른 모델에 비해 비교적 정확한 예측값을 도출하는 것으로 판단된다. 이는 다른 수학적 모델이 주관이 개입되는 특정한 상수의 결정이 전제되기 때문이라 생각된다.

(2) 요소의 경계에서 불연속인 응력값을 보간하여 해석 영역에서 연속조건을 만족하는 응력면을 재생성하는 일련의 과정은 사후오차평가에 있어 중요한 부분을 차지한다. 최소제곱법을 사용하여 응력평활화를 수행할 경우 보간을 위한 기저함수의 차수가 증가함에 따라 진동현상이 발생할 가능성도 있으며 자료로 사용된 응력값의 변화가 심한 구간에서는 응력 경사(stress gradient)를 다소 완만한 기울기로 묘사하는 경우도 발생하였다. 그에 비해 Kriging 보간법을 사용한 경우에는 자료의 공간 분포도에 충실한 응력면을 생성하는 것으로 판단된다.

참고 문헌

1. Journel A. G., "Constrained interpolation and qualitative information - the soft Kriging approach," *Math. Geol.* Vol.18, No.3, 1986, pp.269-286
2. Jian, X., R. A. Olea, and Y. Yu, "Semivariogram Modeling by Weighted Least Squares," *Computer & Geoscience* Vol.22, No.4, 1996, pp.387-397
3. Clayton, V. Deutsch, "Correcting for Negative Weight in Ordinary Kriging," *Computer & Geoscience* Vol.22, No.7, 1996, pp.765-773
4. Denis Marcotte, "Fast Variogram computation with FFT" *Computer & Geoscience* Vol.22, No.10, 1996, pp.1175-1186
5. Andrew Richmond "Two-point Declustering for Weighting Data Pairs in Experimental Variogram Calculations," *Computer & Geoscience* Vol.28, No.2, 2002, pp.231-241
6. 최종근, "공간정보 모델링-크리깅과 최적화 기법," 구미서관, 2002, p.83
7. O.C Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery and Posteriori Error Estimate
Part I: The Recovery Technique," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.33, 1992, pp.1331-1364
8. 조준형, "사후오차평가에 의한 적응적 p -체논 세분화," 2002, 영남대학교 토목공학과 박사학위논문