

## 탄성지반 위에 놓인 단면폭이 변화하는 수평 곡선보의 자유진동 해석

### Free Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams with Variable Cross Sectional Width on Elastic Foundation

이 병 구\* · 박 광 규\*\* · 오 상 진\*\*\* · 이 태 은\*\*\*\*

Byoung Koo Lee · Kwang Kyou Park · Sang Jin Oh · Tae Eun Lee

---

#### ABSTRACT

This paper deals with the free vibration analysis of horizontally circular curved beams with variable cross sectional width on elastic foundations. Taking into account the effects of rotatory inertia and shear deformation, differential equations governing the free vibrations of such beams are derived, in which the Winkler foundation model is considered as the elastic foundation. The variable width of beam is chosen as the linear equation. The differential equations are solved numerically to calculate natural frequencies. In numerical examples, the curved beam with the hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-hinged and clamped-clamped end constraints are considered. The parametric studies are conducted and the lowest four frequency parameters are reported in figures as the non-dimensional forms.

---

#### 1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련된 많은 연구가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련된 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 보로 모형화될 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프라인 및 띠기초 등을 들 수 있다.

최근까지 여러 가지 조건을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 정·동적 거동에 관한 연구<sup>(1-11)</sup>가 활발히 이루어지고 있지만, 이들 연구들에서 다루어지고 있는 대상 구조는 대부분 직선 부재이다. 실제 구조인 철도궤도 및 파이프라인 등에는 곡선부가 존재하며, 원형 띠기초, 유체 저장조 등은 주요 구조물의 기초로서 이용되고 있어<sup>(10)</sup> 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 거동특성에 대한 활발한 연구가 수행되어 많은 설계자료가 제시되어야 한다. Laura 등<sup>(12)</sup>이 고찰한 바와 같이 지반 위에 놓인 곡선부재에 대한 유용한 연구결과들이 매

---

\* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

\*\* 정회원 · 대전대학교 토목공학과 교수

\*\*\* 정회원 · 담양대학 토목과 교수

\*\*\*\* 학생회원 · 원광대학교 대학원 박사과정

우 부족한 실정이다. 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동에 관한 연구는 구조 동역학 분야에서 기초적인 연구일 뿐만 아니라 곡선부재를 이용한 토목구조물의 설계자료를 제공할 수 있는 실질적인 연구이다. 공학에서 지반 위에 놓인 구조물의 거동해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 1867년 Winkler<sup>(13)</sup>가 제안한 Winkler 지반모형이다. 이 모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 모형이지만, 비교적 이론전개가 용이하기 때문에 많은 지반 문제들에서 이용되고 있다.

이와 같은 연구배경으로 본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 단면폭이 변화하는 수평 곡선보의 면의 자유진동에 대한 수학적 모형을 전개하고, 해석모형으로부터 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 연구목적이 있다. 또한 실제적인 공학문제에서 필요한 다양한 단부조건에 따른 진동특성을 고찰한다.

## 2. 수학적 모형

그림 1은 탄성지반 위에 놓인 반경이  $\rho$ , 중심각이  $\alpha$ 인 원호형 수평 곡선보의 기하학적 형상을 나타낸 것이다. 이 수평 곡선보가 자유진동하면 점선으로 표시된 진동형을 갖는 동적 변위를 갖게 된다. 이 그림에서  $\theta$ 는 부재축상의 임의점에서 각도이며,  $v$ ,  $\psi$ ,  $\beta$  및  $\phi$ 는 각각 수직 방향 변위, 휨에 의한 단면 회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이다. 한편  $R_v$ 와  $R_r$ 는 지반반력 성분으로 각각 단위길이당 수직반력과 비틀림반력이다. 이 논문에서는 휨과 전단에 의한 단면 회전각  $\psi$ 와  $\beta$ 를 수학적 모형에 고려함으로써 지배미분방정식에 회전관성과 전단변형 효과를 포함한다.

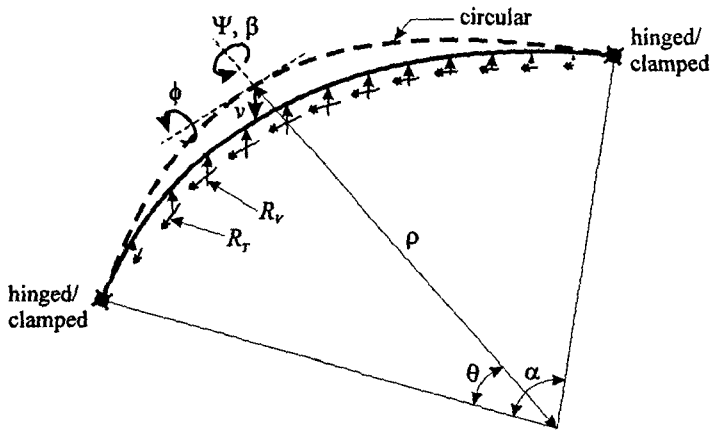


Fig. 1 Circular curved beam resting on foundation and its variables.

그림 2는 진동시 부재 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것으로  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 휨 모멘트, 비틀림 모멘트와 전단력이고,  $F_v$ ,  $C_\psi$  및  $C_\phi$ 는 단위길이당 수직방향 관성력, 회전관성우력 및 비틀림관성우력이다. 부재미소요소에 작용하는 합응력과 관성력 및 반력  $R_v$ ,  $R_r$ 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

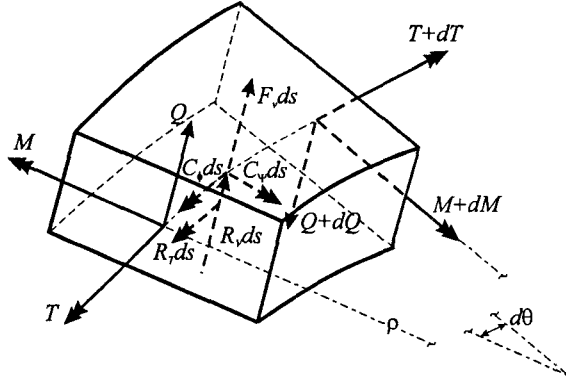


Fig. 2 Stress resultants, inertia forces and restoring forces on an element of curved member.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dQ}{d\theta} - F_v - R_v = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\theta} - Q + \frac{T}{\rho} + C_\psi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{M}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\theta} + C_\phi + R_T = 0 \quad (3)$$

부재단면에 발생하는 합응력  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 식 (4)~(6)과 같이 쓸 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$M = \frac{EI}{\rho} \left( \phi - \frac{d\Psi}{d\theta} \right) \quad (4)$$

$$T = \frac{GI}{\rho} \left( \psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) \quad (5)$$

$$Q = \alpha_s AG \left( \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\theta} - \Psi \right) \quad (6)$$

여기서,  $A$ 는 단면적,  $I$ 와  $J$ 는 부재단면의 단면 2차 모멘트 및 단면 극관성모멘트,  $E$ 와  $G$ 는 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수,  $\alpha_s$ 는 단면형상에 따른 상수이다.

부재가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당 수직방향 관성력  $F_v$ , 회전관성우력  $C_\psi$  및 비틀림관성우력  $C_\phi$ 는 각각 다음과 같다.

$$F_v = -\gamma A \omega^2 v, \quad C_\psi = -\gamma I \omega^2 \Psi, \quad C_\phi = -\gamma J \omega^2 \phi \quad (7-9)$$

여기서,  $\gamma$ 는 부재재료의 질량밀도,  $\omega$ 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

이상의 합응력 및 관성력 식들에서 식 (6)이 전단변형효과이고, 식 (8)이 회전관성효과이다. 식 (1)~(9)의 기본 관계식들을 이용하면 탄성지반 위에 놓인 수평 곡선보의 면외 자유진동을 지배하는 기본 미분방정식을 얻을 수 있다.

본 연구에서는 지반모형으로 Winkler지반 모형을 채택하였다. 그림 3은 Winkler 지반 위에 놓인 수평 곡선보의 단면과 비틀림각으로 인한 단면회전을 나타낸 것으로  $B$ 는 지반과 접하는 단면폭,  $k$ 는 지반계수,  $r$ 은 단면도심을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이다.

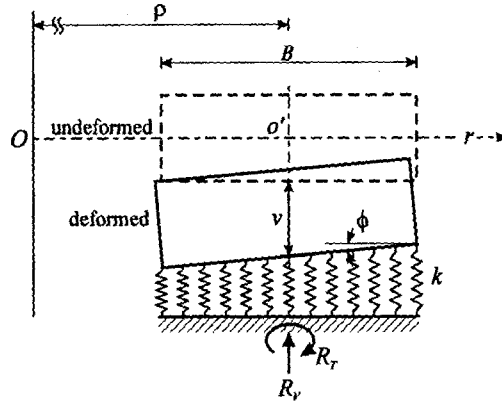


Fig. 4 Restoring forces of Winkler foundation.

부재와 지반이 접하는 면에서 압력과 처짐의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$p(r, \theta) = kz(r, \theta) \quad (10)$$

위의 식에서  $p(r, \theta)$ 는 곡선보축상 임의점에서 곡률중심방향의 압력변화이고  $z(r, \theta)$ 는 곡선보 단면을 따라 변화하는 면의방향 수직변위이다.

곡선보축상 임의점의 중심축에서 수직방향변위는  $v$ 이고,  $\phi$ 는 미소각이므로  $z(r, \theta)$ 는 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - r\phi \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)을 이용하면 부재와 지반이 접하는 면에서 압력분포를 얻을 수 있으며, 이로부터 곡선부재 중심축에 대한 단위길이당 수직반력  $R_v$ 와 비틀림반력  $R_T$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_v = kBv, \quad R_T = \frac{kB^3}{12} \phi \quad (12,13)$$

본 연구에서는 대상부재의 변단면으로 단면폭이 변화하는 구형단면을 채택하였다. 변단면을 정의하기 위하여 부재 좌단에서의 단면폭  $B_a$ 와 우단에서의 단면폭  $B_b$ 의 비 및 좌단의 단면폭과 높이  $H$ 의 비를 다음과 같이 정의한다. 여기서 식 (14)의  $m$ 이 변단면의 단면비이다.

$$m = \frac{B_b}{B_a}, \quad n = \frac{H}{B_a} \quad (14,15)$$

부재의 임의각  $\theta$ 에서 단면폭  $B$ 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$B = B_a(1 + c\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (16.1)$$

$$c = \frac{1}{\alpha}(m-1) \quad (16.2)$$

부재의 단면적  $A$ , 단면 2차 모멘트  $I$  및 단면 극관성모멘트  $J$ 는 다음의 식들과 같다.

$$A = nB_a^2(1 + c\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (17)$$

$$I = \frac{n^3 B_a^4}{12}(1 + c\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (18)$$

$$J = \frac{nB_a^4}{12}\{(1 + c\theta)^3 + n^2(1 + c\theta)\}, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (19)$$

지배미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta = \frac{v}{\rho} \quad (20)$$

$$\Gamma = \frac{G}{E} \quad (21)$$

$$s = \frac{\rho}{\sqrt{I_a/A_a}} \quad (22)$$

$$\lambda = \frac{kB_a\rho^4}{EI_a} \quad (23)$$

$$c_i = \frac{\gamma\omega^2\rho^2}{E}, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (24)$$

여기서  $\eta$ 는  $v$ 를 반경  $\rho$ 로 정규화한 것이며,  $\Gamma$ 는 탄성계수비,  $s$ 는 세장비,  $\lambda$ 는 무차원 지반계수,  $c_i$ 는 무차원 고유진동수이고  $i$ 는 모드 번호이다. 식 (22), (23)에서  $A_a$ ,  $I_a$ 는 각각 보 좌단에서의 단면적 및 단면 2차 모멘트이다.

식 (4), (5), (6)에서  $M'$ ,  $T'$ ,  $Q'$ 을 구하고 이들 식과 합응력식 (4)~(6), 관성력식 (7)~(9), 및 지반반력식 (12), (13)을 동적 평형방정식 (1)~(3)에 대입하고 무차원 변수들인 식 (20)~(24)를 이용하면 탄성지반 위에 놓인 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식들을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta'' = a_1\eta' + (b_1c_i^2 + b_2)\eta + \Psi' - a_1\Psi \quad (25)$$

$$\Psi'' = b_3\eta' + a_1\Psi' + (a_2 - b_3 - c_i^2)\Psi + a_2\phi' - a_1\phi \quad (26)$$

$$\phi'' = (a_3 - 1)\Psi' + a_4\Psi + a_4\phi' + (a_5 + b_4c_i^2)\phi \quad (27)$$

위의 식에서  $a_1 \sim a_5$ ,  $b_1 \sim b_4$ 는 상미분방정식의 계수이며 그 값은 다음 식들과 같다.

$$a_1 = -c(1+c\theta)^{-1} \quad (28.1)$$

$$a_2 = (\Gamma/n^2)\{(1+c\theta)^2+n^2\} \quad (28.2)$$

$$a_3 = -(n^2/\Gamma)\{(1+c\theta)^2+n^2\}^{-1} \quad (28.3)$$

$$a_4 = -c\{3(1+c\theta)^2+n^2\}\{(1+c\theta)^3+n^2(1+c\theta)\}^{-1} \quad (28.4)$$

$$a_5 = (\lambda/\Gamma s^2)\{(1+c\theta)^2+s^2n^2\}\{(1+c\theta)^2+n^2\}^{-1} \quad (28.5)$$

$$b_1 = -1/a_s \Gamma \quad (29.1)$$

$$b_2 = \lambda/a_s \Gamma s^2 \quad (29.2)$$

$$b_3 = -a_s \Gamma s^2 \quad (29.3)$$

$$b_4 = -1/\Gamma \quad (29.4)$$

본 연구에서 곡선부재의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전 및 고정-고정의 단부조건을 고려하였으며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨모멘트가 "0", 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 무차원 변수를 이용하여 회전단, 및 고정단의 경계조건식을 나타내면 각각 식 (30)~(32) 및 (33)~(35)와 같다.

$$\text{회전지점 : } \eta=0, \Psi'=0, \phi=0 \quad (30-32)$$

$$\text{고정지점 : } \eta=0, \Psi=0, \phi=0 \quad (33-35)$$

### 3. 수치해석 결과 및 토의

이상에서 상미분방정식 및 경계조건식이 유도되었으므로 수평 곡선보의 단부조건 및  $\alpha$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\Gamma$ ,  $s$ ,  $\lambda$ 가 주어지면 무차원 고유진동수  $c_i$ 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하였고  $c_i$ 를 산출하기 위해서는 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 이러한 수치해석 방법은 이미 다수의 문헌들<sup>(11,14)</sup>에 의하여 그 타당성이 입증되었다.

이 연구의 수치해석 예에서는 단면 및 재료의 성질로부터 결정되는  $n=0.2$ ,  $\alpha_s=1.5$ (구형단면),  $\Gamma=0.4$ 로 결정하여 수치해석하였고 나머지 무차원 변수  $\alpha$ ,  $m$ ,  $s$ ,  $\lambda$ 는 변수연구에 이용하였다. 수치해석을 실시하기 전에 먼저 Runge-Kutta 법에서 단계길이  $\Delta\theta$ 를 결정하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 그림 4에서처럼  $1/\Delta\theta=20$  즉,  $\Delta\theta=0.05$ 이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다. 실제의 수치해석에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여  $1/\Delta\theta=100$ 으로 수치해석하였다.

그림 5는 회전-회전의 단부조건을 갖는 수평 곡선보의 무차원 지반계수  $\lambda$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수  $c_i$ 의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림에서 무차원 지반계수가 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 증가하다가 일정값으로 수렴함을 알 수 있으며, 그 증가율은 저차모드보다 고차모드에서 크게 나타남을 알 수

있다. 또한 제 1모드의 경우에는 무차원 지반계수의 변화가 무차원 고유진동수에 거의 영향을 미치지 못함을 알 수 있다.

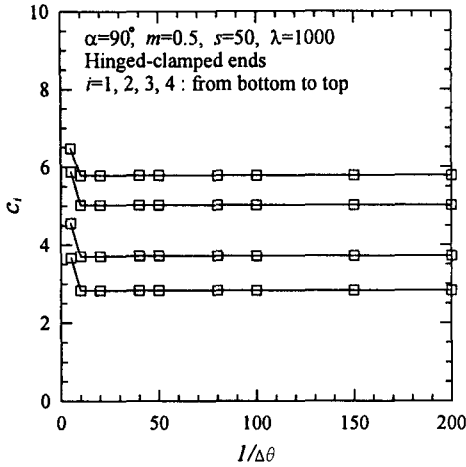


Fig. 4 Convergence analysis.

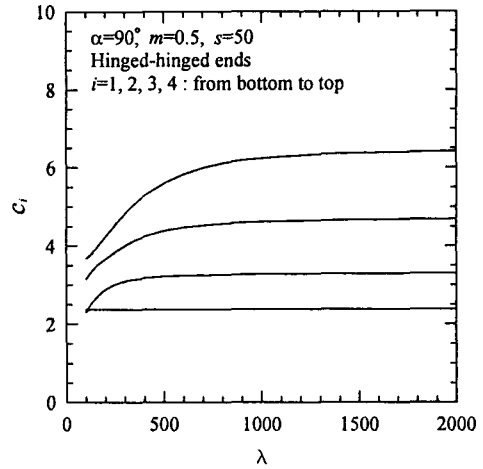


Fig. 5  $c_i$  versus  $\lambda$  curves.

그림 6은 고정-회전의 단부조건을 갖는 수평 곡선보의 단면비  $m$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수  $c_i$ 의 변화를 나타낸 것이다. 단면비가 증가함에 따라 제 1, 2모드는 증가하다가 감소하는 경향을 나타내며 고차모드로 갈수록 증가율이 작아져 단면비의 증가에 따라 무차원 고유진동수가 감소함을 알 수 있다. 이 그림에서 제 1, 2모드가 서로 만나는  $\blacksquare$ 로 표시한  $(m, c_i)$ 점이 존재하며, 이 단면비에서 무차원 고유진동수는 중복근을 갖게 되어 한 개의 고유진동수에서 두 개의 진동형이 가능하다.

그림 7은 고정-고정의 단부조건을 갖는 수평 곡선보의 중심각  $\alpha$ 를 변화시키면서 무차원 고유진동수  $c_i$ 의 변화를 고찰한 것이며, 중심각이 증가할수록 무차원 고유진동수는 감소함을 알 수 있다. 이는 중심각이 증가하면 부재의 수평높이가 증가하므로 진동에 대한 강성이 감소되어 나타나는 결과로 사료된다.

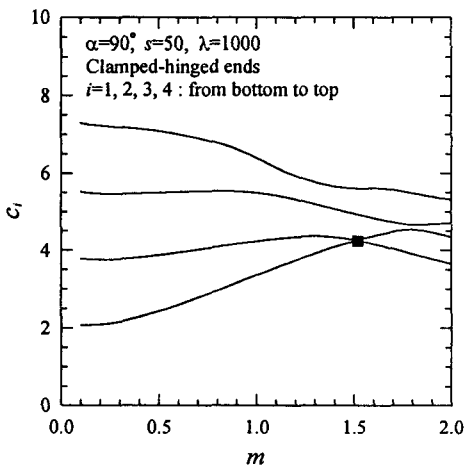


Fig. 6  $c_i$  versus  $m$  curves.

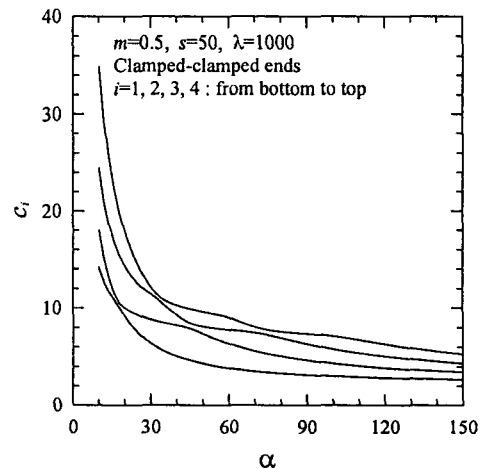


Fig. 7  $c_i$  versus  $\alpha$  curves.

## 5. 결 론

이 논문은 탄성지반 위에 놓인 구형단면을 갖고 단면폭이 변화하는 원호형 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 탄성지반을 Winkler지반으로 모형화하여 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 고려하였다. 단면폭의 변화는 1차식으로 채택하였으며, 단부조건으로는 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전 및 고정-고정의 4가지 단부조건을 채택하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하고, 무차원 고유진동수의 산출은 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 실제의 수치해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하고, 수평 곡선보의 무차원 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계를 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 동하중이 작용하는 구조공학 및 기초공학 분야에서 그 유용성이 기대된다.

## 참고문헌

1. Voltera, E., 1953, "Deflection of Circular Beams resting on an Elastic Foundation obtained by the Method Harmonic Analysis," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 20, pp. 227-237.
2. Wang, T.M. and Stephens, J.E., 1977, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, pp. 149-155.
3. Panayotounakos, D.E. and Teocaris, P.S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.47, pp. 139-144.
4. Issa, M.S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, pp. 291-301.
5. Kukla, S., 1991, "Free Vibration of a Beam Support on a Stepped Elastic Foundation" *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 149, pp. 259-265.
6. Franciosi, C. and Masi, A., 1993, "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil," *Computer & Structures*, Vol. 47, pp. 419-426.
7. 이병구, 1994, "전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석," 한국강구조학회 논문집, 제6권 제3호, pp. 107-115.
8. De Rosa, M.A., 1995, "Free Vibrations of Stepped Beams with Intermediate Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 19, pp. 1-4.
9. 모정만, 1997, 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 박사학위 논문, 원광대학교 대학원.
10. 이병구, 오상진, 이재만, 1998, "탄성지반 위에 놓인 곡선형 Timoshenko 보의 자유진동," 한국전산구조공학회 논문집, 제 11권 제 2호, pp. 273-280.
11. Byoung Koo Lee, Sang Jin Oh and Kwang Kyou Park, 2002, "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundations," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, No. 1, pp. 77-97.
12. Laura. P.A.A. and Maurizi, M.J., 1987, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, pp. 6-9.
13. Winkler, E., 1867, *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit*, Domonocus.
14. Oh, Sang Jin, Lee, Byoung Koo and Lee, In Won, 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 No. 6, pp. 4871-4891.