

전단 및 단면 관성효과를 고려한 Cross-ply 복합재 회전 외팔보의 면외방향 굽힘 진동해석

Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Cross-ply Composite Beams

이승현*·신상하*·유홍희**

Seung Hyun Lee, Sang Ha Shin and Hong Hee Yoo

Key Words : Flapwise Bending Vibration (면외방향 굽힘진동), Composite (복합재), Rotating Cantilever Beam (회전 외팔보), Shear Effect (전단 효과), Rotary Inertia Effect (단면관성 효과), Slenderness Ratio(세장비), Motion Induced Stiffness Variation (강체운동에 의한 강성변화), Natural Frequency (고유진동수)

ABSTRACT

A modeling method for the modal analysis of a rotating cross-ply composite beam based on Timoshenko beam theory is presented. To analyze the composite beam exactly, the effects of shear deformation and rotary inertia are included. Linear differential equations of motion are derived using the assumed mode method. For the modeling, hybrid deformation variables are employed and approximated to derive the equations of motion. The effects of the dimensionless angular velocity and the slenderness ratio parameter on the variations of modal characteristics are investigated.

1. 서론

복합재를 이용한 외팔 보 구조물은 헬리콥터 회전익과 같은 공학적 예제에서 발견할 수 있다. 이러한 구조물을 새로 설계하거나 혹은 기존의 성능을 평가하거나 개선하려면 그의 진동 특성을 정확히 파악하는 것이 필수적이라 할 수 있다. 회전운동을 하는 외팔 보의 진동특성은 고정된 외팔 보의 그것과 다르다. 회전운동은 원심방향 관성력을 발생시키고 이는 시스템의 굽힘강성을 증가시키는 효과를 초래하며 따라서 회전속도의 변화에 따라서 보의 진동특성도 변화하게 된다. 이러한 구조물의 소재로는 일반적으로 고강도와 경량 특성을 동시에 만족시키는 복합재가 널리 이용된다. 또 복합재는 섬유 배치각과 적층 수의 선택으로 그 구조 강성을 조절할 수 있는 특징도 가지고 있다. 하지만 복합재는 인장강성에 비해 매우 낮은 전단강성(graphite-epoxy 1/30) 때문에 등방성 물질보다 전단변형에 대한 고려가 더욱 중요하다. 또 잘 알려진 것처럼 세장비가 비교적 작은 값을 가지는 구조물(보가 두껍거나 길이가 짧음) 일수록 전단 및 단면관성 효과의 고려가 필요하다. 결과적으로, 복합재를 이용한 회전 외

팔보의 진동특성은 회전에 의하여 발생하는 강성 변화와 복합재 자체의 강성변화 특성을 동시에 적절히 고려하여 예측되어야 하며 전단변형 및 단면관성에 대한 고려도 필요하다.

등방성 재료의 회전 외팔보 진동 특성에 대한 연구로는 에너지 방법을 이용한 최초의 해석적 내용이 참고문헌(1)에 나타나며 참고문헌(2)는 회전 외팔보의 운동방정식을 직접 유도한 최초의 내용을 담고 있다. 참고문헌(3)에는 기본적으로 참고문헌(2)에 제시된 모델링 방법을 기초로 한 전산 수치해석 방법을 이용한 초기 연구내용을 담고 있으며 이러한 모델링에 기초한 연구들이 최근까지 많이 이루어져 왔다. 고정된 복합재 구조물의 진동특성에 대해서는 참고문헌(4-8)을 참조할 수 있다. 특히 참고문헌(6-8)은 cross-ply 적층에 관한 연구이다. 하지만 회전운동을 하는 복합재 구조물의 진동에 대한 연구는 문헌상에 별로 알려져 있지 않다. 참고문헌(9)는 인장 및 굽힘 방향 운동방정식이 모두 선형으로 유도되는 최근 이루어진 새로운 모델링 방법에 의한 연구 결과들을 보여준다. 본 연구는 이 모델링 방법에 기초하여 세장비가 비교적 작은 복합재 외팔보의 진동해석을 위해서 전단효과와 단면 관성효과를 고려한 Timoshenko 보 이론에 근거한 모델링을 유도하였고 이를 바탕으로 회전각속도, 세장비의 변화에 따른 해석결과를 도출하여 Euler 보이론의 해석결과와 그 차이를 등방성, 이방성 두 물질의 경우와 비교하여 진동 특성을 분석 규명하였다.

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 정희원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02)2290-0446

2. 운동방정식

2.1 복합재 외팔보의 탄성에너지

전단변형을 고려한 이방성 복합재의 k 번째 구성 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 2Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (1)$$

여기서 $Q_{ij}^{(k)}$ 는 k 번째 층의 off-axis 축 강성치를 의미한다. 또한 전단변형을 고려한 외팔보의 변위는 아래와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z\alpha(x) \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 u_0, w 는 각각 보의 인장방향, 면외방향 변위이고 α 는 회전각이다. (1)과 (2)를 이용해 복합재 외팔보의 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int \left[A_{11}\varepsilon_x^2 + 2B_{11}\varepsilon_x k_y + D_{11}k_y^2 + A_{55} \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (3)$$

여기서 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 복합재 보의 각 층의 특성치를 적분하여 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} dz = b \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z dz = \frac{b}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z^2 dz = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 z_k 와 z_{k-1} 는 k 번째 층의 윗면과 아래면까지의 두께 방향 거리, N 은 적층 수를 나타낸다. (3)식에서 또한 인장 및 굽힘 변위율들은 Fig.1 에 나타난 변형변수 s, u_3, α 를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \quad (5)$$

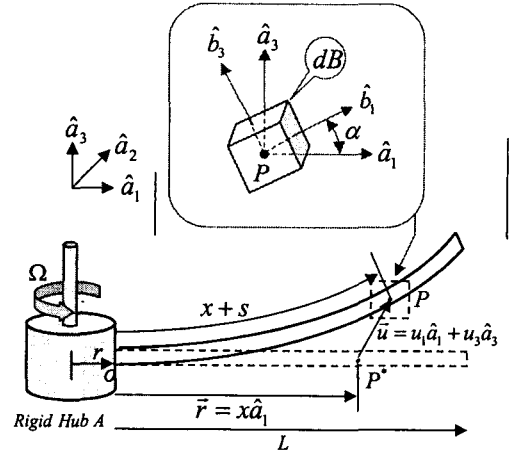


Fig.1. Configuration of a rotating cantilever beam

위식을 (3)식에 대입하면, 전단변형을 고려한 Timoshenko 보 이론의 탄성에너지를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int \left[A_{11} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \left(\alpha + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (6)$$

Euler 보이론에서는 $k_y = -\frac{\partial u_3}{\partial x}$ 이므로 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int \left[A_{11} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (7)$$

근사화된 상미분 운동방정식을 구하기 위해서 변형변수들을 다음과 같이 근사화한다.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \\ u_3(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \cdots \\ \alpha(x, t) &= \sum_{j=1}^{\mu_5} \phi_{5j}(x) q_{5j}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\phi_{1j}, \phi_{3j}, \phi_{5j}$ 는 s, u_3, α 를 위한 가상모드들이고, q_{1j}, q_{3j}, q_{5j} 는 일반좌표, 그리고 μ_1, μ_3, μ_5 는 사용된 일반좌표의 개수이다.

2.2 진동방정식

Kane 의 방법을(참고문헌 (10)) 이용하면 단면 관성효과를 고려한 탄성체 운동방정식은 다음의 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$F_i + F_i^* = 0 \quad (i = 1, \dots, \mu)$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$F_i^* = -\int \rho \bar{v}_i^p \cdot \bar{a}^p dx - \int \bar{\omega}_i^{dB} \cdot (\bar{\alpha}^{dB} \cdot \bar{I} + \bar{\omega}^{dB} \times \bar{I} \cdot \bar{\omega}^{dB}) dx \quad (9)$$

여기서 $\mu = \mu_1 + \mu_3 + \mu_5$ 이다. 식(9)에서 \bar{v}^p 는 질점 P 의 속도, U 는 탄성에너지, 그리고 ρ 와 L 은 보의 단위 길이당 질량과 길이를 의미한다. $\bar{\omega}^A$ 는 보가 부착된 강체 A 의 각속도를, $\bar{\omega}^{dB}$ 와 $\bar{\alpha}^{dB}$ 는 변형에 따른 보의 임의 미소부분 dB 의 각속도와 각가속도, 그리고 \bar{I} 는 dB 의 단위길이당 관성 Dyadic 을 나타내며 벡터 요소로 표시하면 아래와 같이 나타난다.

$$\bar{v}^o = r\Omega \hat{a}_2$$

$$\bar{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3$$

$$\bar{v}^p = \bar{v}^o + {}^A\bar{v}^p + \bar{\omega}^A \times (\bar{r} + \bar{u})$$

$$\bar{\omega}^{dB} = \bar{\omega}^A + {}^A\bar{\omega}^{dB} = \Omega \hat{a}_3 - \dot{\alpha} \hat{a}_2 \quad (10)$$

$$\bar{\alpha}^{dB} = \dot{\Omega} \hat{a}_3 - \ddot{\alpha} \hat{a}_2$$

$$\bar{I} = \rho \frac{I_2}{A_0} \hat{a}_2 \hat{a}_2$$

여기서 I_2 는 \hat{a}_2 축에 대한 면적 모멘트 그리고 A_0 는 보의 단면적을 나타낸다. 식(6)과 식(10)을 식(9)에 대입하고 대칭 적층을 가정하면 인장방향 운동과의 연성이 사라져서 단면관성효과를 고려한 Timoshenko 이론에 근거한 운동방정식이 얻어지고, 식(7)과 (10)을 단면관성효과를 제외한 식(6)에 대입하면 Euler 이론에 의한 방정식이 얻어진다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} (\int \rho \phi_{3i} \phi_{3j} dx) \ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} (\int A_{55} \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx) q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_5} (\int A_{55} \phi_{3i,x} \phi_{3j} dx) q_{3j}$$

$$+ \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} \left\{ r \rho \int (l-x) \phi_{3i}' \phi_{3j}' dx q_{3j} + \frac{1}{2} \rho \int (l^2 - x^2) \phi_{3i}' \phi_{3j}' dx q_{3j} \right\} = 0$$

$\langle i = 1, \dots, \mu_3 \rangle$

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} \left(\int \rho \frac{I_2}{A_0} \phi_{3i} \phi_{3j} dx \right) \ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} (\int A_{55} \phi_{3i} \phi_{3j,x} dx) q_{3j}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\mu_5} (\int D_{11} \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx) q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_5} (\int A_{55} \phi_{3i} \phi_{3j} dx) q_{3j} = 0$$

$\langle i = 1, \dots, \mu_5 \rangle$

(11)

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} (\int \rho \phi_{3i} \phi_{3j} dx) \ddot{q}_{3j} + \sum_j (\int D_{11} \phi_{3i,xx} \phi_{3j,xx} dx) q_{3j}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\mu_3} \Omega^2 \left[r \left(\int \rho (l-x) \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \right) q_{3j} \right. \\ \left. + \left(\int \frac{1}{2} \rho (l^2 - x^2) \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \right) q_{3j} \right] = 0$$

$\langle i = 1, \dots, \mu_3 \rangle$

(12)

2.3 무차원 운동방정식

식(11)의 운동 방정식을 무차원 방정식 형태로 바꾸기 위해 다음과 같은 무차원 변수를 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{L}, \quad \theta_3 = \frac{q_3}{L}, \quad \theta_5 = q_5$$

$$\phi_i(x) = \psi_i(\xi), \quad \gamma = T\Omega, \quad T \equiv \sqrt{\frac{\rho L^4}{D_{11}}} \quad (13)$$

식(13)을 이용하여 운동방정식을 무차원화 하면

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} [M_{ij}^{33} \ddot{\theta}_{3j} + \{\alpha^2 A'_{55} K_{ij}^{33} + \gamma^2 K_{ij}^{G3}\} \theta_{3j}] + \alpha^2 A'_{55} \sum_{j=1}^{\mu_5} S_{ij}^{C35} \theta_{5j} = 0$$

$\langle i = 1, \dots, \mu_3 \rangle$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} [M_{ij}^{55} \ddot{\theta}_{5j} + \{\alpha^2 K_{ij}^{55} + \alpha^4 A'_{55} M_{ij}^{55}\} \theta_{5j}] + \alpha^4 A'_{55} \sum_{j=1}^{\mu_5} S_{ij}^{C53} \theta_{3j} = 0$$

$\langle i = 1, \dots, \mu_5 \rangle$

(14)

여기서

$$M_{ij}^{ab} = \int \psi_{ai} \psi_{bj} d\xi$$

$$K_{ij}^{ab} = \int \psi_{ai,\xi} \psi_{bj,\xi} d\xi$$

$$K_{ij}^{G3} = \int \sigma (1-\xi) \psi_{3i,\xi} \psi_{3j,\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int (1-\xi^2) \psi_{3i,\xi} \psi_{3j,\xi} d\xi$$

$$S_{ij}^{C35} = \int \psi_{3i,\xi} \psi_{5j} d\xi$$

$$S_{ij}^{C53} = \int \psi_{5i} \psi_{3j,\xi} d\xi$$

$$\sigma = \frac{r}{L}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I_2}}, \quad A'_{55} = \frac{h^2}{12} \frac{A_{55}}{D_{11}} \quad (15)$$

식(14)에서 θ_j 를 조화함수(harmonic function)라고 가정하면 그 요소들로서 이루어진 열 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta = e^{j\omega r} \Theta \quad (16)$$

식(16)에서 j 는 허수를 나타내며, ω 는 고유진동수에 T 를 곱한 무차원변수이며 Θ 는 각 모드 형상을 대표하는 열 행렬이다. 식(16)을 이용하여 식(14)를 정리하면

$$\omega^2 M \Theta = K \Theta \quad (17)$$

식(17)에서 행렬 M 과 K 는 다음과 같이 구성된다.

$$M = \begin{bmatrix} M^{33} & 0 \\ 0 & M^{55} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{35} \\ K_{53} & K_{55} \end{bmatrix} \quad (18)$$

식 (18)의 강성행렬의 요소행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{33} &= (\alpha^2 A'_{55} K^{33} + \gamma^2 K^{G3}) \\ K_{35} &= \alpha^2 A'_{55} S^{C35} \\ K_{53} &= \alpha^4 A'_{55} S^{C53} \\ K_{55} &= (\alpha^2 K^{55} + \alpha^4 A'_{55} M^{55}) \end{aligned} \quad (19)$$

3. 수치해석

수치해석은 사각형 단면을 가진 cross-ply 대칭적층 복합재 외팔보에 대해서 수행되었다. 해석에 사용된 복합재료는 참고문헌(5)에 제시된 AS/3501-6 graphite-epoxy 이다. 모든 layer 들은 같은 두께이며 전단 보정 계수는 사각단면을 위한 값으로 5/6 이 사용되었다. 사용된 복합재료 AS/3501-6 graphite-epoxy 물성치 데이터들은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 14.5 \times 10^{10} Pa, \quad E_2 = E_3 = 0.96 \times 10^{10} Pa, \quad \nu = 0.3, \\ G_{12} &= G_{13} = 0.41 \times 10^{10} Pa, \quad G_{23} = 0.34 \times 10^{10} Pa \end{aligned}$$

우선 결과의 정확성을 검증하기 위해 본 연구의 결과와 참고문헌 (6,7) 혹은 ANSYS 결과와의 비교가 Table 1 과 Table 2 에 제시되었다.

Table1 Comparison of dimensionless natural frequencies (Present versus Ref.[6] and [7])

Mode	Ref[6]	Error(%)	Ref[7]	Error(%)	Present
1	3.24	0.70	3.27	0.12	3.26
2	14.79	3.17	15.36	0.52	15.28
3	33.47	0.20	33.78	1.11	33.41
4	51.74	0.49	52.86	1.66	52.00
5	70.07	0.59	70.47	0.02	70.48

Table 2 Comparison of dimensionless natural frequencies (Present versus ANSYS)

γ	Mode	Ansysis	Error(%)	Present
0	1	3.255	0.263	3.264
	2	15.078	1.312	15.278
	3	32.854	1.656	33.407
10	1	10.702	0.620	10.769
	2	29.001	0.980	29.288
	3	53.027	1.290	53.720
50	1	50.181	0.906	50.640
	2	121.651	1.071	122.968
	3	187.441	0.507	188.396

Table1 은 회전하지 않는 경우를 Table 2 는 회전하는 경우를 비교하는 결과이다. 두 경우 모두 $\alpha = 34.64$ ($L/h=10$), $\sigma = 0$, $[0/90/90/0]$ 의 대칭적층이 사용되었다. Table 1 과 Table 2 는 본 논문에 제시한 방법에 의한 결과가 참고문헌은 물론 상용프로그램 ANSYS 와도 잘 일치함을 보여준다.

본 연구에서 고려한 전단 및 단면관성 효과가 고유진동수 예측에 미치는 영향을 조사하기 위해 식(12)의 고유진동수에 T 를 곱한 ω 의 비교가 이루어졌다. Fig.2 는 세장비 $\alpha = 50$ ($L/h=15$) 이고 축반경비 $\sigma = 0.1$ 일 때 회전각속도 증가에 따른 가장 낮은 세 고유 진동수들의 변화를 보여준다. 그림에서 점이 표시된 선은 Timoshenko 보 이론을 실선은 Euler 보 이론을 나타낸다. 두 경우 모두 회전각속도 증가에 따른 고유진동수 증가를 보여주며 Euler 보 이론이 Timoshenko 보 이론보다 큰 값을 예측하며 두 결과 차이는 두번째 이상의 고유진동수에서 훨씬 더 두드러짐을 알 수 있다.

Fig.3 은 무차원 각속도 $\gamma = 5$ 그리고 축반경비 $\sigma = 0.1$ 일 때 세장비 α 의 변화에 따른 가장 낮은 세 고유진동수의 변화를 보여준다. 여기서 알 수 있듯이 회전하는 경우에도 세장비가 커질수록 단면관성효과와 전단효과에 의한 두 이론의 차이가 점점 줄어든다. 하지만 두 이론의 만족할

만한 일치는 α 가 200 이상이 되어야 얻을 수 있는데 $\alpha = 70$ ($L/h \approx 20$) 이상이면 두 이론의 차이가 미세해진다는 일반적 보 이론의 상식과 어긋난다. Table 3 과 4 는 본 연구에서 얻은 등방성 및 이방성 재료를 사용한 결과를 보여주는데 λ_i 는 두 이론간 i 번째 고유진동수의 백분율에 의한 차이를 나타낸다. 등방성의 경우는 α 가 70 이상이면 λ_i 가 모두 2%정도까지 떨어지나 이방성의 경우는 200 이상이 되어야만 Euler 보 이론으로 만족할 만한 정확도를 얻을 수 있다.

Fig.4 는 $\gamma = 5$, $\sigma = 0.1$, $\alpha = 30$ 일 때에 두 이론에 의해 구해진 모드 형상 차이를 보여주고 있다. 두 이론에 의한 결과 차이는 크지 않으나 Timoshenko 보 이론의 결과가 약간 고정단쪽으로 이동되었음을 보여준다.

Table 3 Percentage error between Euler and Timoshenko theories for isotropic material

α	λ_1	λ_2	λ_3
30	0.844	3.790	9.378
50	0.325	1.482	3.962
70	0.169	0.775	2.127

Table 4 Percentage error between Euler and Timoshenko theories for anisotropic material

α	λ_1	λ_2	λ_3
50	2.371	8.084	19.780
70	1.481	5.088	13.557
100	0.828	2.857	8.179
200	0.231	0.800	2.461
300	0.105	0.364	1.137

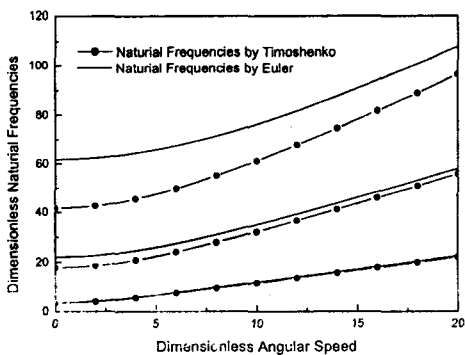


Fig.2 Natural frequency variations versus angular speed

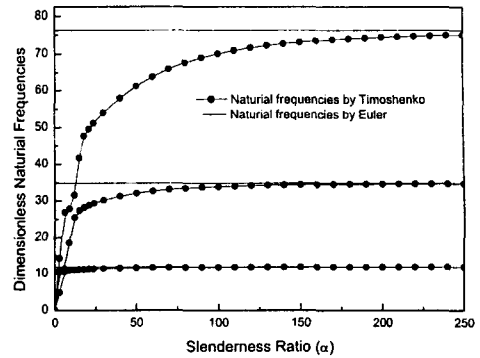
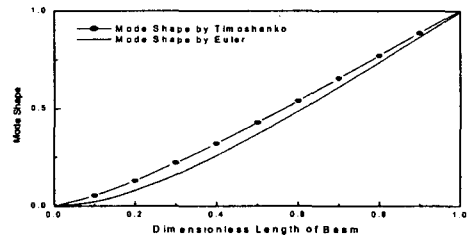
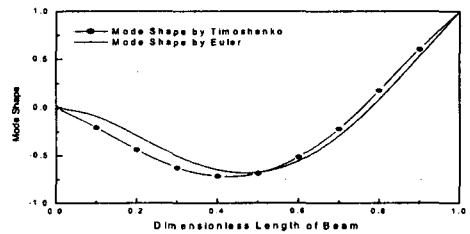


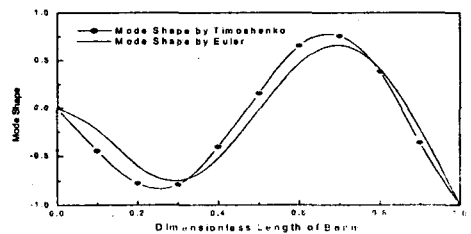
Fig.3 Comparison of natural frequencies obtained by Euler and Timoshenko beam theories



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

Fig.4 Variations of first three mode shapes

4. 결론

본 논문은 cross-ply 복합재 회전 외팔보의 진동 특성을 예측하기 위해 Euler 보 이론과 단면관성과 전단 효과를 고려한 Timoshenko 보 이론에 근거한 해석모델을 제시하였으며 해석은 인장방향과 연성 효과가 사라지게 되는 대칭 적층의 경우에 대해서 수행되었다. 그 결과로 Euler 보이론은 Timoshenko 보이론보다 항상 높은 고유진동수를 예측하게 되며 두 결과의 차이는 세장비가 커짐에 따라 감소한다. 등방성 재료의 경우는 잘 알려진 것처럼 α 가 70 이상이면 결과 차이가 2%까지 감소하나 이방성의 경우는 동일한 차이를 얻기 위해선 α 를 200 이상까지 증가시켜야 함을 알 수 있었다. 그러나 모드 형상은 비교적 세장비가 작은 보에 대해서도 두 이론간 차이가 그리 크지 않음을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda No.766*.
- (2) Scilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, Vol. 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (4) Kapania, R. and Raciti, S., 1989, "Nonlinear Vibration of Unsymmetrically Laminated Beams", *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 2, pp. 201-210.
- (5) Abramovich, H., 1992, "Shear deformation and rotary inertia effects of vibrating composite beams", *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 165~173
- (6) Abramovich, H. and Livshits, A., 1994, "Free Vibrations of non-symmetric cross-ply laminated composite beams", *J. of Sound and Vibration*, 176, pp.597~612
- (7) Singh, M.P. and Abdelnaser, A. S., 1992, "Random response pf symmetric cross-ply composite beams with abitrary boundary conditions", *AIAA*, 30
- (8) Vebli, Yildirim, 2000, "Out-of-plane bending and torsional resonance frequencies and mode shapes of

symmetric cross-ply laminated beams including shear deformation and rotary inertia effects", *Communications in numerical methods in engineering*, 16, pp.67~74

(9) Yoo, H. and Shin, S., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*, 212(5), pp. 807~828.

(10) Kane, T. and Levinson, D., 1985, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Co., New York,