

# 전극 효과를 고려한 마이크로 3축 링 자이로스코프의 동역학

## Dynamics of a Micro Three-Axis Ring Gyroscope Considering Electrode Effects

강 태 민\* · 김 창 부\*\*

Tae-Min Kang, Chang-Boo Kim

**Key Words** : Ring Gyroscope(링 자이로스코프), Three-Axis(3축), Angular Velocity(각속도), Cyclic Symmetry(순환대칭), Electrode(전극), In-plane Motion(면내운동), Out-of-plane Motion(면외운동), Natural Mode(고유모드)

### ABSTRACT

In this paper, we analyse and present electro-mechanical dynamic characteristics of a micro-machined vibrating silicon ring gyroscope which can measure angular velocities about three orthogonal axes. The ring gyroscope has a ring connected to the gyroscope main body by support-ligaments which are arranged with cyclic symmetry. The natural modes of its vibration can be distinguished into the in-plane motion and the out-of-plane motion which are coupled by the gyro-effect due to the rotation of the gyroscope main body. The motions of the ring are electro-statically derived, sensed and balanced by electrodes. The equations of motion are formulated. The scheme of angular velocities sensing by force-to-rebalance method is presented. The dynamic characteristics of a ring gyroscope are calculated and compared.

### 1. 서 론

최근에 고성능 및 다축의 마이크로 자이로스코프의 개발이 필요함에 따라 링 자이로스코프에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다<sup>(1)</sup>.

Putty와 Najafi<sup>(2)</sup>는 링과 반원 모양의 지지프링으로 이루어진 구조에 가진 및 감지를 하고 미세 튜닝을 할 수 있는 전극을 주변에 배치한 진동형 링 자이로스코프를 개발하였다. Putty<sup>(3)</sup>는 순환대칭형 링 자이로스코프의 구조에 대한 연구에서 링의 지지대가 최소 8개 이상이어야 함과 다른 구조에 비해 의사진동과 온도에 민감하지 않고 대칭형 구조가 회전을 감지하는데 우수함을 밝혔다.

Eley 등<sup>(4)</sup>은 3축의 각속도를 측정할 수 있는 링 구조의 해석을 통해 면내운동과 면외운동 사이에 발생하는 코리올리 연성 효과에 대해 연구하였다. 또한, Gallacher 등<sup>(5)</sup>은 링과 크랭크 모양의 지지대로 이루어진 순환대칭 구조의 면내와 면외 진동특성을 이용한 3축 실리콘 링 자이로스코프를 제안하고 링의 폭과 두께의 조정을 통해 진동수를 일치시키

는 방법과 정전기력을 이용한 진동수 튜닝에 대해 연구하였다.

참고논문<sup>(6)</sup>에서는 Gallacher 등<sup>(5)</sup>의 논문을 기준으로 마이크로 3축 링 자이로스코프의 설계에 필요한 기계적 동역학 특성들을 체계적으로 검토하고 해석하여 그 결과를 제시하였다.

본 논문에서는 참고논문<sup>(6)</sup>의 내용을 연장하여 링을 가진 하거나 링의 변위를 감지하고 고유진동수의 균형을 잡는 전극의 정전효과를 고려하면서 링의 굽힘 전단, 인장 및 회전 관성과 지지대의 질량 및 굽힘 전단을 고려한 마이크로 3축 링 자이로스코프의 운동방정식을 체계적으로 유도하고, 또한 그 동역학 특성들을 검토하고 해석하여 그 결과를 제시하고자 한다.

### 2. 링 자이로스코프의 운동 및 변형

#### 2.1 링 자이로스코프의 구조

링 자이로스코프는 자유롭게 움직일 수 있는 링이 원주방향으로 주기적으로 배열된  $N$ 개의 지지대에 연결되어 있고 지지대는 자이로스코프 본체에 고정된 구조를 갖고 있다. 링은 폭  $b$ , 두께  $t$ 인 사각단면을 갖고 있고 평균반경이  $a$ 이다. 지지대는 크랭크 형상을 갖고 있고 길이가 각각  $L_1, L_2, L_3$ 이며 단면은 폭  $h$ , 두께  $t$ 인 사각단면이다.

자이로스코프 본체에 고정된 본체 좌표계  $O_{xyz}$ 는 각속도

\* 인하대학교 대학원 기계공학과  
E-mail : kang-trn@inha.ac.kr  
Tel : (032) 860-7383, Fax : (032) 868-1716

\*\* 인하대학교 기계공학부

$\vec{\Omega}$ 로 회전하며, 각속도  $\vec{\Omega}$ 의 본체 좌표계에 대한 성분은  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ 이다.

링의 외부와 하부에 원주방향으로 배열된 전극(electrode)은 링과 전극사이의 정전용량(capacitance)의 변화에 의해서 링을 가진하거나 링의 변위를 감지하고 고유진동수의 균형을 잡는다.

## 2.2 링의 운동

$x$ 축에서 원주방향으로  $\theta$ 만큼 떨어진 링 단면의 중심  $C$ 점에 반경방향, 원주방향, 수직방향의 축을 갖는 단면 좌표계  $C_{\xi\eta\zeta}$ 를 설정하면  $C$ 점의 변위  $\vec{u}_C$  및 단면의 회전  $\vec{\phi}_C$ 는  $\theta$ 만의 함수로서 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{u}_C = u_\xi \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta + u_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (1)$$

$$\vec{\phi}_C = \phi_\xi \vec{e}_\xi + \phi_\eta \vec{e}_\eta + \phi_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (2)$$

여기서  $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ 는  $\xi, \eta, \zeta$  방향의 단위 길이 벡터이다.

회전  $\vec{\phi}_C$ 가 매우 작다고 가정하면,  $C$ 점을 통과하는 링 중심선에 수직한 단면상의 임의의 한 점  $P$ 점의 변위  $\vec{u}_P$ 는 다음과 같다.

$$\vec{u}_P = \vec{u}_C + \vec{\phi}_C \times \vec{\rho} \quad (3)$$

여기서

$$\vec{\rho} = \overline{CP} = \xi \vec{e}_\xi + \zeta \vec{e}_\zeta$$

따라서 변형후의  $C$ 점 및  $P$ 점의 위치는 다음과 같다.

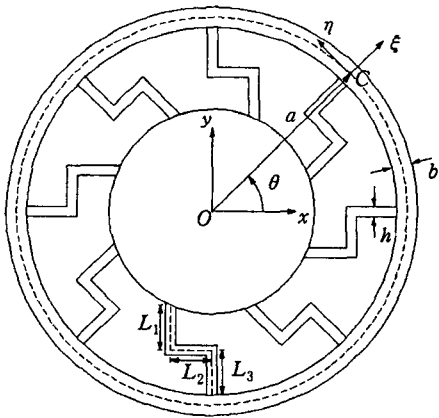


Fig. 1 Geometry of a ring gyroscope

$$\vec{r}_C = a \vec{e}_\xi + \vec{u}_C \quad (4)$$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho} + \vec{\phi}_C \times \vec{\rho} \quad (5)$$

자이로스코프 본체 좌표계  $O_{xyz}$ 는 순간 각속도  $\vec{\Omega}$ 로 회전하고 있으므로 변형 후의  $C$ 점 및  $P$ 점의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C + \vec{u}_{Crel} \quad (6)$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\phi}_C \times \vec{\rho}) + \vec{\phi}_{Crel} \times \vec{\rho} \quad (7)$$

여기서

$$\vec{u}_{Crel} = \dot{u}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{u}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \vec{e}_\zeta$$

$$\vec{\phi}_{Crel} = \dot{\phi}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{\phi}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{\phi}_\zeta \vec{e}_\zeta$$

$$\vec{\Omega} = (\Omega_x \cos \theta + \Omega_y \sin \theta) \vec{e}_\xi + (-\Omega_x \sin \theta + \Omega_y \cos \theta) \vec{e}_\eta + \Omega_z \vec{e}_\zeta$$

## 2.3 링의 순환대칭 운동

링의 운동은  $x-y$ 면에 대하여 면내운동 및 면외운동으로 구분될 수 있다. 링의 면내변위는  $u_\xi, u_\eta, \phi_\zeta$ 이고, 면외변위는  $u_\zeta, \phi_\xi, \phi_\eta$ 이다.

링의 면내운동을  $n$ 개의 절직경수를 갖는 순환대칭의 단순조화형이라고 가정하면 면내변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_\xi &= u_{\xi C} \cos n\theta + u_{\xi S} \sin n\theta \\ u_\eta &= u_{\eta C} \cos n\theta + u_{\eta S} \sin n\theta \\ \phi_\zeta &= \phi_{\zeta C} \cos n\theta + \phi_{\zeta S} \sin n\theta \end{aligned} \quad (8)$$

링의 면외운동을  $m$ 개의 절직경수를 갖는 순환대칭의 단순조화형이라고 가정하면 면외변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_\zeta &= u_{\zeta C} \cos m\theta + u_{\zeta S} \sin m\theta \\ \phi_\xi &= \phi_{\xi C} \cos m\theta + \phi_{\xi S} \sin m\theta \\ \phi_\eta &= \phi_{\eta C} \cos m\theta + \phi_{\eta S} \sin m\theta \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.4 운동에너지

$m = n+1$  혹은  $m = n-1$ 일 때에만 링의 운동에너지에서  $\Omega_x, \Omega_y$ 에 대한 항이 존재한다. 따라서  $m = n+1, n \geq 1$ 의 순환대칭 운동에 대한 링 자이로스코프 구조의 운동에너지는 지지대의 회전에 의한 영향을 무시하면 다음과 같다.

$$T = T_R + T_S = T_R + T_{SI} + T_{SO} \quad (10)$$

$$T_R = \frac{1}{2} [ \dot{u}_{IC}^T M_{RI} \dot{u}_{IC} + \dot{u}_{IS}^T M_{RI} \dot{u}_{IS} \\ + \dot{u}_{OC}^T M_R \dot{u}_{OC} + \dot{u}_{OS}^T M_{RO} \dot{u}_{OS} ] \\ + \dot{u}_{IC}^T (G_1 u_{IC} + G_2 u_{OC} + G_3 u_{OS}) \\ + \dot{u}_{IS}^T (G_1 u_{IS} + G_2 u_{OS} - G_3 u_{OC}) \\ + \dot{u}_{OC}^T (G_4 u_{OC} - G_2^T u_{IC} + G_3^T u_{IS}) \\ + \dot{u}_{OS}^T (G_4 u_{OS} - G_2^T u_{IS} - G_3^T u_{IC})$$

$$T_{SI} = \frac{1}{2} [ \frac{N}{2} ( \dot{u}_{IC}^T M_{LI} \dot{u}_{IC} + \dot{u}_{IS}^T M_{LI} \dot{u}_{IS} ) ]$$

$$T_{SO} = \frac{1}{2} [ \frac{N}{2} ( \dot{u}_{OC}^T M_{LO} \dot{u}_{OC} + \dot{u}_{OS}^T M_{LO} \dot{u}_{OS} ) ]$$

여기서

$$u_{IC} = (u_{\xi C}, u_{\eta C}, \phi_{\zeta C})^T, \quad u_{IS} = (u_{\xi S}, u_{\eta S}, \phi_{\zeta S})^T \\ u_{OC} = (u_{\zeta C}, \phi_{\xi C}, \phi_{\eta C})^T, \quad u_{OS} = (u_{\zeta S}, \phi_{\xi S}, \phi_{\eta S})^T$$

$$M_{RI} = \pi \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\zeta} a^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{RO} = \pi \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\xi} a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\eta} a^2 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \frac{1}{2} \pi \rho A a \begin{bmatrix} 0 & -2\Omega_z & 0 \\ 2\Omega_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \pi \rho A a \begin{bmatrix} \Omega_y & 0 & 0 \\ -\Omega_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_y \mu_{\zeta} a^2 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \pi \rho A a \begin{bmatrix} -\Omega_x & 0 & 0 \\ -\Omega_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_y \mu_{\zeta} a^2 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \frac{1}{2} \pi \rho A a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\Omega_x \mu_{\xi} a^2 \\ 0 & 2\Omega_x \mu_{\xi} a^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\xi} = \frac{\rho I_{\xi}}{\rho A a^2}, \quad \mu_{\zeta} = \frac{\rho I_{\zeta}}{\rho A a^2}, \quad \mu_{\eta} = \mu_{\xi} + \mu_{\zeta}$$

$A, I_{\xi}, I_{\zeta}$ 는 링 단면의 면적,  $\xi, \zeta$ 축에 대한 관성모멘트이다.

## 2.5 변형에너지

$m = n + 1, n \geq 1$ 의 순환대칭 운동에 대한 링 자이로스코프 구조의 변형에너지는 다음과 같다.

$$V = V_R + V_S = V_{RI} + V_{RO} + V_{SI} + V_{SO} \quad (11)$$

$$V_{RI} = \frac{1}{2} [ u_{IC}^T (K_{RIS} u_{IC} - K_{RIA} u_{IS})$$

$$+ u_{IS}^T (K_{RIS} u_{IS} + K_{RIA} u_{IC}) ]$$

$$V_{RO} = \frac{1}{2} [ u_{OC}^T (K_{ROS} u_{OC} - K_{ROA} u_{OS})$$

$$+ u_{OS}^T (K_{ROS} u_{OS} + K_{ROA} u_{OC}) ]$$

$$V_{SI} = \frac{1}{2} [ \frac{N}{2} ( u_{IC}^T K_{LI} u_{IC} + u_{IS}^T K_{LI} u_{IS}) ]$$

$$V_{SO} = \frac{1}{2} [ \frac{N}{2} ( u_{OC}^T K_{LO} u_{OC} + u_{OS}^T K_{LO} u_{OS}) ]$$

여기서

$$K_{RIS} = \frac{\pi E I_{\zeta}}{a^3} \begin{bmatrix} 1 + (\frac{a}{r_{\zeta}})^2 + n^2 s_{\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & n^2 + (\frac{a}{r_{\zeta}})^2 n^2 + s_{\zeta} & -an^2 - as_{\zeta} \\ 0 & -an^2 - as_{\zeta} & a^2 n^2 + a^2 s_{\zeta} \end{bmatrix}$$

$$K_{RIA} = \frac{\pi E I_{\zeta}}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & -n - (\frac{a}{r_{\zeta}})^2 n - ns_{\zeta} & an + ans_{\zeta} \\ n + (\frac{a}{r_{\zeta}})^2 n + ns_{\zeta} & 0 & 0 \\ -an - ans_{\zeta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{\zeta} = \sqrt{\frac{E I_{\zeta}}{EA}}, \quad s_{\zeta} = \frac{KGA a^2}{E I_{\zeta}}$$

$$K_{ROS} = \frac{\pi E I_{\xi}}{a^3} \begin{bmatrix} m^2 s_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & a^2 m^2 + \beta a^2 + a^2 s_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + \beta a^2 m^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{ROA} = \frac{\pi E I_{\xi}}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & -ams_{\xi} & 0 \\ ams_{\xi} & 0 & -a^2 m - \beta a^2 m \\ 0 & a^2 m + \beta a^2 m & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \frac{GJ_{\eta}}{E I_{\xi}}, \quad s_{\xi} = \frac{KGA a^2}{E I_{\xi}}$$

$E$ 는 Young 계수,  $G$ 는 전단계수이며,  $K$ 는 사각단면의 굽힘 전단계수<sup>(6)</sup>,  $J_{\eta}$ 는 사각단면의 비틀림 관성모멘트<sup>(6)</sup>이다.

$M_{LI}, M_{LO}$ 와  $K_{LI}, K_{LO}$ 는 링 단면중심  $C$ 점에 축약된 지지대 한 개의 면내 및 면의 질량행렬과 면내 및 면의 강성행렬로서 해석적 방법 또는 유한요소법과 Guyan 자유도 축소 방법을 사용하여 얻어진다.

## 2.6 전극 위치에너지

$n=2$ 의 순환대칭형이 되도록 원주각  $\Delta \theta_r$ 를 갖는 32개의 반경방향 전극을  $0^\circ$ 부터 시작하여 감지전극, 균형전극, 구동전극, 균형전극 순서로 원주방향으로 배치한다. 링에 극성전압  $E_p$ 을 걸고, 8개의 구동전극에는 원주방향 순서로 교류전압  $e_{da}, -e_{db}, -e_{da}, e_{db}, e_{da}, -e_{db}, -e_{da}, e_{db}$ 를 건다. 링과 16개의 균형전극 사이에는 동일한 직류전압차  $E_b$ 를 걸고, 8개의 감지전극에서는 원주방향 순서로 링의 순환대칭 진동에 따른 전극용량의 변화로 인한 교류전압  $e_{sa}, e_{sb}, -e_{sa}, -e_{sb}, e_{sa}, e_{sb}, -e_{sa}, -e_{sb}$ 이 증폭기를 통하여 감지된다.

증폭기의 입력 정전용량을  $C_{inp}$ , 바이어스 전압을  $E_{bias}$ 라고 할 때, 감지 출력전압은 다음과 같다<sup>(3)</sup>.

$$\begin{aligned} e_{sa} &= b_{\xi u} u_{\xi C} \\ e_{sb} &= b_{\xi u} u_{\xi S} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$b_{\xi u} = \frac{E_s}{(C_{inp} + C_{rs})} \frac{\epsilon r_0 t}{d_{r0}^2} \sin(\Delta \theta_r)$$

$$E_s = E_p - E_{bias}$$

$$C_{rs} = \frac{\epsilon r_0 t}{d_{r0}} \Delta \theta_r$$

$$r_0 = a + b/2$$

$d_{r0}$ 는 평형상태에서의 반경방향 공격(gap spacing)이고,  $\epsilon$ 은 진공 유전율(permittivity)이다.

$m = 3$ 의 순환대칭형이 되도록 원주각  $\Delta \theta_z$ 를 갖는 48개의 수직방향 전극을  $0^\circ$ 부터 시작하여 감지전극, 균형전극, 구동전극, 균형전극의 순서로 원주방향으로 배치한다. 12개의 구동전극에는 원주방향 순서로 교류전압  $e_{dc}$ ,  $-e_{dd}$ ,  $-e_{dc}$ ,  $e_{dd}$ ,  $e_{dc}$ ,  $-e_{dd}$ ,  $-e_{dc}$ ,  $e_{dd}$ ,  $e_{dc}$ ,  $-e_{dd}$ ,  $-e_{dc}$ ,  $e_{dd}$ 를 건다. 링과 24개의 균형전극 사이에는 동일한 직류전압차  $E_z$ 를 걸고, 12개의 감지전극에서는 원주방향 순서로 링의 순환대칭 진동에 따른 전극용량의 변화로 인한 교류전압  $e_{sc}$ ,  $e_{sd}$ ,  $-e_{sc}$ ,  $-e_{sd}$ ,  $e_{sc}$ ,  $e_{sd}$ ,  $-e_{sc}$ ,  $-e_{sd}$ ,  $e_{sc}$ ,  $e_{sd}$ ,  $-e_{sc}$ ,  $-e_{sd}$ 이 증폭기를 통하여 감지된다. 감지 출력전압은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e_{sc} &= -b_{\xi u} u_{\xi C} + b_{\xi \phi} \phi_{\eta C} \\ e_{sd} &= -b_{\xi u} u_{\xi S} + b_{\xi \phi} \phi_{\eta S} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$b_{\xi u} = \frac{E_s}{(C_{inp} + C_{zs})} \frac{\epsilon ab}{d_{z0}^2} \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3}{2} \Delta \theta_z\right)$$

$$b_{\xi \phi} = \frac{E_s}{(C_{inp} + C_{zs})} \frac{\epsilon b^3}{12d_{z0}^2} \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3}{2} \Delta \theta_z\right)$$

$$C_{zs} = \frac{\epsilon ab}{d_{z0}} \Delta \theta_z$$

$d_{z0}$ 는 평형상태에서의 수직방향 공격이다.

전체 전극의 위치에너지는 다음과 같다.

$$V_E = V_{EI} + V_{EO} \quad (14)$$

$$V_{EI} = -\frac{1}{2} [u_{IC}^T K_{EI} u_{IC} + u_{IS}^T K_{EI} u_{IS}]$$

$$- [u_{IC}^T a_{EI} e_{\xi C} + u_{IS}^T a_{EI} e_{\xi S}]$$

$$\begin{aligned} V_{EO} &= -\frac{1}{2} [u_{OC}^T K_{EO} u_{OC} + u_{OS}^T K_{EO} u_{OS}] \\ &\quad - [u_{OC}^T a_{EO} e_{\xi C} + u_{OS}^T a_{EO} e_{\xi S}] \end{aligned}$$

여기서

$$e_{\xi C} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{da} + e_{db}), \quad e_{\xi S} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{da} - e_{db})$$

$$e_{\zeta C} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{dc} + e_{dd}), \quad e_{\zeta S} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{dc} - e_{dd})$$

$$K_{EI} = \begin{bmatrix} k_{ruu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_{EI} = \begin{bmatrix} a_{\xi u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{EO} = \begin{bmatrix} k_{zuu} & 0 & k_{z\phi\phi} \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{z\phi\phi} & 0 & k_{z\phi\phi} + k_{r\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad a_{EO} = \begin{bmatrix} a_{\xi u} \\ 0 \\ a_{\xi \phi} \end{bmatrix}$$

$$k_{ruu} = k_{druu} + k_{sruu} + k_{bruu}$$

$$k_{r\phi\phi} = k_{dr\phi\phi} + k_{sr\phi\phi} + k_{br\phi\phi}$$

$$k_{zuu} = k_{dzuu} + k_{szuu} + k_{bzuu}$$

$$k_{z\phi\phi} = k_{dz\phi\phi} + k_{sz\phi\phi} + k_{bz\phi\phi}$$

$$k_{z\phi\phi} = k_{dz\phi\phi} + k_{sz\phi\phi} + k_{bz\phi\phi}$$

$$a_{\xi u} = -E_p \frac{\epsilon r_0 t}{d_{r0}^2} 4 \sin(\Delta \theta_r)$$

$$a_{\xi u} = E_p \frac{\epsilon ab}{d_{z0}^2} 4 \sin\left(\frac{3}{2} \Delta \theta_z\right)$$

$$a_{\xi \phi} = -E_p \frac{\epsilon b^3}{12d_{z0}^2} 4 \sin\left(\frac{3}{2} \Delta \theta_z\right)$$

$$k_{druu} = E_p^2 \frac{\epsilon r_0 t}{d_{r0}^3} (4 \Delta \theta_r)$$

$$k_{bruu} = E_r^2 \frac{\epsilon r_0 t}{d_{r0}^3} (8 \Delta \theta_r)$$

$$k_{sruu} = E_s^2 \frac{\epsilon r_0 t}{d_{r0}^3} (4 \Delta \theta_r)$$

$$- E_s^2 \frac{(2C_{inp} + C_{rs})}{(C_{inp} + C_{rs})^2} \left( \frac{\epsilon r_0 t}{d_{r0}^2} \sin(\Delta \theta_r) \right)^2 4$$

$$k_{dr\phi\phi} = E_p^2 \frac{\epsilon r_0 t^3}{12d_{r0}^3} (4 \Delta \theta_r)$$

$$k_{br\phi\phi} = E_r^2 \frac{\epsilon r_0 t^3}{12d_{r0}^3} (8 \Delta \theta_r)$$

$$k_{sr\phi\phi} = E_s^2 \frac{\epsilon r_0 t^3}{12d_{r0}^3} (4 \Delta \theta_r)$$

$$k_{dzuu} = E_p^2 \frac{\epsilon ab}{d_{z0}^3} (6 \Delta \theta_z)$$

$$k_{dz\phi\phi} = E_p^2 \frac{\epsilon ab^3}{12d_{z0}^3} (6 \Delta \theta_z)$$

$$k_{dz\phi} = -E_p^2 \frac{\epsilon b^3}{12a_{z0}^3} (6 \Delta \theta_z)$$

$$k_{szuu} = E_s^2 \frac{\epsilon ab}{a_{z0}^3} (6 \Delta \theta_z) - E_s^2 \frac{(2C_{inp} + C_{zs})}{(C_{inp} + C_{zs})^2} \left( \frac{\epsilon ab}{a_{z0}^2} \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3}{2} \Delta \theta_z\right) \right)^2 6$$

$$k_{sz\phi\phi} = E_s^2 \frac{\epsilon ab^3}{12a_{z0}^3} (6 \Delta \theta_z) - E_s^2 \frac{(2C_{inp} + C_{zs})}{(C_{inp} + C_{zs})^2} \left( \frac{\epsilon b^3}{12a_{z0}^2} \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3}{2} \Delta \theta_z\right) \right)^2 6$$

$$k_{szu\phi} = -E_s^2 \frac{\epsilon b^3}{12a_{z0}^3} (6 \Delta \theta_z) + E_s^2 \frac{(2C_{inp} + C_{zs})}{(C_{inp} + C_{zs})^2} \frac{a}{12} \left( \frac{\epsilon b^2}{a_{z0}^2} \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3}{2} \Delta \theta_z\right) \right)^2 6$$

$$k_{bzuu} = E_z^2 \frac{\epsilon ab}{a_{z0}^3} (12 \Delta \theta_z)$$

$$k_{bz\phi\phi} = E_z^2 \frac{\epsilon ab^3}{12a_{z0}^3} (12 \Delta \theta_z)$$

$$k_{bz\phi\phi} = -E_z^2 \frac{\epsilon b^3}{12a_{z0}^3} (12 \Delta \theta_z)$$

### 3. 링 자이로스코프의 운동방정식

#### 3.1 운동방정식

자이로스코프의 각가속도를 무시해서 Lagrange 방정식으로 부터 얻어진 링 자이로스코프의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{IC} & 0 \\ 0 & M_{IS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{IC} \\ \ddot{u}_{IS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{IC} & 0 \\ 0 & G_{IS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{IC} \\ \dot{u}_{IS} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} G_{CC} & G_{CS} \\ -G_{CS} & G_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{OC} \\ \dot{u}_{OS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{IC} & -K_{IS} \\ K_{IS} & K_{IC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{IC} \\ u_{IS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{EI} e_{\epsilon C} \\ a_{EI} e_{\epsilon S} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} M_{OC} & 0 \\ 0 & M_{OS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{OC} \\ \ddot{u}_{OS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{OC} & 0 \\ 0 & G_{OS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{OC} \\ \dot{u}_{OS} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} G_{CC}^T & -G_{CS}^T \\ G_{CS}^T & G_{CC}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{IC} \\ \dot{u}_{IS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{OC} & -K_{OS} \\ K_{OS} & K_{OC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{OC} \\ u_{OS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{EO} e_{\zeta C} \\ a_{EO} e_{\zeta S} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$M_{IC} = M_{RI} + \frac{N}{2} M_{Lb} \quad M_{OC} = M_{RO} + \frac{N}{2} M_{LO}$$

$$G_{IC} = G_1 - G_1^T, \quad G_{OC} = G_4 - G_4^T$$

$$G_{CC} = 2G_2, \quad G_{CS} = 2G_3$$

$$K_{IC} = K_{RIS} + \frac{N}{2} K_{LI} - K_{EI}, \quad K_{IS} = K_{RIA}$$

$$K_{OC} = K_{ROS} + \frac{N}{2} K_{LO} - K_{EO}, \quad K_{OS} = K_{ROA}$$

#### 3.2 자유도 축소된 운동방정식

회전하지 않는 링 자이로스코프의 운동방정식은 면내운동과 면외운동으로 분리된다. 이 때 면내 및 면외 고유진동은 구조의 순환대칭성으로 인하여 모든 고유진동수에 대하여 서로 직각인 두개의 고유모드를 갖는다.

최저차 면내고유진동수  $\omega_\xi$ 에 대한 고유모드를 이용하여 면내운동의 자유도를 축소하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u_{IC} \\ u_{IS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{IC} \\ z_{IS} \end{bmatrix} u_{\xi C} + \begin{bmatrix} -z_{IS} \\ z_{IC} \end{bmatrix} u_{\xi S} \quad (16)$$

여기서

$$z_{IC} = \begin{bmatrix} 1 \\ z_{\eta C} \\ z_{\phi C} \end{bmatrix}, \quad z_{IS} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_{\eta S} \\ z_{\phi S} \end{bmatrix}$$

최저차 면외고유진동수  $\omega_\zeta$ 에 대한 고유모드를 이용하여 면외운동의 자유도를 축소하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u_{OC} \\ u_{OS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{OC} \\ z_{OS} \end{bmatrix} u_{\zeta C} + \begin{bmatrix} -z_{OS} \\ z_{OC} \end{bmatrix} u_{\zeta S} \quad (17)$$

여기서

$$z_{OC} = \begin{bmatrix} 1 \\ z_{\phi C} \\ z_{\eta C} \end{bmatrix}, \quad z_{OS} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_{\phi S} \\ z_{\eta S} \end{bmatrix}$$

링 자이로스코프의 운동방정식의 자유도를 상기와 같이 축소하고 모달 감쇠를 추가하여 운동방정식을 단위질량행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{u}_{IC} \\ \ddot{u}_{IS} \\ \ddot{u}_{OC} \\ \ddot{u}_{OS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_\phi \omega_\xi & -\lambda_3 \omega_\zeta & \lambda_1 \omega_\zeta + \lambda_2 \omega_\zeta & -\lambda_1 \omega_\zeta + \lambda_2 \omega_\zeta \\ \lambda_2 \omega_\zeta & 2\xi_\eta \omega_\zeta & \lambda_1 \omega_\zeta - \lambda_2 \omega_\zeta & \lambda_1 \omega_\zeta + \lambda_2 \omega_\zeta \\ -\lambda_1 \omega_\zeta - \lambda_2 \omega_\zeta & -\lambda_1 \omega_\zeta + \lambda_2 \omega_\zeta & 2\xi_\eta \omega_\zeta & 0 \\ \lambda_1 \omega_\zeta - \lambda_2 \omega_\zeta & -\lambda_1 \omega_\zeta - \lambda_2 \omega_\zeta & 0 & 2\xi_\phi \omega_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{IC} \\ \dot{u}_{IS} \\ \dot{u}_{OC} \\ \dot{u}_{OS} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \omega_\xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_\zeta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{IC} \\ u_{IS} \\ u_{OC} \\ u_{OS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\xi C} \\ f_{\xi S} \\ f_{\zeta C} \\ f_{\zeta S} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $\xi_\phi$ ,  $\xi_\eta$ 는 면내 및 면외의 고유진동수  $\omega_\phi$ ,  $\omega_\eta$ 에 대한 모달 감쇠계수이다.

$$\lambda_1 = \frac{m_1}{m_\xi}, \quad \lambda_2 = \frac{m_2}{m_\xi}, \quad \lambda_3 = \frac{m_3}{m_\xi}$$

$$\lambda_1 = \frac{m_1}{m_\zeta}, \quad \lambda_2 = \frac{m_2}{m_\zeta}$$

$$f_{\xi C} = \frac{F_{\xi C}}{m_\xi}, \quad f_{\xi S} = \frac{F_{\xi S}}{m_\xi}, \quad f_{\zeta C} = \frac{F_{\zeta C}}{m_\zeta}, \quad f_{\zeta S} = \frac{F_{\zeta S}}{m_\zeta}$$

$$\omega_\xi = \sqrt{\frac{k_\xi}{m_\xi}}, \quad \omega_\zeta = \sqrt{\frac{k_\zeta}{m_\zeta}}$$

$$m_\xi = z_{IC}^T M_{IC} z_{IC} + z_{IS}^T M_{IC} z_{IS}$$

$$m_\zeta = z_{OC}^T M_{OC} z_{OC} + z_{OS}^T M_{OC} z_{OS}$$

$$k_\xi = z_{IC}^T K_{IC} z_{IC} + z_{IS}^T K_{IC} z_{IS} - z_{IC}^T K_{IS} z_{IS} + z_{IS}^T K_{IS} z_{IC}$$

$$k_\zeta = z_{OC}^T K_{OC} z_{OC} + z_{OS}^T K_{OC} z_{OS}$$

$$- z_{OC}^T K_{OS} z_{OS} + z_{OS}^T K_{OS} z_{OC}$$

$$m_1 = \pi \rho A a \{1 + z_{uNS} + \mu_\zeta a^2 (z_{\phi NS} z_{\phi \zeta C} - z_{\phi \eta C} z_{\phi \zeta S})\}$$

$$m_2 = \pi \rho A a \{-z_{uNC} + \mu_\zeta a^2 (z_{\phi \eta C} z_{\phi \zeta C} + z_{\phi \eta S} z_{\phi \zeta S})\}$$

$$m_3 = \pi \rho A a (-4z_{uNS})$$

$$F_{\xi C} = a_\xi e_{\xi C}, \quad F_{\xi S} = a_\xi e_{\xi S}$$

$$F_{\zeta C} = a_{\zeta 1} e_{\zeta C} + a_{\zeta 2} e_{\zeta S}, \quad F_{\zeta S} = -a_{\zeta 1} e_{\zeta C} + a_{\zeta 2} e_{\zeta S}$$

$$a_\xi = a_{\xi u}, \quad a_{\zeta 1} = a_{\zeta u} + z_{\phi \eta C} a_{\zeta \phi}, \quad a_{\zeta 2} = z_{\phi \eta S} a_{\zeta \phi}$$

감지 출력전압은 다음과 같다.

$$e_{sa} = b_\xi u_{\xi C}$$

$$e_{sb} = b_\xi u_{\xi S}$$

$$e_{sc} = -b_{\zeta 1} u_{\zeta C} + b_{\zeta 2} u_{\zeta S}$$

$$e_{sd} = -b_{\zeta 2} u_{\zeta C} - b_{\zeta 1} u_{\zeta S}$$

(19)

여기서

$$b_\xi = b_{\xi u}, \quad b_{\zeta 1} = b_{\zeta u} - z_{\phi \eta C} b_{\zeta \phi}, \quad a_{\zeta 2} = -z_{\phi \eta S} b_{\zeta \phi}$$

### 3.3 링 자이로스코프의 각속도 측정

$F_{\xi C}, F_{\xi S}, F_{\zeta C}, F_{\zeta S}$ 를 제어하여  $u_{\xi C}$ 의 진폭이 일정하게 되도록 하면서  $u_{\xi S}, u_{\zeta C}, u_{\zeta S}$ 의 진폭이 영이 되도록 할 때, 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$u_{\xi C} = U_{\xi C} \sin \omega_\xi t$$

$$F_{\xi C} = Q_{\xi C} \cos \omega_\xi t$$

$$F_{\xi S} = Q_{\xi S} \cos \omega_\xi t$$

$$F_{\zeta C} = Q_{\zeta C} \cos \omega_\zeta t$$

$$F_{\zeta S} = Q_{\zeta S} \cos \omega_\zeta t$$

(20)

여기서

$$Q_{\xi C} = 2m_\xi \xi \omega_\xi^2 U_{\xi C}, \quad Q_{\xi S} = m_\xi \lambda_3 \Omega_z \omega_\xi U_{\xi C}$$

$$Q_{\zeta C} = m_\zeta (-\lambda_1 \Omega_x - \lambda_2 \Omega_y) \omega_\zeta U_{\zeta C}$$

$$Q_{\zeta S} = m_\zeta (\lambda_1 \Omega_x - \lambda_2 \Omega_y) \omega_\zeta U_{\zeta C}$$

따라서 링 자이로스코프의 각속도는 다음과 같은 식을 사용하여 얻어진다.

$$\Omega_x = \frac{2m_\xi \xi \omega_\xi}{m_\zeta (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left\{ \lambda_1 \left( \frac{Q_{\zeta S}}{Q_{\xi C}} \right) - \lambda_2 \left( \frac{Q_{\zeta C}}{Q_{\xi C}} \right) \right\}$$

$$\Omega_y = \frac{2m_\xi \xi \omega_\xi}{m_\zeta (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left\{ -\lambda_1 \left( \frac{Q_{\zeta C}}{Q_{\xi C}} \right) - \lambda_2 \left( \frac{Q_{\zeta S}}{Q_{\xi C}} \right) \right\} \quad (21)$$

$$\Omega_z = \frac{2\xi \omega_\xi}{\lambda_3} \left( \frac{Q_{\xi S}}{Q_{\xi C}} \right)$$

상기와 같은 재평형력 측정에 의한 각속도 측정방법은 각속도가 시간에 따라서 빠르게 변하는 경우에도 각속도의 응답 지연시간을 필요로 하지 않는다.

## 4. 링 자이로스코프의 동특성 해석

### 4.1 물성치 및 크기

링과 지지대의 재질은 실리콘으로 수치해석에서 다음과 같은 물성치 및 크기를 사용하였다.

$$N=8, E=180 \text{ GPa}, \nu=0.28, \rho=2340 \text{ kg/m}^3$$

$$a=2000 \text{ }\mu\text{m}, b=64 \text{ }\mu\text{m}(\text{변경가능}), t=25 \text{ }\mu\text{m}$$

$$h=5 \text{ }\mu\text{m}, L_1=125 \text{ }\mu\text{m}, L_2=500 \text{ }\mu\text{m}, L_3=125 \text{ }\mu\text{m}$$

전극의 특성치는 다음과 같다.

$$d_{r0}=4 \text{ }\mu\text{m}, d_{s0}=4 \text{ }\mu\text{m}, \Delta\theta_r=9^\circ, \Delta\theta_s=6^\circ$$

$$\epsilon=8.85 \text{ pF/m}, E_p=10 \text{ V}, E_{bias}=5 \text{ V},$$

$$C_{inp}=50 \text{ fF}, E_z=10 \text{ V}, E_r=10 \text{ V}(\text{변경가능})$$

### 4.2 고유진동수

링 단면중심 C점에 축약된 지지대 한 개의 면내 및 면외 질량행렬과 면내 및 면외 강성행렬은 지지대를 8개의 보 요소로 모델링해서 Guyan 자유도 축소 방법을 사용하여 얻어진다.

링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성을 무시하는 경우에, 지지대로 지지되지 않는 자유 링의 절직경수  $n=2$ 의 면내 고유진동수와 절직경수  $m=3$ 의 면외 고유진동수가 일치하기 위해서는  $b/t$ 가 약 2.854가 되어야 한다<sup>(5,6)</sup>.

$b=71.35 \text{ }\mu\text{m}$ 일 때에는 자유 링의 면내 및 면외 고유진동수는 각각 19,287 Hz, 19,287 Hz이다. 이 때 지지대의 질량 및 굽힘 전단을 무시하는 경우에는 지지 링의 면내 및 면외 고유진동수는 각각 21,290 Hz, 19,694 Hz이다.

지지 링의 면내 및 면외 고유진동수가 일치하기 위해서는  $b=63.9387 \text{ }\mu\text{m}$ 가 되어야 한다. 이 때의 고유진동수는 각

각 19,715.4 Hz, 19,715.4 Hz이다.

$b$ 의 수치를  $\mu\text{m}$ 단위에서 반올림하여  $b=64 \mu\text{m}$ 로 정하면 지지 링의 면내 및 면의 고유진동수는 각각 19,728 Hz, 19,715 Hz가 되어 면내 및 면의 고유진동수가 일치하지 않게 된다. 전극의 스프링 효과를 고려한 경우에는 링 자이로스코프의 면내 및 면의 고유진동수는 각각 19,698 Hz, 19,623 Hz이다.

링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성과 지지대의 질량 및 굽힘 전단을 고려하는 경우에,  $b=64 \mu\text{m}$ 일 때 링 자이로스코프의 면내 및 면의 고유진동수는 전극의 스프링 효과를 무시하는 경우에는 각각 19,565 Hz, 19,596 Hz이고, 전극의 스프링 효과를 고려하는 경우에는 각각 19,535 Hz, 19,504 Hz이다.

링 자이로스코프의 면내 및 면의 고유진동수가 일치되도록 하기 위하여  $E_r$ 를 10 V로 고정하고  $E_z$ 를 조정하면  $E_z$ 가 7.06 V일 때 링 자이로스코프의 고유진동수는 각각 19,535 Hz이다.

$E_r$ 를 0 V로 고정하고  $E_z$ 를 조정하는 경우에는  $E_z$ 가 4.27 V일 때 링 자이로스코프의 면내 및 면의 고유진동수가 일치하게 되고 고유진동수는 19,554 Hz이다.

### 4.3 방정식 매개변수

$E_r=10 \text{ V}$ ,  $E_z=7.06 \text{ V}$ 일 때, 링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성과 지지대의 질량 및 굽힘 전단을 고려하는 경

Table 1 Equation parameters. Unit : kg, m, s, C

Characteristic \ Case	Consider	Neglect
$\omega_\varepsilon$	$1.22741 \times 10^5$	$1.23764 \times 10^5$
$\omega_\zeta$	$1.22741 \times 10^5$	$1.23486 \times 10^5$
$m_\varepsilon$	$2.98575 \times 10^{-8}$	$2.94053 \times 10^{-8}$
$m_\zeta$	$2.38046 \times 10^{-8}$	$2.35242 \times 10^{-8}$
$\lambda_1$	$3.94097 \times 10^{-1}$	$4.00000 \times 10^{-1}$
$\lambda_2$	$1.55450 \times 10^{-5}$	0
$\lambda_3$	$1.57583 \times 10^0$	$1.60000 \times 10^0$
$\lambda_1'$	$4.94307 \times 10^{-1}$	$5.00000 \times 10^{-1}$
$\lambda_2'$	$1.94977 \times 10^{-5}$	0
$a_\varepsilon$	$-1.75825 \times 10^{-7}$	$-1.75825 \times 10^{-7}$
$a_{\varepsilon 1}$	$4.43087 \times 10^{-7}$	$4.43087 \times 10^{-7}$
$a_{\varepsilon 2}$	$2.54659 \times 10^{-13}$	$2.55496 \times 10^{-13}$
$b_\varepsilon$	$3.24855 \times 10^5$	$3.24855 \times 10^5$
$b_{\varepsilon 1}$	$5.45768 \times 10^5$	$5.45768 \times 10^5$
$b_{\varepsilon 2}$	$3.13673 \times 10^{-1}$	$3.14704 \times 10^{-1}$

우와 무시하는 경우의 링 자이로스코프의 방정식 매개변수의 값들은 Table 1에서와 같다.

## 5. 결론

본 논문에서는 링을 가진하거나 링의 변위를 감지하고 고유진동수의 균형을 잡는 전극의 정전효과를 고려하면서 링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성과 지지대의 질량 및 굽힘 전단을 고려한 마이크로 3축 링 자이로스코프의 운동방정식을 체계적으로 유도하여 동역학 특성을 해석하였다.

링의 크기를 정할 때 반올림 오차로 인하여 필연적으로 발생하여 회전속도의 민감도를 떨어지게 하는 면내 및 면의 고유진동수의 차이를 합리적인 범위 내에서 균형전극의 전압차를 조정하여 줄일 수 있었다.

또한, 제시된 링 자이로스코프에 관해서 링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성과 지지대의 질량 및 굽힘 전단을 고려한 방정식 매개변수의 값들을 계산하였고 상기의 효과를 무시하여 계산한 결과와 비교하였다.

## 참고 문헌

- (1) Yazdi, N., Ayazi, F., and Najafi, K., 1998, "Micromachined Inertial Sensors," Proc. IEEE, Vol. 86, No. 8, pp. 1640~1659.
- (2) Putty, M. W. and Najafi, K., 1994, "A Micromachined Vibrating Ring Gyroscope," Tech. Dig. Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, pp. 213~220.
- (3) Putty, M. W., 1995, "A Micromachined Vibrating Ring Gyroscope," Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor.
- (4) Eley, R., Fox, C. H. J., and McWilliam, S., 2000, "Coriolis Coupling Effects on the Vibration of Rotating Rings," Journal of Sound and Vibration, Vol. 238(3), pp. 459~480.
- (5) Gallacher, B. J., Burdess, J. S., Harris, A. J., and McNie, M. E., 2001, "Principles of a Three-Axis Vibrating Gyroscope," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 37, No. 4, pp. 1333~1343.
- (6) 김창부, 최상현, 2002, "마이크로 3축 링 자이로스코프의 동역학," 한국소음진동공학회논문집, 제 12 권, 제 12 호, pp. 1001~1009.