

## 축방향으로 이동하는 열탄성 보-평판의 동특성 해석 Dynamics of an Axially Moving Thermoelastic Beam-Plate

김도연\*    이우식\*\*  
Kim, Doyeon    Lee, Usik

### ABSTRACT

The use of frequency-dependent spectral element matrix (or dynamic stiffness matrix) in structural dynamics may provide very accurate solutions, while it reduces the number of degrees of freedom to improve the computational efficiency and cost problems. Thus, this paper develops a spectral element model for the coupled thermoelastic beam-plate moving with constant speed under uniform in-plane tension.

### 1. 서    론

연성된 열탄성 구조물의 동특성 해석은 항공 분야와 여러 산업현장에서 중요한 연구분야로 인식되고 있다. 예를 들면, 항공기의 빠른 속도는 공기에 의한 열을 발생하여 열응력을 발생시키고 이는 항공기 구조물의 동특성을 변화시킨다. 또한 원자로의 높은 온도는 내부 구조설계에 있어 중요한 고려사항이며, 용융도금강판의 도금품질에 영향을 주는 진동문제는 용융된 탕의 온도에 영향을 받는다. 움직이지 않는 연성된 열탄성 보나 평판에 대한 연구들은 많이 이루어졌으나 축 방향으로 이동하는 구조물에 대한 연구는 상대적으로 적다.

Danilovskaya<sup>(1)</sup>는 최초로 탄성이론에 근거하여 비연성된 열충격을 받는 반-무한구조물에 관한 문제를 풀었다. Biot<sup>(2)</sup>는 연성된 열탄성에 대한 이론을 공식화하였고, 탄성변화가 온도에 영향을 주지 않는다는 비연성이론의 모순을 제거하였다. Boley<sup>(3)</sup>와 Kovalenko<sup>(4)</sup>는 온도장과 구조물 변형사이의 상호작용을 고려하지 않고 보와 평판의 진동에 대하여 연구하였으며, Massalas<sup>(5),(6)</sup>는 연성된 열탄성 보와 평판에 대하여 라플라스변환을 이용하여 대수방정식을 유도하고 연구하였다. Nowacki<sup>(7)</sup>는 비연성, 연성된 열탄성에 대한 문제등 여러가지 경우에 대하여 정리하고 잘 발전시켰다. Eslami와 Vahedi<sup>(8)</sup>는 연성된 열탄성 보 문제에 대하여 유한요소를 사용하여 해석하였다.

본 연구에서는 축방향 장력을 받으면서 일정한 속도로 이동하는 연성된 열탄성 보-평판의 진동해석을 위한 스펙트럴 요소모델을 유도하고자 한다.

### 2. 운동 방정식

길이  $L$ , 두께  $h$  인  $x$ 방향으로 일정한 속도  $c$ 로 움직이는 얇은 보-평판을 생각한다. 보-평판의 물성치는 단위 부피당 질량  $\rho$ , 탄성계수  $E$ , 포아송의 비  $\nu$ 로 한다. 보-평판의 굽힘변위를  $w(x,t)$ 로 나타내면 보-평판의 운동에너지  $T$ 와 포텐셜에너지  $U$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^L \left[ c^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - M_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \quad (1)$$

\* 인하대학교 기계공학과 석사과정

\*\* 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수

$$\text{여기서 } M_T = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta T z dz$$

분포하중  $f(x,t)$ 와 경계에서의 전단력과 굽힘모멘트에 의한 가상일은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta W = \int_0^L f(x,t) \delta x + M_1 \delta \phi_1 + M_2 \delta \phi_2 + Q_1 \delta w_1 + Q_2 \delta w_2 \quad (2)$$

여기서  $f(x,t)$ 는 분포하중을 나타내며  $(M_1, Q_1, \phi_1)$ 와  $(M_2, Q_2, \phi_2)$ 는 각각  $x=0$ 과  $x=L$ 에서의 모멘트, 전단력, 기울기를 나타낸다. 기울기는 굽힘변위의 미분으로 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_1(t) = \frac{\partial w(0,t)}{\partial x}, \quad \phi_2(t) = \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} \quad (3)$$

식(1)과 (2)에 해밀톤의 원리(Hamilton's principle)를 적용하면

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (4)$$

다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} = f(x,t) \right\} \delta w dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -Q(x,t) \delta w \Big|_0^L + Q_1 \delta w_1 + Q_2 \delta w_2 \right\} dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ M(x,t) \delta \theta \Big|_0^L + M_1 \delta \phi_1 + M_2 \delta \phi_2 \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)의 모멘트  $M(x,t)$ 와 전단력  $Q(x,t)$ 는 다음과 같이 정의 되었다.

$$\begin{aligned} Q(x) &= -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \rho h c \left( \frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial M_T}{\partial x} \\ M(x) &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_T \end{aligned} \quad (6)$$

식(5)로부터 이동하는 연성된 열탄성 보-평판에 관한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

여기서 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \{ w(0) = w_1 \text{ or } Q(0) = Q_1 \}, \{ \phi(0) = \phi_1 \text{ or } M(0) = -M_1 \} \text{ at } x = 0 \\ & \{ w(L) = w_2 \text{ or } Q(L) = -Q_2 \}, \{ \phi(L) = \phi_2 \text{ or } M(L) = M_2 \} \text{ at } x = L. \end{aligned} \quad (8)$$

또한, 에너지 보존에 의해서 온도장에 관한 지배방정식은 다음과 구할 수 있다.<sup>(9),(10)</sup>

$$-k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho c_p c \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T_0 \alpha E}{1-\nu} \left[ -z \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + \frac{(1+\nu) \alpha}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial t} \right] = 0 \quad (9)$$

여기서  $k, c_p, \alpha$ 는 각각 열전도율(thermal conductivity), 비열, 열팽창계수이며  $T_0$ 는 절대기준온도이다.  $x$ 방향에 대한 열 유동(Heat flux)  $q_x$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p c T \quad (10)$$

### 3. 스펙트럴 요소 해석

이동하는 연성된 열탄성 보-평판의 진동응답을 다음과 같이 스펙트럴형태로 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad T(x,z,t) = \sum_{n=1}^N \bar{T}_n(x,z) e^{i\omega_n t} \quad (11)$$

여기서  $W_n(x)$  와  $T_n(x,z)$ 는 주파수  $\omega_n = 2\pi n/T^*$  ( $n=1,2,\dots,N$ )에 각각 대응하는 푸리에 계수이다.  $N$ 은 해석에 사용되는 푸리에 계수의 개수이며,  $T^*$ 는 시간창의 길이이다.  $N$ 과  $T^*$ 사이에는 다음과 같은 관계가 존재한다.

$$N = 2 f_{\text{NyQ}} T^* \quad (12)$$

여기서  $f_{\text{NyQ}}$ 는 Nyquist주파수이며 단위는 Hz이다. 식(11)에 사용된 아래첨자  $n$ 과 합산기호는 이하의 식에서 간략한 표현을 위해 생략한다.

식(7), (9)에 식(11)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + (\rho h c^2 - N_x) \frac{d^2 W}{dx^2} + 2i \rho h c \omega \frac{dW}{dx} - \rho h \omega^2 W + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{T} z dz \right) = 0 \quad (13)$$

$$-k \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) + \rho c_p c \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + i \rho c_p \bar{T} + i \frac{T_0 \alpha E}{1-\nu} \left[ -z \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{(1+\nu)\alpha}{1-2\nu} \bar{T} \right] = 0 \quad (14)$$

식(14)의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$\bar{T}(x,z) = \Theta(x) Z(z) \quad (15)$$

여기서  $Z(z)$ 는 두께방향의 경계조건을 만족하는 선택된 함수이고  $\Theta(x)$ 는 해석적으로 결정해야 하는 미지의 함수이다.

식(15)를 식(14)에 대입한 후  $Z(z)$ 를 식(14)에 곱한 후 적분을 하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.<sup>(11),(12)</sup>

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - \frac{c}{\beta} \frac{d\Theta}{dx} - \left[ -\zeta_2 + i\omega \left( \frac{1}{\beta} + \frac{(1+\nu)\alpha\eta}{1-2\nu} \right) \right] \Theta + i\omega\eta\zeta_1 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (16)$$

여기서

$$\beta = \frac{k}{\rho c_p}, \quad \eta = \frac{T_0 \alpha E}{k(1-\nu)}$$

$$\zeta_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z(z)^2 dz, \quad \zeta_2 = \frac{1}{\zeta_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z(z) z dz, \quad \zeta_3 = \frac{1}{\zeta_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z(z) \frac{d^2 Z}{dz^2} dz$$

식(15)를 식(13)에 대입하면

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \left( c_D^2 - \frac{N_x}{D} \right) \frac{d^2 W}{dx^2} + 2i c_D \Omega^2 \frac{dW}{dx} - \Omega^4 W + \frac{E\alpha\zeta_0\zeta_1}{D(1-\nu)} \frac{d^2 \Theta}{dx^2} = 0 \quad (17)$$

여기서  $c_D = c \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ ,  $\Omega^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$

식(16)과 식(17)의 일반적 해를 다음과 같이 가정한다.

$$W(x) = A e^{\lambda x}, \quad \Theta(x) = B e^{\lambda x} \quad (18)$$

여기서  $\lambda$  는 파수(wave number)이다.

식(18)을 식(16), (17)에 대입하고 행렬형태로 나타내면 다음과 같은 관계를 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \lambda^4 + \left(c_D^2 - \frac{N_x}{D}\right)\lambda^2 + 2ic_D\Omega^2\lambda - \Omega^4 & \frac{E\alpha\zeta_0\zeta_1}{D(1-\nu)} \\ i\omega\eta\zeta_1\lambda^2 & \lambda^2 - \frac{c}{\beta}\lambda + \left[\zeta_2 - i\omega\left(\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha\eta(1+\nu)}{1-2\nu}\right)\right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

식(19)가 해를 가지기 위한 조건으로부터 분산관계(dispersion relation)에 대한 특성방정식을 유도할 수 있다.

$$\lambda^6 + C_1\lambda^5 + C_2\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_4\lambda^2 + C_5\lambda + C_6 = 0 \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{c}{\beta} \\ C_2 &= c_D^2 - \frac{N_x}{D} - i\omega\left(\frac{1}{\beta} + \mu\right) + \frac{i\omega E\alpha\eta\zeta_0\zeta_1^2}{D(1-\nu)} + \zeta_2 \\ C_3 &= \frac{cN_x}{\beta D} + 2ic_D\Omega^2 - \frac{c}{\beta}c_D^2 \\ C_4 &= i\omega\frac{N_x}{D}\left(\frac{1}{\beta} + \mu\right) - i\frac{c_D}{\beta}(\omega c_D + 2c\Omega^2) - i\omega c_D^2\mu + \zeta_2\left(c_D^2 - \frac{N_x}{D}\right) - \Omega^4 \\ C_5 &= \frac{c}{\beta}\Omega^4 + c_D\Omega^2\left[2\omega\left(\frac{1}{\beta} + \mu\right) - 2i\zeta_2\right] \\ C_6 &= \Omega^4\left[i\omega\left(\frac{1}{\beta} + \mu + \zeta_2\right)\right] \\ \mu &= \frac{\alpha\eta(1+\nu)}{1-2\nu} \end{aligned} \quad (21)$$

식(20)의 여섯개의 근을 이용하여 다음과 같이 식(16), (17)의 일반해를 나타낼 수 있다.

$$W(x) = \sum_{r=1}^6 A_r e^{\lambda_r x}, \quad \Theta(x) = \sum_{r=1}^6 \varepsilon_r A_r e^{\lambda_r x} \quad (22)$$

여기서

$$\varepsilon_r = \frac{(1-\nu)[N_x\lambda_r^2 + D(\Omega^4 - \lambda_r^4) - Dc_D\lambda_r(2i\Omega^2 + c_D\lambda_r)]}{E\alpha\zeta_0\zeta_1\lambda_r^2} \quad (r=1,2,3,4,5,6) \quad (23)$$

식(22)를 행렬식으로 표현하면

$$W = [E]\{A\}, \quad \Theta = [\bar{E}]\{A\} \quad (24)$$

여기서

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}] &= [e^{\lambda_1 x} \quad e^{\lambda_2 x} \quad e^{\lambda_3 x} \quad e^{\lambda_4 x} \quad e^{\lambda_5 x} \quad e^{\lambda_6 x}] \\
[\overline{\mathbf{E}}] &= [\varepsilon_1 e^{\lambda_1 x} \quad \varepsilon_2 e^{\lambda_2 x} \quad \varepsilon_3 e^{\lambda_3 x} \quad \varepsilon_4 e^{\lambda_4 x} \quad \varepsilon_5 e^{\lambda_5 x} \quad \varepsilon_6 e^{\lambda_6 x}] \\
\{\mathbf{A}\} &= [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6]^T
\end{aligned} \tag{25}$$

유한한 길이  $L$ 을 가지는 보-평판에 대한 스펙트럴요소의 노드 자유도는 다음과 같이 정의된다.

$$W_1 = W(0), \quad \phi_1 = W'(0), \quad \Theta_1 = \Theta(0), \quad W_2 = W(L), \quad \phi_2 = W'(L), \quad \Theta_2 = \Theta(L) \tag{26}$$

여기서 (')은 공간좌표  $x$ 에 관한 미분을 나타낸다.

식(26)을 식(24)에 대입하면 다음과 같이 다음과 같이 노드자유도벡터  $\{\mathbf{d}\}$ 와 상수벡터  $\{\mathbf{A}\}$ 사이의 관계를 얻을 수 있다.

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{P}(\omega)]\{\mathbf{A}\} \tag{27}$$

여기서

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{d}\} &= \{W_1 \quad \phi_1 \quad \Theta_1 \quad W_2 \quad \phi_2 \quad \Theta_2\}^T \\
[\mathbf{P}(\omega)] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{E}(0)] \\ [\mathbf{E}'(0)] \\ [\overline{\mathbf{E}}(0)] \\ [\mathbf{E}(L)] \\ [\mathbf{E}'(L)] \\ [\overline{\mathbf{E}}(L)] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{28}$$

식(27)을 식(24)에 대입하면

$$\begin{aligned}
W &= [\mathbf{E}][\mathbf{P}]^{-1}\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{d}\} \\
\Theta &= [\overline{\mathbf{E}}][\mathbf{P}]^{-1}\{\mathbf{d}\} = [\overline{\mathbf{N}}]\{\mathbf{d}\}
\end{aligned} \tag{29}$$

여기서  $[\mathbf{N}]$ ,  $[\overline{\mathbf{N}}]$ 는 동적형상함수(dynamic shape function)이다.

스펙트럴요소 행렬을 유도하기 위해 식(13), (14)를 weak form으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left\{ DW'''' + (\rho hc^2 - N_x)W'' + 2i\omega \rho hc W' - \rho h \omega^2 W + \frac{E\alpha\zeta_0\zeta_1}{1-\nu}\Theta'' \right\} \delta W \, dx &= 0 \\
\int_0^L \left\{ -k\Theta'' + \rho c_p c \Theta' + [-k\zeta_2 + i\omega \rho c_p + i\omega k\mu]\Theta - i\omega k\eta\zeta_1 W'' \right\} \delta \Theta \, dx &= 0
\end{aligned} \tag{30}$$

식(30)을 부분적분을 수행하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left\{ DW''\delta W'' - [(\rho hc^2 - N_x)W' + i\omega c W]\delta W' - \rho h(\omega^2 W - i\omega c W')\delta W + \frac{E\alpha\zeta_0\zeta_1}{1-\nu}\Theta\delta W'' \right\} dx \\
+ M(x)\delta W \Big|_0^L - Q(x)\delta W' \Big|_0^L = 0
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left\{ (k\Theta' - \rho c_p c \Theta)\delta \Theta' + [-k\zeta_2 + i\omega \rho c_p + i\omega k\mu]\Theta\delta \Theta - i\omega k\eta\zeta_1 W''\delta \Theta \right\} dx \\
+ H(x)\delta \Theta \Big|_0^L = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

여기서  $H(x) = -k\Theta' + \rho c_p c \Theta$ 이다.

식(29)를 식(31)과 (32)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{d}\}^T (\{\mathbf{S}_s\} \{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{f}_s\}) &= 0 \\ \{\delta \mathbf{d}\}^T (\{\mathbf{S}_T\} \{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{f}_T\}) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_s] &= \int_0^L \left\{ D[\mathbf{N}^*]^T [\mathbf{N}^*] - (\rho h c^2 - N_x)[\mathbf{N}'^T [\mathbf{N}'] - i\omega c[\mathbf{N}'^T [\mathbf{N}] - \rho h \omega^2 [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]] \right. \\ &\quad \left. + i\omega \rho h c([\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}'] - [\mathbf{N}'^T [\mathbf{N}]] + \frac{E\alpha\zeta_0\zeta_1}{1-\nu} [\mathbf{N}^*]^T [\bar{\mathbf{N}}]) \right\} dx \\ [\mathbf{S}_T] &= \int_0^L \left\{ k[\bar{\mathbf{N}}]^T [\bar{\mathbf{N}}] - \rho c_p c [\bar{\mathbf{N}}]^T [\bar{\mathbf{N}}] + (-k\zeta_2 + i\omega \rho c_p + i\omega k\mu) [\bar{\mathbf{N}}]^T [\bar{\mathbf{N}}] \right. \\ &\quad \left. + i\omega k\eta\zeta_1 [\bar{\mathbf{N}}]^T [\mathbf{N}'] \right\} dx \\ \{\mathbf{f}_s\} &= [Q_1 \quad -M_1 \quad 0 \quad -Q_2 \quad M_2 \quad 0]^T \\ \{\mathbf{f}_T\} &= [0 \quad 0 \quad -H_1 \quad 0 \quad 0 \quad H_2]^T \end{aligned} \quad (34)$$

식(33)에서 다음과 같이 외력과 자유도와의 관계를 얻을 수 있다.

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{S}(\omega)] \{\mathbf{d}\} \quad (35)$$

여기서  $\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}_s\} + \{\mathbf{f}_T\}$ ,  $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}_s] + [\mathbf{S}_T]$ 이다.

스펙트럴요소행렬식  $[\mathbf{S}(\omega)]$ 는 주파수의 함수로 표현되며, 유한요소에서 사용되는 유한요소의 조립과정(assembly)과 같은 방법으로 전체구조물에 대한 스펙트럴요소를 구성할 수 있다. 결합된 전역행렬에 경계조건을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\mathbf{S}^g(\omega)] \{\mathbf{d}^g\} = \{\mathbf{f}^g\} \quad (36)$$

여기서  $[\mathbf{S}^g(\omega)]$ 는 전역스펙트럴요소행렬이며,  $\{\mathbf{d}^g\}$ 는 전역자유도벡터,  $\{\mathbf{f}^g\}$ 는 전역외력벡터이다.

#### 4. 수치예제와 검토

수치해석 예제로서 생각한 보-평판은 양 끝단이 단순지지된 균등한 보-평판이며 두께방향으로의 온도에 관한 경계조건은  $z=h/2$ 에서는  $40^\circ\text{C}$ ,  $z=-h/2$ 에서는  $20^\circ\text{C}$ 를 유지하고 있다. 보-평판의 물성치는 탄성계수  $E=200 \text{ GPa}$ , 포아송의 비  $\nu=0.333$ , 단위 부피당 질량  $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$ 이고 두께, 길이는 각각  $h=0.05 \text{ m}$ ,  $L=1.5 \text{ m}$ 이며 축방향 장력  $N_x=60000 \text{ N/m}$ 이다. 또한 열전도율  $k=46.2 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ , 열팽창계수  $\alpha=15.1 \times 10^{-6}$ , 비열  $c_p=0.46 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$ 이다.

탄성 보-평판과 연성된 열탄성 보-평판의 두가지 경우에 대하여 스펙트럴요소를 이용하여 계산된 고유진동수와 유한요소법에 의해 계산된 고유진동수를 서로 비교하였다. 사용된 유한요소모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_s] \{\ddot{\mathbf{d}}_s\} + [\mathbf{C}_s] \{\dot{\mathbf{d}}_s\} + [\mathbf{K}_s] \{\mathbf{d}_s\} + [\mathbf{K}_{cs}] \{\mathbf{d}_T\} &= 0 \\ [\mathbf{C}_T] \{\dot{\mathbf{d}}_T\} + [\mathbf{C}_{cT}] \{\dot{\mathbf{d}}_s\} + [\mathbf{K}_T] \{\mathbf{d}_T\} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

여기서,  $\{\mathbf{d}_s\}$ ,  $\{\mathbf{d}_T\}$ 는 각각 구조와 온도에 관한 노달 자유도 벡터이다.

식(37)을 연립하여 풀기 위해서 다음과 같이 정리한다.<sup>(8)</sup>

$$\begin{bmatrix} [C_T] & & & & & \\ & [I] & & & & \\ & & [M_s] & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_T \\ \dot{d}_s \\ \ddot{d}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_T] & & & & & \\ & [C_{CT}] & & & & \\ & & -[I] & & & \\ & & & [K_{CS}] & & \\ & & & & [K_s] & \\ & & & & & [C_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_T \\ d_s \\ d_s \end{Bmatrix} = 0 \quad (38)$$

Table 1은 일반적인 탄성 보-평판에 관한 고유진동수를 보여주며 Table 2는 연성된 열탄성 보-평판에 관한 고유진동수를 보여준다. Table1과 Table2에서 알 수 있듯이 스펙트럴요소법에 의한 결과는 사용된 요소의 개수가 단지 한 개 임에도 불구하고 요소수를 많이 사용한 유한요소법에 의한 해석결과와 비슷함을 볼 수 있다. 즉 스펙트럴요소모델은 유한요소모델에서 사용되는 요소의 개수보다 더 적은 개수의 요소를 사용하고도 더 정확한 결과를 얻을 수 있다.

또한 Table 2로부터 알 수 있듯이, 열탄성 보-평판의 고유진동수가 탄성 보-평판의 고유진동수보다 약간 높은 것을 알 수 있다. 이는 두께방향의 온도 구배 때문에 생기는 모멘트의 영향 때문이다. Fig 1은  $z=h/2$ 에서의 온도변화에 따른 연성된 열탄성 보-평판의 고유진동수와 탄성 보-평판의 고유진동수와 비를 나타낸다.  $z=-h/2$ 에서의 온도  $20^\circ C$ 와 차이가 많이 날수록 고유진동수의 비가 커짐을 알 수 있다.

Table 1. Comparison of the natural frequencies (Hz) for the elastic beam-plate

Mode	FEM					SEM 1 Element
	5 Element	10 Element	20 Element	50 Element	100 Element	
1	53.65	53.65	53.64	53.64	53.64	53.64
2	214.47	214.14	214.14	214.12	214.12	214.11
3	485.38	481.82	481.58	481.56	481.56	481.56
4	875.69	857.40	856.07	855.98	855.98	855.98
5	1484.35	1342.66	1337.73	1337.39	1337.38	1337.38

Table 2. Comparison of the natural frequencies (Hz) for the coupled thermoelastic beam-plate

Mode	FEM					SEM 1 Element
	5 Element	10 Element	20 Element	50 Element	100 Element	
1	53.86	53.85	53.85	53.85	53.85	53.85
2	215.27	214.96	214.94	214.94	214.94	214.94
3	487.08	483.66	483.43	483.42	483.42	483.41
4	878.29	860.65	859.37	859.29	859.28	859.28
5	1484.35	1347.68	1342.88	1342.55	1342.54	1342.54

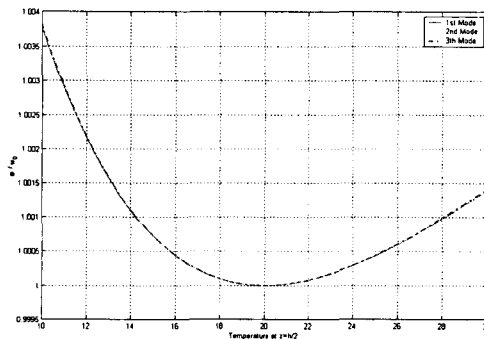


Fig. 1 The non-dimensional natural frequencies vs. the temperature at  $z=h/2$ .

## 6. 결 론

본 논문에서는 축 방향 장력을 받으면서 일정한 속도로 이동하는 연성된 열탄성 보-평판에 대한 스펙트럴 요소모형을 유도하였다. 본 연구에서 유도된 스펙트럴 요소모형이 기존의 FEM 모델에 비해 우수한 해석결과를 제공함을 수치예제를 통해 확인하였으며, 특히 고차모드에서 그 우수성이 뚜렷함을 확인하였다. 또한 두께방향으로의 온도구배에 따른 모멘트의 영향으로 온도구배가 커지면 커질수록 고유진동수가 증가함을 확인하였다.

### 참고 문헌

1. Danilovskaya, V., "Thermal Stresses in an Elastic Half-Space Due to Sudden Heating of its Boundary," *Prikl Mat. Mekh.*, Vol. 14, 1950, pp. 316-324.
2. Biot, M., "Thermoelasticity and Irreversible Thermo-dynamics," *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, 1956, pp. 240-253.
3. Boley, B. A. and Barber, A. D., "Dynamic Response of Beams and Plates to Rapid heating," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, 1957, pp. 413-416.
4. Kovalenko, A., *Thermoelasticity (Basic Theory and Applications)*, Groningen, The Netherlands Wolters-Noordhoff, 1969.
5. Massalas, C., Dalamangas, A., and Tzivanidis, G., "A note of the Dynamics of Thermoelastic Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 81, No.2, 1982, pp. 303-306.
6. Massalas, C., Kalpakidis, V., "Coupled Thermoelastic Vibrations of a Timoshenko Beam," *Journal of Appl. Engng Sci.* Vol. 22, No.5, 1984, pp. 459-463.
7. Nowacki, W., *Thermoelasticity*, Pergamon Press, London, 1986.
8. M. R. Eslami, H. Vahedi, "Coupled Thermoelasticity Beam Problems," *AIAA Journal*, Vol. 27, No.5, 1988, pp. 662-665.
9. Carlaw, H. S., Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, London, 1959.
10. U, Lee., "Thermal and Electromagnetic Damping Analysis and Its Application," Stanford Univ., California, 1984.
11. A.N. Bercin, "Free Vibration Solution for Clamped Orthotropic Plates Using Kantorovitch Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.196, No.2, 1996, pp243-247.
12. W.C. Xie, I. Elishakoff, "Buckling Mode Localization in Rib-Stiffened Plates with Misplaced Stiffeners," *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol.11, 2000, pp. 1559-1574.
13. Reddy, J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates*, Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
14. Ugral, A. C., *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, NewYork, 1999.
15. Doyle, James F., *Wave Propagation in Structures*, Springer-Verlag, NewYork, 1997.