

PSC 뼈대의 3차원 비선형 해석을 위한 화이버 모델 요소

Fibered Element for the Three-Dimensional Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Frames

이재석* 최규천**
Lee, Jae Seok Choi, Kyu Chon

ABSTRACT

A fibered element for the material and geometric nonlinear analysis of three-dimensional reinforced and prestressed concrete frame is presented. The fibered frame element is idealized as an assemblage of concrete and reinforcing steel fibers in order to account for varied material properties within the cross section of the frame element through elastic, cracking and ultimated stages of materials. Prestressing tendon is modeled as an assemblage of multilinear prestressing steel segments each of which spans a frame element. The contribution of each prestressing steel is added directly to the fibered frame element. Numerical results from the ultimate analysis of three-dimensional PSC box girder are compared with those obtained from other investigator. The validity and the capability of the present nonlinear analysis model is well demonstrated.

1. 서 론

PSC(Prestressed Concrete) 뼈대 구조물은 콘크리트, 보강철근 및 PS 강재(Prestressing Steel)으로 구성 되는 복합구조물로서 재료의 비선형 응력-변형률 관계는 물론 재료의 시간의존적 특성으로 인하여 하중재하 시에 복잡한 거동을 나타낸다.

PSC 뼈대의 비선형 해석에 관한 연구들을 간략히 살펴 보면 Chan⁽¹⁾은 셸 구조의 철근 콘크리트 지지보의 비선형 해석 방법을 발표하였고, Choudhury⁽²⁾와 Mari^(3,4)는 화이버 모델 요소(Fibered Frame Element)를 이용한 3차원 뼈대 구조물의 비선형 해석 방법을 발표한 바 있다. Abbas⁽⁵⁾는 Multi-slice 화이버 보-기둥 요소를 이용한 사장교의 비선형 해석 방법을 발표하였다.

이 논문에서는 3차원 PSC 뼈대의 재료의 비선형성 및 기하학적 비선형성을 모두 고려할 수 있는 비선형 해석 방법 및 하중이 증가함에 따라 단면내에서 변화하는 재료의 상태를 상대적으로 정확히 예측하기 위해 사용한 화이버(Fiber) 모델 요소의 특성에 대해 살펴보고 3경간 PSC 곡선형 거더의 극한 해석에 적용하여 이 논문에서 제시한 비선형 해석 방법 및 화이버 모델 요소의 정당성을 확인하고자 한다.

* 정희원 · 충북대학교 구조시스템공학과 교수

** 충북대학교 구조시스템공학과 박사과정

2. PSC 뼈대 요소

2.1. 화이버 모델 뼈대 요소

뼈대 요소는 길이 방향으로 단면의 변화가 없는 것으로 보고 3절점 직선 요소로 가정한다. 각 요소의 단면은 그림 1.a와 같이 변화하는 재료성질을 가능한 정확히 고려하기 위해 콘크리트 화이버와 철근 화이버로 구성된 것으로 가정한다. 양단의 절점은 그림 1.b와 같이 x, y, z 방향의 이동변위와 회전변위에 대해 6개의 자유도를 가지고 중앙절점은 내부적으로 정의되어 계산과정에서 소거되는 절점으로서 x 방향 변위에 대해 1개의 자유도만을 가진다. 일반적으로 뼈대 요소의 거동에 가장 영향이 큰 변형률은 x 축방향 변형률이므로 여기서는 x 축방향 변형률만을 고려한다. 또한 변형전에 평면이었던 단면은 변형후에도 평면을 유지하는 것으로 가정한다.

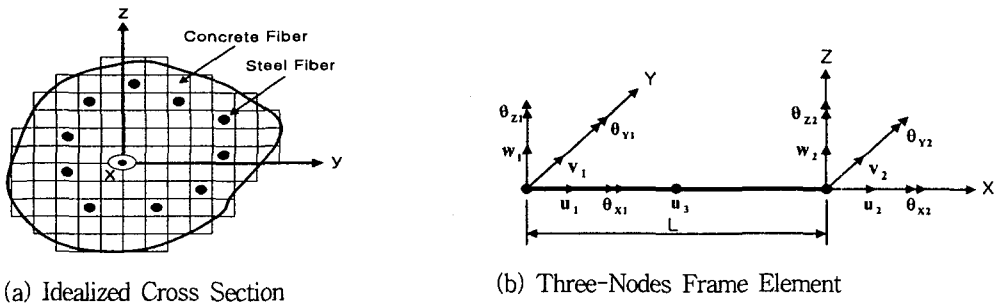


Fig 1. Fibered Frame Element

변형률-변위 매트릭스 및 강도 매트릭스를 구하기 위해서는 먼저 요소의 x 축상의 임의의 점에서의 x, y, z 방향 변위 $u_0(x)$, $v(x)$, $w(x)$ 를 정의해야 하며 형상함수를 이용하여 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$u_0(x) = \lambda \cdot \tilde{u}, \quad \{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \quad \lambda_1 = 2p^2 - 3p + 1, \quad \lambda_2 = 2p^2 - p, \quad \lambda_3 = 4p(1 - p) \quad (1.a)$$

$$v(x) = \phi \cdot \tilde{v}, \quad \{\phi\} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}, \quad \phi_1 = 1 - 3p^2 + 2p^3, \quad \phi_2 = 3p^2 - 2p^3 \quad (1.b)$$

$$w(x) = \varphi \cdot \tilde{w}, \quad \{\varphi\} = \{\phi_1, \phi_2, -\phi_3, -\phi_4\}, \quad \phi_3 = L(p - 2p^2 + p^3), \quad \phi_4 = L(-p^2 + p^3) \quad (1.c)$$

$$\text{여기서 } \tilde{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \quad \partial_x = \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix} \quad \tilde{r} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \theta_x \end{bmatrix}$$

x 축에 대한 비틀모멘트는 휨모멘트와 독립적으로 작용한다고 가정하고, 비틀각 θ_{x0} 와 비틀각 변형률 α 는 식(2)와 같이 선형으로 가정한다. 여기서 요소의 길이를 L이라고 하면 무차원 변수 p는 x/L 로 정의 한다.

$$\theta_{x0} = (1 - p, p) \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{d\theta_{x0}}{dx} = \left\{ -\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right\} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix} = \tilde{B}_\theta \cdot \theta_x \quad (2)$$

뼈대 요소의 임의의 점에서 x 축방향 변위 $u(x, y, z)$ 는 다음과 같이 절점변위의 항으로 나타낼 수 있다.

$$u(x, y, z) = u_0(x) - y \frac{dv(x)}{dx} - z \frac{dw(x)}{dx} = \lambda \cdot \{\tilde{u}\} - y \cdot \phi_{,x}\{\tilde{v}\} - z \cdot \varphi_{,x}\{\tilde{w}\} \quad (3)$$

x 축 방향 변형률은 Green 변형률 $\tilde{\epsilon}_{11}(x, y, z)^{(6)}$ 에서 상대적으로 작은 항을 무시하고 변형률-변위 매트릭스를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \tilde{B}_L \cdot \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^T \cdot \tilde{B}_{NL1}^T \cdot \tilde{B}_{NL1} \cdot \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^T \cdot \tilde{B}_{NL2}^T \cdot \tilde{B}_{NL2} \cdot \dot{\gamma} \quad (4)$$

$$\tilde{B}_L = \{\lambda_{,x}, -y\phi_{,xx}, -z\varphi_{,xx}, 0\}, \quad \tilde{B}_{NL1} = \{0, \phi_{,x}, 0, 0\}, \quad \tilde{B}_{NL2} = \{0, 0, \varphi_{,x}, 0\} \quad (5)$$

여기서 \tilde{B}_L 은 선형 변형률-변위 매트릭스, \tilde{B}_{NL1} 과 \tilde{B}_{NL2} 는 비선형 변형률-변위 매트릭스를 나타낸다. 변형률-변위 매트릭스 및 접선탄성계수 E_T 를 이용하여 접선강도 매트릭스를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_L + \tilde{K}_{NL}, \quad \tilde{K}_L = \int_V \tilde{B}_L^T E_T \tilde{B}_L dV, \quad \tilde{K}_{NL} = \int_V \tilde{B}_{NL1}^T \tau_{11} \tilde{B}_{NL1} + \tilde{B}_{NL2}^T \tau_{11} \tilde{B}_{NL2} dV \quad (6)$$

여기서 \tilde{K}_T 는 접선강도 매트릭스로서 변형률 증분의 선형항에 의해서 유도된 재료강도 매트릭스 \tilde{K}_L 과 변형률 증분의 비선형항으로부터 유도된 기하강도 매트릭스 \tilde{K}_{NL} 의 합이다.

선형 변형률-변위 매트릭스 \tilde{B}_L 을 축방향 변형에 관한 부분 B_u 및 휨변형에 관한 부분 B_v, B_w 로 나누어 고려하면 식(6)의 재료강도 매트릭스 \tilde{K}_L 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{K}_L = \int_V \tilde{B}_L^T E_T \tilde{B}_L dV = \int_V \begin{bmatrix} B_u^T E_T B_u & -y B_u^T E_T B_v & -z B_u^T E_T B_w \\ -y B_v^T E_T B_u & y^2 B_v^T E_T B_v & yz B_v^T E_T B_w \\ -z B_w^T E_T B_u & zy B_w^T E_T B_v & z^2 B_w^T E_T B_w \end{bmatrix} dV \quad (7)$$

\tilde{K}_L 은 x, y, z 의 함수이며 x, y, z 방향에 대하여 적분을 해야 하나 요소길이의 중간점에서의 E_T 값을 전체 요소의 평균치로 가정하면 식(7)의 요소체적에 대한 적분은 요소의 단면에 대한 적분 및 길이에 대한 적분의 곱이 되고 면적에 대한 적분은 요소길이의 중간점에서 다음과 같이 화이버 별로 적분을 하여 구한다.

$$EA = \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} A_{si} \quad (8.a)$$

$$ES_y = - \int_A E_T z dA = - \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} z_{ci} A_{ci} - \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} z_{si} A_{si} \quad (8.b)$$

$$ES_z = - \int_A E_T y dA = - \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} y_{ci} A_{ci} - \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} y_{si} A_{si} \quad (8.c)$$

$$EI_y = \int_A E_T z^2 dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} (z_{ci})^2 A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} (z_{si})^2 A_{si} + \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} \frac{(\Delta y_i) \cdot (\Delta z_i)^3}{12} \quad (8.d)$$

$$EI_z = \int_A E_T y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} (y_{ci})^2 A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} (y_{si})^2 A_{si} + \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} \frac{(\Delta z_i) \cdot (\Delta y_i)^3}{12} \quad (8.e)$$

$$EI_{yz} = \int_A E_T yz dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} y_{ci} z_{ci} A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} y_{si} z_{si} A_{si} \quad (8.f)$$

위에서 n_c 와 n_s 는 콘크리트의 화이버 수 및 보강철근의 화이버 수를 나타내며 하단의 첨자 c 와 s 는 콘크리트와 철근을 나타낸다.

요소길이에 대한 적분은 형상함수를 직접 적분하여 구하며, 비틀에 관한 항을 포함하여 재료강도 매트릭스 \bar{K}_L 을 구할 수 있고, \bar{K}_L 에서 중앙절점의 수평변위 u_3 에 관한 항을 응축하여 양단의 절점변위에 관한 항으로만 표시된 재료강도 매트릭스 \bar{K}_L' 을 구할 수 있다.

기하강도 매트릭스 \bar{K}_{NL} 도 마찬가지로 요소길이의 중간점에서 계산하며 요소의 접선강도 매트릭스 \bar{K}_T 는 \bar{K}_L' 과 \bar{K}_{NL} 을 합하여 구한다.

내부지하중(Internal Resisting Load) \bar{F} 는 가능한 정확히 계산하기 위하여 각 화이버에 대해 3점 Gauss 적분법을 이용하여 계산한다.

비틀에 대해서는 비틀모멘트-비틀각 관계를 정의하여 비틀강도 및 비틀에 의한 내부 비틀모멘트를 구하였다. 비틀모멘트-비틀각 관계는 그림 2와 같이 삼중직선모델^(1,3,4)을 이용하여 정의 했으며 이모델은 그림 3과 같은 두 개의 탄성-완전소성 모델을 더한 Overlay 모델을 이용하여 근사화 할 수 있다. 부재 단면에 균열이 발생한 후와 항복하였을 때의 비틀각과 비틀모멘트를 각각 (α_{cr}, T_{cr}) 과 (α_{yp}, T_{yp}) 라고 하고 파괴가 발생하였을 때의 비틀각을 α_u 라고 하면 뼈대 요소에 대한 비틀강성(Torsional Stiffness) GJ 과 비틀모멘트 T 는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$T = T_1 + T_2, \quad GJ = GJ_1 + GJ_2 \quad (9)$$

비틀강도 GJ_1 과 GJ_2 는 식(10)을 이용하여 풀면 식(11)와 같이 구할 수 있다.

$$GJ_1 \alpha_{cr} + GJ_2 \alpha_{cr} = T_{cr}, \quad GJ_1 \alpha_{cr} + GJ_2 \alpha_{yp} = T_{yp} \quad (10)$$

$$GJ_1 = \frac{T_{cr} - \phi \alpha_{cr}}{\alpha_{cr}}, \quad GJ_2 = \left(\frac{T_{yp} - T_{cr}}{\alpha_{yp} - \alpha_{cr}} \right) = \phi \quad (11)$$

Overlay 모델에서의 항복 비틀모멘트는 식(12)와 같다.

$$T_{y1} = GJ_1 \cdot \alpha_{cr}, \quad T_{y2} = GJ_2 \cdot \alpha_{yp} \quad (12)$$

Overlay 모델에 의하여 구한 비틀모멘트를 요소좌표계에서 화이버 모델 요소에 이용해 계산한 내부지하중에 더한 후 변환 매트릭스를 이용하여 뼈대 요소의 전체좌표계에 대한 내부지하중을 구한다.

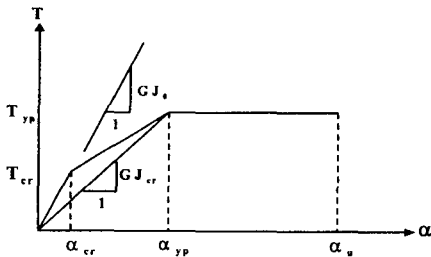


Fig. 2. Trilinear Torque-Twist Response

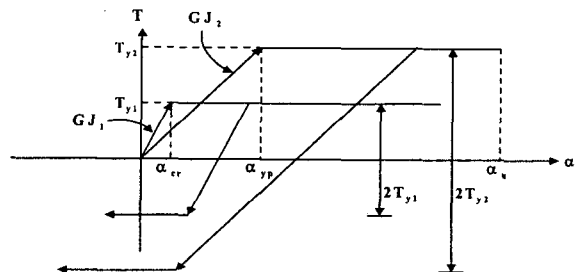


Fig. 3. Overlay Model for Torque-Twist Relationship

2.2. PS 강재 요소

PS 강재는 뼈대 요소의 양절점에 강재로 연결된 3차원 직선 트러스 요소로 가정하고 그림 4와 같이 뼈대 요소의 양절점에서 편심거리 e_{yi} , e_{zi} 와 e_{yj} , e_{zj} 를 갖는 직선 세그먼트(Linear Segment)로 이상화한다.

PS 강재 요소의 강도는 뼈대 요소의 경우와 같이 요소의 중간점에서의 값을 평균치로 가정하여 적분을 이용해서 구한다. 즉 그림 5와 같이 편심거리가 y방향으로 e_{yi} , e_{yj} 이고, z방향으로 e_{zi} , e_{zj} 인 PS 강재 요소 양단의 편심거리의 평균인 $(e_{yi} + e_{yj})/2$ 와 $(e_{zi} + e_{zj})/2$ 만큼 양단에서 떨어지고 기준축과 평행한 PS 강재 요소로 가정한다면 보강철근 화이버에 대한 강도를 구하는 과정과 동일한 방법으로 PS 강재 요소의 강도를 구할 수 있다. 즉 식(8.a)에 PS 강재 요소의 강도를 더하여 식(13)과 같이 구한다.

$$EA = \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_p} E_{ci} A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_p} E_{si} A_{si} + \sum_{i=1}^{n_p} E_{pi} A_{pi} \quad (13)$$

위에서 n_p 는 PS 강재의 수를 나타내며 하단첨자 p는 PS 강재를 나타낸다. 나머지 강도계수도 같은 방법으로 구할 수 있다. 결국 콘크리트 화이버 및 보강철근 화이버의 강도에 PS 강재의 강도를 더하여 최종적으로 PSC 뼈대 요소의 접선강도 매트릭스를 구한다.

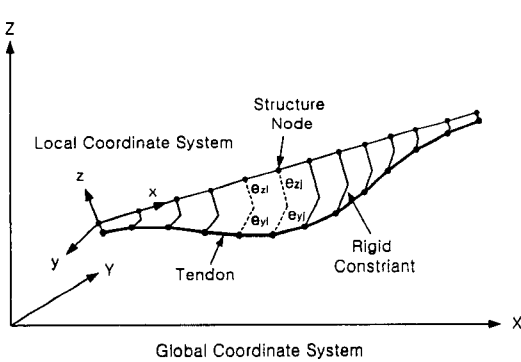


Fig. 4. Geometry of a Prestressing Steel

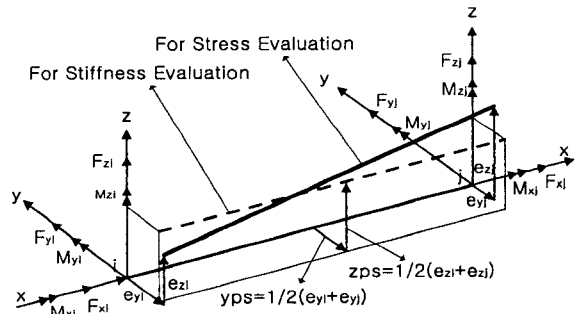


Fig. 5. Idealized Prestressing Steel Segment in a Frame Element for Stiffness Evaluation

3. 3경간 PSC 곡선형 교량의 극한 해석

그림 6.a와 같은 3경간 곡선형 PSC 거더를 대상으로 극한 해석을 하였다.

Choudhury²⁾는 재료 및 기하학적 비선형성을 고려하여 PSC 상자형 거더를 해석할 수 있는 해석 방법을 발표하였으며 여기서는 Choudhury의 해석 결과와 비교하였다. 단위계 및 콘크리트의 재료특성모델은 Choudhury와 같이 kip-in. 단위와 ACI 모델을 사용하였다.

교량은 상자형 단면을 가진 3경간 연속교로서 중앙에 대하여 대칭이므로 교량의 반만을 해석한다. PS 강재는 포스트텐션방식으로 긴장하며 PS 강재의 배치형태는 그림 6.c에 나타나 있다. PS 강재의 단면적은 웨브(Web)당 13.16 in²로서 총 26.32 in²이고 단에서의 긴장력은 웨브당 2,660 kips로 하였다.

각 재료의 성질은 다음과 같다.

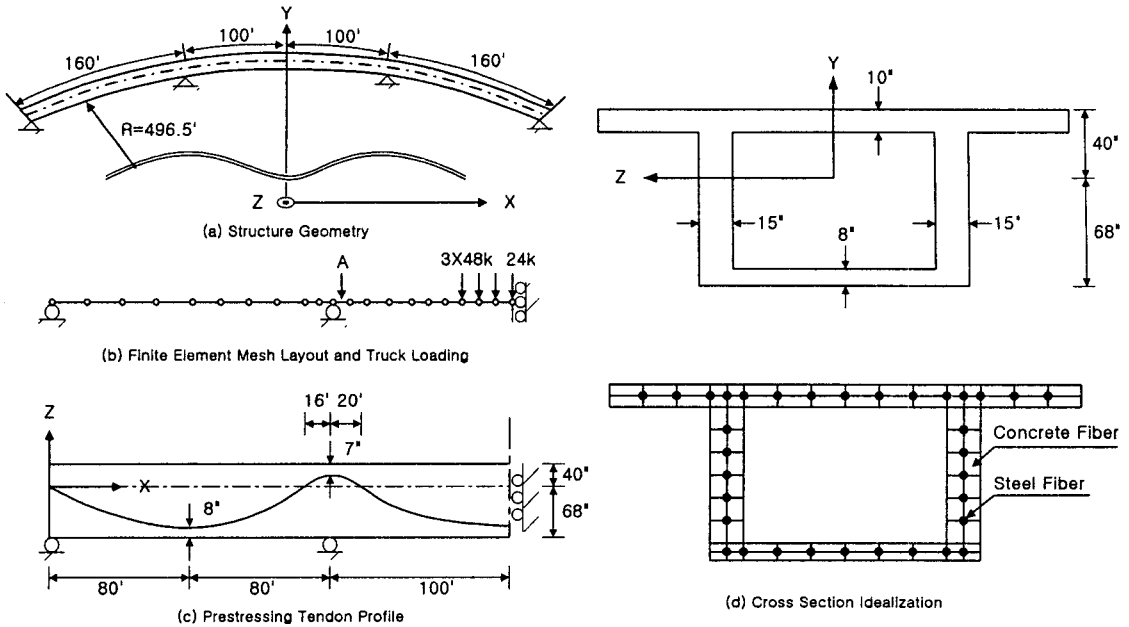


Fig. 6. Three-Span Curved PSC Box Girder Bridge

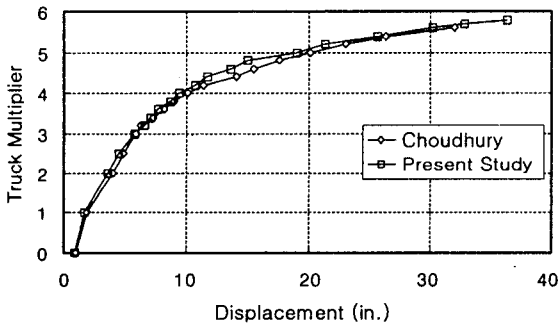


Fig. 7. Central Deflections at Various Loading Stage

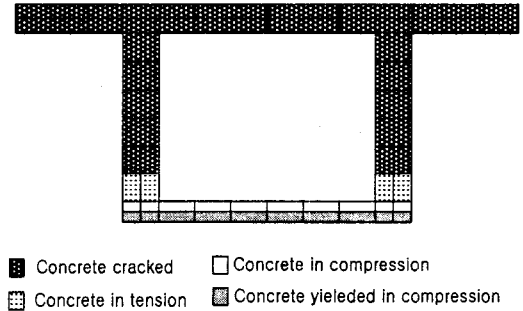


Fig. 8. Crack Patterns due to Negative Moment

콘크리트 : 자중	$W = 155 \text{ pcf}$	보강철근 : 항복응력	$f_y = 60.0 \text{ ksi}$
28일 강도	$f'_c = 4.0 \text{ ksi}$	탄성계수	$E_s = 29,000 \text{ ksi}$
인장강도	$f_t = 0.5 \text{ ksi}$	극한 변형률	$\epsilon_{su} = 0.03$
탄성계수	$E_c = 3,605 \text{ ksi}$	단면적 비율	$= 0.3\%$
극한 변형률	$\epsilon_{cu} = 0.004$	PS 강재 : 인장강도	$f_u = 270.0 \text{ ksi}$
		탄성계수	$E_p = 27,500 \text{ ksi}$
		극한 변형률	$\epsilon_{su} = 0.058$

하중은 총 312 kips의 트럭하중(P13 Truck Loading)²⁾이 중앙경간의 중앙부에 작용하는 경우를 고려하기 위하여 그림 6.b와 같이 3개의 48 kips 하중과 1개의 24 kips 하중이 18 ft 간격으로 작용하는 것으로 가정했다.

그림 7에는 곡선형 PSC 거더의 하중의 증가에 따른 중앙부의 처짐의 변화를 나타냈으며 이 논문의 결과

와 Choudhury의 결과와 잘 일치하고 있다.

그림 8에는 극한 하중에서 A 요소(그림 6.b)의 재료상태가 나타나 있다. A 요소에서 최대 부모멘트가 발생하기 때문에 거더의 상부 플렌지(Flange)와 웨브(Web)의 대부분에 균열이 발생하고 하부 플렌지에서 압축에 항복되었으며 하중을 극한 하중 이상 재하하였을 경우에는 하부 플렌지에서 파괴가 발생하였다.

따라서 이 논문에서 제시한 화이버 모델 요소를 이용한 비선형 해석 방법이 PSC 뼈대의 비선형 거동 및 극한 거동을 정확히 예측하고 각 하중단계에서 변화하는 재료의 상태를 예측하는 데 정당함을 알 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 3차원 PSC 뼈대의 비선형 해석을 위해 거더의 단면을 콘크리트 화이버와 철근 화이버로 이상화한 화이버 모델 요소와 직선 세그먼트로 이상화한 PS 강재 요소를 결합한 PSC 뼈대 요소를 제시하였다.

이 논문에서 제시한 화이버 모델 요소의 정확도를 검증하기 위하여 재료의 비선형성과 기하학적 비선형성을 고려한 3차원 곡선형 PSC 거더의 극한 해석을 수행하여 이전의 연구결과와 비교하였으며 극한 하중과 극한 하중에서의 처짐에 있어서 근사한 결과를 보였다. 그리고 파괴에 이를 때까지 하중재하에 따라 계속적으로 변하는 PSC 거더 단면내의 콘크리트와 철근의 재료상태를 잘 예측할 수 있었다.

감사의 글

이 논문은 한국과학재단 목적기초연구(R05-2002-000-00495-0)지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고 문헌

1. Esmond, C. Chan, "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Shells with Edge Beams", Department of Civil Engineering, University of California Berkeley, *Report No. UCB/SEMM-82/08*, 1982
2. D. Choudhury, "Analysis of Curved Nonprismatic Reinforced and Prestressed Concrete Box Girder Bridges", Ph. D. Thesis, Division of Structural Engineering, Mechanics and Materials, Department of Civil Engineering, University of California Berkeley, *Report No. UCB/SEMM-86/13*, 1986
3. Antonio R. Mari, "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Three Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Frames", *Report No. CB/SESM- 84/12, Berkeley*, 1984
4. Antonio R. Mari, "Numerical Simulation of the Segmental Construction of Three Dimensional Concrete Frames", *Engineering Structures*, Vol. 22, pp. 586-596., 2000
5. S. Abbas, "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Segmentally Erected, Three Dimensional Cable Stayed Bridges", *Report Nol. UCB/SEMM-93/09, U.C. Berkeley*, 1993
6. Bath, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.