

헬리컬 스프링의 자유진동 해석 Free Vibration Analysis of Helical Springs

김윤택* · 정명조** · 김현수*** · 이영신***

Weoltae Kim · Myungjo Jung · Hyunsu Kim · Youngshin Lee

Key Words : Helical Spring(헬리컬 스프링), Vibration Analysis(진동 해석), Mode Shape(모드 형상)

ABSTRACT

Free vibration analysis of helical springs was performed by the use of the commercial finite element analysis program, ANSYS. The investigation of natural frequency was focused on the effect of various parameters such as boundary conditions, spring indices, number of coil turns and helix angles which are considered to affect the free vibration of a spring. The finite element method was validated by comparison with the result of a previously published literature. The similarity of frequency trend was shown among three boundary conditions; clamped-clamped, free-free, simply supported-simply supported but there was no similarity in light of mode shapes among them. Several modes showed similar frequencies on and near the frequencies identified by the natural frequency formula of Wahl. Natural frequencies increased with spring indices and number of turns decreasing and with helix angles increasing. The results investigated by finite element method were compared with the experimental result and theoretical result and showed a good agreement among them.

1. 서론

스프링은 대부분의 기계장치에 에너지 저장 및 충격 완화 장치로 사용되고 있다. 기계장치 설계 시 각 부품 및 조립품의 고유진동수를 확인하여 공진을 회피하거나 공진으로 인한 영향을 최소화 하도록 설계하는 것이 무엇보다 중요하다. 본 연구는 다양한 스프링 형태 중 가장 널리 사용되는 압축 헬리컬 스프링의 자유진동 해석에 관한 연구이다. 스프링의 진동에 대한 이론 해석은 1960년대 초에 Wahl에 의해 수립되었다⁽¹⁾. 그는 양단 고정된 헬리컬 스프링의 고유진동수를 다음의 식으로 표현할 수 있음을 밝혔다.

$$f = \frac{Nr}{8\pi nR^2} \sqrt{\frac{2G}{\rho}} \quad (Hz) \quad (1)$$

여기서
N=모드 번호
r= wire radius
n= 코일감김수
R= 코일 radius
G= 전단 탄성계수
ρ= material density

그의 이론에 따르면 이차 이상이 고차 고유진동수는 기본 진동수의 배수로 나타난다. 그러나 실제 고유진동수는 이론식에 따른 고유진동수와 차이가 많음이 확인되었다⁽²⁾⁽³⁾. 따라서 이론식에 근거한 스프링의 고유진동수에 근거한 설계는 한계가 있으며 해석이나 실험을 통한 고유진동수 확인이 필수적이다.

본 논문에서는 경계조건, 스프링 지수, 나선 각, 스프링 감김수가 압축 코일 스프링의 고유진동수에 미치는 영향에 대해 상용 유한요소 프로그램인 ANSYS⁽⁴⁾를 이용하여 고찰하였다. 또한 양단자유 상태의 스프링에 대하여 실험을 수행하였으며, 그 결과를 유한요소 해석 및 이론치와 비교하였다.

* 한국원자력안전기술원
E-mail : wtkim@kins.re.kr
Tel : (042) 868-026 Fax : (042) 861-2535

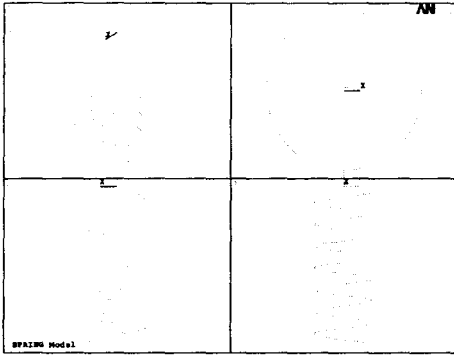
** 한국원자력안전기술원

*** 충남대학교

2. 유한요소 해석

유한요소는 원통 좌표계에 기반하여 구성하였다. 자유

도의 수는 6개이며 x,y,z 각 방향의 처짐과 회전에 대한 자유도이다. 스프링은 와이어 직경 10mm, 코일 직경 110mm, 총 높이 320mm, 코일 감김수 7회전, 나선 각 21.93. 인 승용차용 서스펜션 스프링을 기본으로 모델링하였다. 재료 물성치로 포와송 비는 0.28, 밀도 7,800kg/m³, 탄성계수 2.09x10¹¹N/m²을 사용하였다. 총 요소수는 1121개이며, 절점수는 원주방향으로 45도마다 20개로 설정하여 360도에 160개가 되도록 하였다. 요소 형식은 3-D Elastic Beam인 beam4를 사용하였다. <그림1>은 상용 유한요소 해석 프로그램인 ANSYS를 이용하여 구현한 모델링 결과이다.



<그림1> 유한요소 모델

(1)유한요소 해석의 유효성

유한요소 해석의 유효성을 검증하기 위해 기존의 문헌⁽³⁾에 제시된 해석결과와 비교하였다. 양단고정, 한단고정 및 타단자유, 양단자유 경계조건인 경우에 대한 비교결과 아래 <표1>과 같이 두 해석결과가 잘 일치하고 있음을 확인하였다.

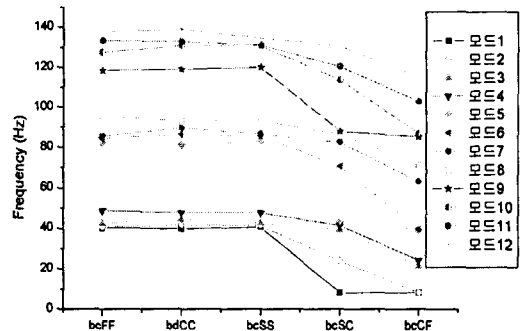
<표1> 유한요소 모델의 유효성 확인

mode no.	clamped-clamped		clamped-free		free-free	
	참고문헌	본 논문	참고문헌	본 논문	참고문헌	본 논문
1	41.105	41.074	9.478	9.475	42.087	42.049
2	45.212	45.194	9.505	9.502	43.386	43.335
3	47.049	47.023	21.429	21.411	44.184	44.120
4	47.785	47.752	24.194	24.176	49.445	49.396
5	81.325	81.256	42.182	42.138	81.415	81.343
6	89.787	89.109	42.942	42.898	86.936	86.792
7	91.774	91.702	63.310	63.256	88.499	88.379
8	93.352	93.273	71.281	71.227	95.072	94.968

2.2 유한요소 해석

(2) 경계조건이 고유진동수에 미치는 영향

경계조건이 고유진동수에 미치는 영향에 대해 고찰하기 위해 5가지 경계조건에 대한 진동수를 확인하였다. 스프링의 양단에 대한 구속조건은 양단자유, 한단고정 및 타단자유, 양단고정, 양단 단순지지, 한단 고정 타단 단순지지 등으로 분류하였다. 1차에서 15차까지의 고유진동수에 대해 분석하였으며 해석결과는 <그림2> 및 <표2>에 수록하였다. 양단자유, 양단고정, 양단 단순지지의 경계조건을 갖는 그룹이 가장 높은 고유진동수를 보였으며, 한단고정 및 타단자유인 경계조건에서 가장 낮은 고유진동수를 보였다. 한단고정 타단 단순지지 경계조건에서는 두 고유진동수 그룹의 중간정도의 분포를 보였다.



<그림2> 경계조건에 따른 고유진동수 변화

경계조건에 따른 고유진동수의 변화중 세 가지 흥미로운 사실이 확인되었다. 하나는 경계조건에 관계없이 특정 진동수 범위에 고유진동수가 집중되는 현상이다. 즉, 40Hz와 47Hz 사이, 81Hz와 89Hz 사이 및 127Hz와 139Hz 사이에 고유진동수가 집중되었다. Wahl의 진동수 공식으로 구한 기본 고유진동수가 43Hz이고 고차 고유진동수가 기본 고유진동수의 배수이므로 이는 이론식에서 구한 고유진동수의 근방에서 고유진동수가 집중되고 있음을 확인하였다.

두 번째 사실은 양단고정, 양단자유 및 양단 단순지지의 경우에 있어서 각각 서로 유사한 고유진동수를 보이고 있다는 점이다. 이러한 경향은 다른 변수 즉 스프링 지수, 나선 각, 코일 감김수에 따른 고유진동수 변화에서도 공히 확인되었다.

마지막으로, 한단고정 및 타단자유 경계조건에서는 1,2차, 5,6차 및 9,10차에서 두 고유진동수가 유사한 값을 보이는 진동수 쌍이 확인된 반면, 양단고정, 양단자유, 양단 단순지지의 경우에 있어서는 1,2,3차, 5,6,7차에서 세 개의 연속되는 세 쌍의 고유진동수가 서로 유사한 진동수를 보임을 확인하였다. 한편 한단고정 및 타단 단순지지의 경우에 있어

서는 3,4,5차 모드와 7,8,9차 모드에서 세쌍의 고유진동수가 유사한 값을 가짐을 확인할 수 있었다.

<표2> 경계조건에 따른 고유진동수 변화

Mode No.	FF	CF	CC	SC	SS
1	40.058	8.172	39.718	8.201	40.571
2	40.520	8.198	41.311	23.979	41.276
3	42.274	21.336	44.382	39.140	42.390
4	48.678	24.101	47.714	41.301	47.701
5	81.847	39.111	81.216	42.882	82.912
6	84.315	39.589	86.293	70.641	85.415
7	85.442	63.249	89.521	82.424	86.483
8	95.107	71.346	93.1201	86.435	93.185
9	118.297	85.249	118.900	87.836	119.871
10	127.463	86.787	130.684	113.737	130.728
11	133.279	103.014	132.675	120.427	131.021
12	137.621	115.337	138.925	130.653	134.550
13	149.182	127.919	150.134	133.269	151.692
14	162.836	130.218	164.616	148.976	165.630
15	169.670	139.658	164.862	155.968	168.514

F:free, C:clamped, S: simply supported

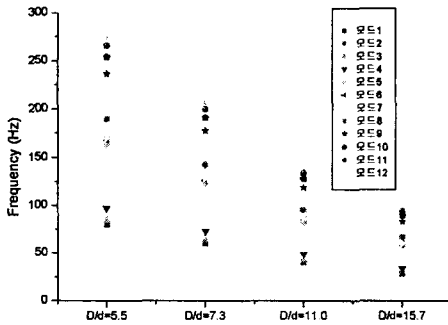
공식과 일치한다. 해석결과는 <그림3> 및 <표3>에 수록하였다. <그림3>은 양단자유 경계조건에 대한 그림이다.

<표3> 스프링 지수가 고유진동수에 미치는 영향

Mode No.	D/d=5.5		D/d=7.3		D/d=11.0		D/d=15.7	
	FF	CF	FF	CF	FF	CF	FF	CF
1	79.84	16.33	60.00	12.25	40.05	8.17	28.05	5.72
2	80.75	16.38	60.68	12.29	40.52	8.19	28.38	5.73
3	84.53	42.66	63.40	32.00	42.27	21.33	29.59	14.93
4	97.03	48.05	72.91	36.10	48.67	24.10	34.09	16.87
5	163.53	77.99	122.72	58.59	81.84	39.11	57.30	27.39
6	167.85	78.95	126.23	59.31	84.31	39.58	59.06	27.72
7	170.25	126.47	127.96	94.86	85.44	63.24	59.84	44.27
8	189.56	142.26	142.45	106.88	95.10	71.34	66.61	49.96
9	236.44	169.88	177.39	127.68	118.29	85.24	82.81	59.71
10	253.88	172.97	190.86	129.99	127.46	86.78	89.28	60.78
11	265.62	205.91	199.62	154.48	133.27	103.01	93.35	72.11
12	274.22	230.00	206.11	172.79	137.62	115.33	96.39	80.77
13	298.09	255.10	223.68	191.65	149.18	127.91	104.44	89.58
14	324.11	259.31	243.76	194.97	162.83	130.21	114.07	91.22
15	338.02	278.86	254.09	209.34	169.67	139.65	118.84	97.78

(3) 스프링 지수와 고유진동수의 관계

스프링 지수(D/d)와 고유진동수와의 관계를 확인하기 위해 코일 직경을 110mm로 고정된 후 와이어 직경을 변화시키는 방법으로 스프링 지수 5.5, 7.3, 11.0, 15.7인 경우에



<그림3> 스프링 지수가 고유진동수에 미치는 영향

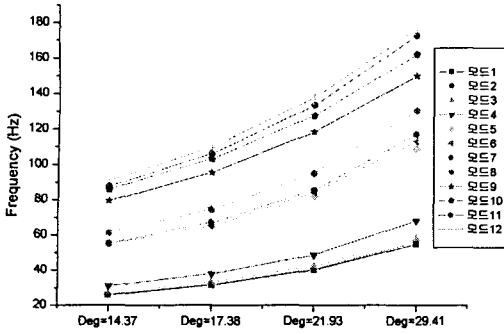
대해 해석하였다. 각 스프링 지수에 대해 양단고정, 한단고정 및 타단자유, 양단자유의 3가지 경계조건을 적용하였다. 경계조건별 고유진동수 경향은 앞서 언급한 경계조건에 대한 고유진동수의 경우와 동일한 경향을 보였다. 스프링 지수가 클수록, 즉 와이어가 가늘수록 동일 모드에서 낮은 진동수를 보였다. 와이어 크기와 고유진동수는 선형적인 관계가 성립함을 확인하였으며 이는 Wahl이 제시한 고유진동수

(4) 나선각이 고유진동수에 미치는 영향

나선각은 스프링의 높이와 피치 및 코일 감김수와의 관계로부터 구하였다. 스프링 높이 320mm, 와이어 직경 10mm, 코일 감김수 7회전일 때 나선각은 21.93. 이다. 코일 감김수를 5회전으로 높으며 나선각은 29.41. 이며, 감김수를 9회전으로 하여 나선각 17.38. 및 감김수 11회전에서의 나선각 14.37. 에 대해 각각 해석을 수행하였다.

<표4> 나선각의 변화에 따른 고유진동수 변화

mode No.	14.37°		17.38°		21.93°		29.41°	
	FF	CF	FF	CF	FF	CF	FF	CF
1	25.89	5.23	31.48	93.22	40.05	8.17	54.69	11.34
2	26.01	5.24	31.70	6.39	40.52	8.19	55.90	11.39
3	27.16	13.63	33.09	16.64	42.27	21.33	58.31	29.65
4	30.95	15.41	37.84	18.80	48.67	24.10	68.16	33.49
5	53.72	25.17	65.01	30.64	81.84	39.11	108.55	53.83
6	55.05	25.38	66.71	30.95	84.31	39.58	113.01	54.65
7	55.25	40.72	67.14	49.58	85.44	63.24	116.96	86.75
8	61.30	45.97	74.61	55.95	95.10	71.34	130.24	98.00
9	79.49	55.74	95.48	67.48	118.29	85.24	149.95	114.44
10	86.10	56.59	103.13	68.64	127.46	86.78	162.08	116.11
11	87.66	67.28	105.94	81.53	133.27	103.01	172.77	137.20
12	90.69	75.68	109.62	91.55	137.62	115.33	176.47	152.76
13	103.98	86.02	123.46	103.35	149.18	127.91	179.85	161.96
14	112.11	87.23	133.40	104.66	162.83	130.21	206.74	169.79
15	115.35	93.22	138.73	112.31	169.67	139.65	219.53	173.67



<그림4> 나선각의 변화에 따른 고유진동수 변화

코일 감김수가 많을수록, 즉 나선각이 클수록 동일 모드에서 고유진동수가 큰을 보였으며 고차 모드로 갈수록 고유진동수 커지는 율이 높아졌다. 나선각에 따른 고유진동수의 변화는 <표4> 및 <그림4>에 각각 수록하였다.

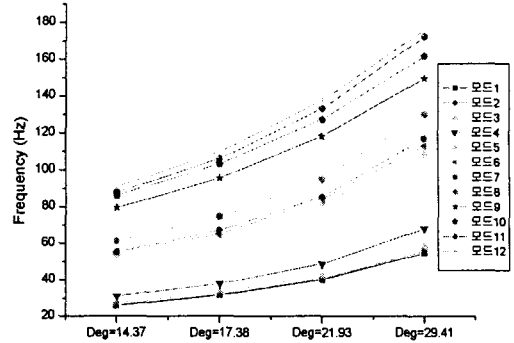
(5) 코일 감김수와 고유진동수의 관계

코일 감김수가 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위해 나선각을 일정하게 고정한 상태, 즉 피치를 일정하게

<표5> 코일 감김수와 고유진동수의 관계

mode No.	5 turns		7 turns		9 turns		11 turns	
	FF	CF	FF	CF	FF	CF	FF	CF
1	58.48	15.03	40.05	8.17	27.10	5.08	19.39	3.46
2	62.73	15.06	40.52	8.19	27.20	5.10	19.42	3.47
3	65.46	29.94	42.27	21.33	32.96	16.58	27.02	13.56
4	70.71	33.78	48.67	24.10	37.61	18.73	30.71	15.32
5	111.38	61.68	81.84	39.11	60.71	26.52	45.39	19.03
6	120.81	63.23	84.31	39.58	60.74	26.68	45.41	19.08
7	124.80	87.94	85.44	63.24	65.02	49.36	53.48	40.47
8	131.32	98.72	95.10	71.34	74.29	55.75	60.94	45.56
9	154.51	123.74	118.29	85.24	94.37	61.12	75.37	45.79
10	168.45	126.36	127.46	86.78	97.03	61.91	75.64	46.04
11	178.57	141.55	133.27	103.01	99.59	80.98	79.26	66.70
12	180.74	154.30	137.62	115.33	109.04	91.21	90.11	75.11
13	182.90	165.42	149.18	127.91	121.99	97.61	102.13	75.70
14	196.48	173.78	162.83	130.23	130.48	98.88	105.13	76.65
15	199.78	179.17	169.67	139.65	136.52	110.88	108.51	91.85

유지하면서 코일의 감김수를 변화시켜 코일 감김수가 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다. 코일의 감김수는 5회전, 7회전, 9회전 및 11회전의 4가지 경우에 대해 해석을 수행하였다. 감김수가 적을수록 고유진동수가 커지고 기율기도

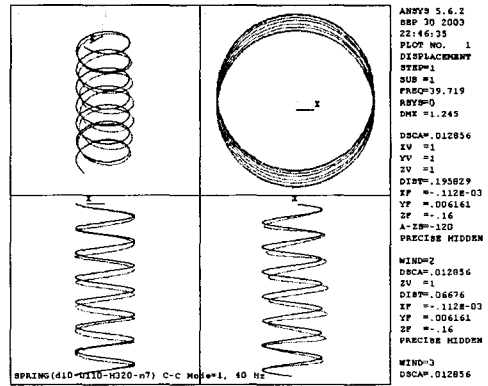


<그림5> 코일감김수와 고유진동수의 관계

증가함을 보였다. 코일 감김수가 고유진동수에 미치는 영향은 <표5> 및 <그림5>와 같다.

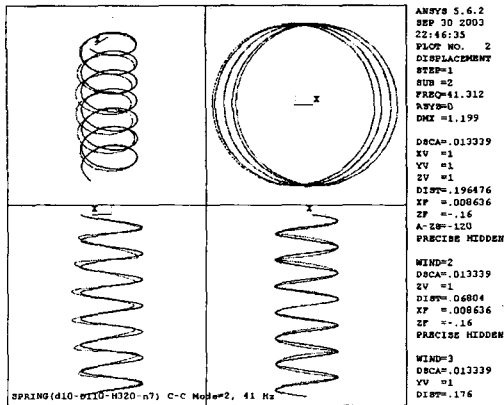
2.3 진동 모드 분석

2.2절에서 양단고정, 양단자유, 양단 단순지지의 경우에서 모드 번호에 따른 고유진동수의 크기가 유사함을 확인한 바 있다. 그러나 이들 경계조건에서의 진동 모드는 각기 다르게 나타나고 있다.



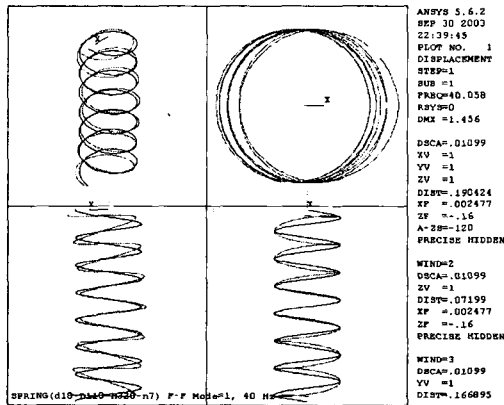
<그림6> 양단고정 1번 모드형상

스프링의 상부에서 바라보는 plan view를 기준으로 볼 때 양단고정 및 양단 단순지지에서는 <그림6> 및 <그림7>에서와 같이 첫 번째 모드가 상하모드, 두 번째 모드가 좌우모드로 확인되었으나 양단자유에서는 <그림8> 및 <그림9>와 같이 첫 번째 모드가 좌우모드이고 두 번째 모드가 상하모드로 확인되었다.

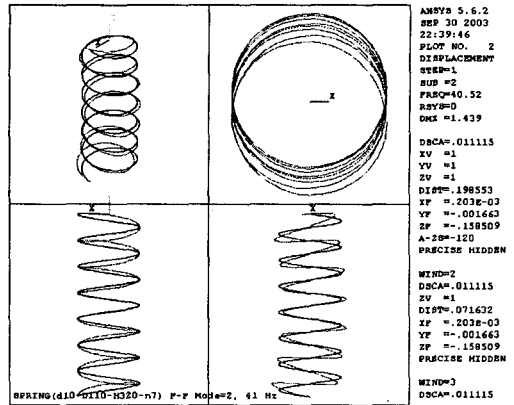


<그림7> 양단고정 2번 모드형상

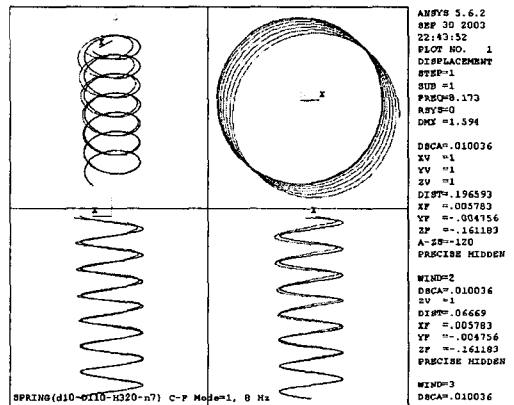
한편 한단고정 및 타단자유 경계조건에서는 <그림10> 및 <그림11>과 같이 첫 번째 및 두 번째 모드가 45도 각도로 기울어진 모드를 보였다. 한편 좌우 및 상하 변형이 적은 모드에서는 <그림12>와 같이 상대적으로 축방향으로 변형이 큼을 확인하였다. 이러한 상하, 좌우 및 경사 모드는 스프링 지수, 나선각, 코일 감김수에 관계없이 동일하게 나타났다. 경계조건이 한단고정 및 타단 단순지지의 경우에는 첫 번째 모드가 상하모드로 확인되었으나 두 번째 모드는 <그림 13>에서와 같이 축방향 및 횡방향 공히 특별한 모드를 보이지 않는 안정된 모드를 보였다.



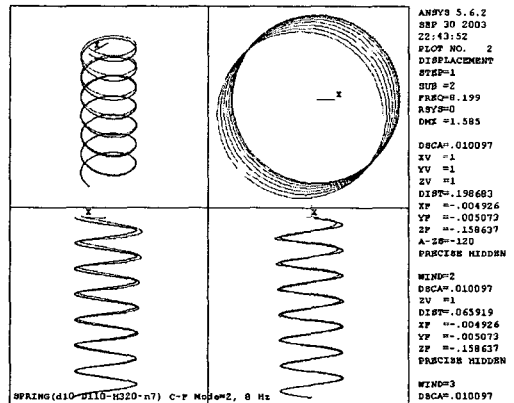
<그림8> 양단자유 1번 모드형상



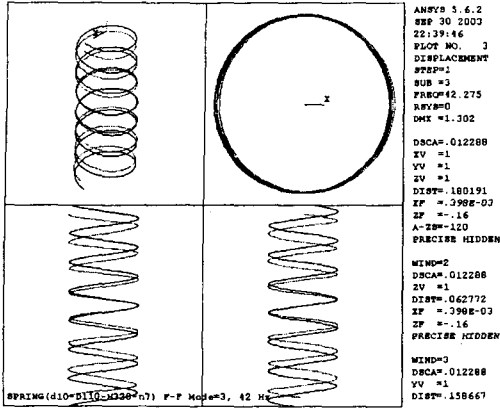
<그림9> 양단자유 2번 모드형상



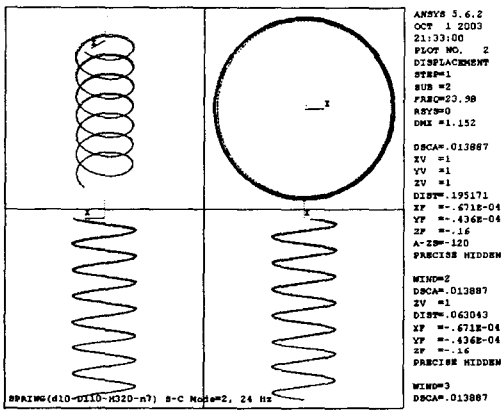
<그림10> 한단고정 타단자유 1번 모드형상



<그림11> 한단고정 타단자유 2번 모드형상



<그림12> 양단자유 축방향 모드



<그림13> 한단고정 타단 단순지지 안정된 모드형상

3. 실험

3.1 실험장치

유한요소 해석을 통하여 확인된 고유진동수와 실제 스프링의 진동수를 비교하기 위해서 유한요소 해석에 사용된 스프링과 동일한 종류의 스프링을 대상으로 진동수 확인 실험을 수행하였다. 실험에 사용된 스프링은 스프링 높이 320mm, 스프링 와이어 직경 10mm, 코일 직경 110mm로 해석 대상 스프링과 동일하나 코일 감김수는 7회전 및 1/4 회전으로 해석에서의 7회전과 다소 차이가 있다. 실험은 양단자유 상태를 모사하여 <그림14>와 같이 스프링의 중앙 코일에 실을 연결하여 매달고 진동측정용 충격해머를 이용하여 가진하는 방법으로 수행하였다. 신호는 축방향으로 부착한 가속도계를 통하여 취득하고 취득한 신호는 개인용 컴퓨터에 설치된 Star-System으로 분석하였다. 가속도계는 1방

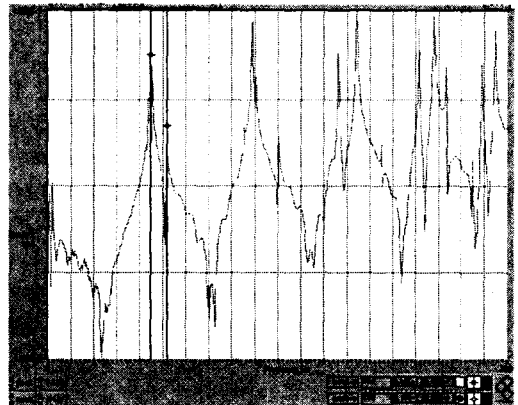
향 신호취득용이며 PCB Piezotronics를 사용하였다. 가속도계의 voltage sensitivity는 9.83 mv/g이며 사용범위는 3-10,000Hz이다. 실험장치는 <그림14>와 같다.



<그림14> 스프링 진동 실험장치

3.2 실험결과

진동수는 양단자유 상태에서 충격해머로 3번 가진하여 취득한 신호를 산술평균으로 구한 값으로 결정하였다. 확인된 6차까지의 고유진동수를 해석을 통하여 확인된 고유진동수와 비교하였고 비교 결과는 <표6>에 정리하였다. 표에서 확인하는 바와 같이 실험으로 구한 1,2번 모드의 고유진동수는 각각 유한요소 해석의 3,4번 모드의 고유진동수와 유사하다. 실험에서의 기본 고유진동수는 44.8Hz이며 이는 해석의 3번 모드의 고유진동수 42.27Hz와 Wahl의 이론식에서 구한 43Hz와 유사한 값이다.



<그림15> 실험으로 확인한 고유진동수

위 2.2절에서 확인되는 바와 같이 유한요소 해석에서 1,2,3번 모드가 유사한 값을 가지므로 실험에서 구한 진동수와 유한요소 해석 및 이론식에서 구한 진동수와 잘 일치함을 알 수 있다.

특히 실험에서 확인한 세 번째 진동수 89Hz와 126Hz는 각각 유한요소 해석결과의 85.44Hz와 127.46Hz 및 이론식에서 구한 86Hz 및 129Hz와 잘 일치함을 알 수 있다. 실험에서 확인한 고유진동수는 <그림15>에 제시하였다.

<표6> 유한요소 해석 및 이론식에서 구한 고유진동수와 실험으로 구한 고유진동수 비교

유한요소해석		실험		Wahl 공식 ⁽¹⁾	
Mode No.	진동수 (Hz)	Mode No.	진동수 (Hz)	Mode No.	진동수 (Hz)
1	40.05	-	-	-	-
2	40.52	-	-	-	-
3	42.27	1	44.8	1	43
4	48.67	2	51.8	-	-
5	81.84	-	-	-	-
6	84.31	-	-	-	-
7	85.44	3	89.0	2	86
8	95.10	4	100.9	-	-
9	118.29	-	-	-	-
10	127.46	5	126.0	3	129
11	133.27	6	134.0	-	-
12	137.62	-	-	-	-

4. 결론

상용 유한요소 해석 프로그램을 이용하여 압축 헬리컬 스프링의 자유진동 해석을 수행하였다. 유한요소 해석은 기존의 참고문헌 결과와 비교하여 유효성을 검증하였다. 본 논문을 통해 얻은 결과는 다음과 같다.

(1) 경계조건에 관계없이 이론식으로 구한 고유진동수 근방에 고유진동수가 이중, 삼중으로 중첩되는 경향이 있으며 고차 모드로 갈수록 이런 경향은 줄어든다.

(2) 양단고정, 양단자유 및 양단 단순지지 경계조건에서 각 모드 번호별 고유진동수는 유사한 값을 가진다. 그러나 각 진동 모드별 모드 형상은 일치하지 않는다.

(3) 한단고정 및 타단자유 경계조건에서는 1,2차, 5,6차, 9,10차에서 유사한 진동수를 보이는 쌍이 존재하는 반면, 양단고정, 양단자유, 양단 단순지지 경계조건에서는 1,2,3차, 5,6,7차에서 각각 세 개의 진동수 쌍이 유사한 진동수 범위를 보이고 있다.

(4) 스프링 지수가 클수록 진동수는 낮아진다.

(5) 나선각이 클수록 진동수는 높아진다.

(6) 코일 감김수가 많을수록 진동수는 낮아진다.

(7) 진동 모드 형상은 축방향, 횡방향 및 두 방향의 혼합된 형상을 보이고 있다.

(8) 유한요소로 구한 진동수와 실험으로 구한 진동수 및 Wahl의 진동수 공식으로 구한 진동수를 비교한 결과 주요 진동 모드에서 서로 잘 일치함을 보였다.

참 고 문 헌

(1) Wahl, A. M., 1963, "Mechanical Springs", McGraw-Hill, New York.

(2) Lee, J. and Thompson D. J., 2001, "Dynamic Stiffness Formulation, Free Vibration and Wave Motion of Helical Springs", Journal of Sound and Vibration 239(2), pp.297-320.

(3) Yildirim, Vebil, 1996, "Investigation of parameters affecting free vibration frequency of helical springs", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp.99-114.

(4) ANSYS, 2001, ANSYS Structural Analytical Guide, Inc., Houston.