

유공 후판의 자유진동해석

Free Vibration Analysis of Opening Thick Plate

○ 오숙경* · 이용수† · 김일중** · 이효진***

Oh, Soog Kyoung, Lee, Yong Soo and Kim, Il Jung and Lee, Hoy Jin

Key Words : Free Vibration, Thick Plate, Pasternak Foundation, Opening plate, Natural frequency

ABSTRACT

This paper is analysis of opening thick plate on foundation. This paper has the object of investigating natural frequencies of opening thick plates on Pasternak foundation by means of finite element method and providing Kinematic design data for mat of building structures. In this paper, vibration analysis of rectangular opening thick plate is done by use of Serendipity finite element with 8 nodes by considering shearing strain of plate. It is shown that natural frequencies depend on not only Winkler foundation parameter but also shear foundation parameter, opening position, opening size.

T : 판의 운동에너지

U : 판의 변형에너지

기호설명

$2a \times 2b$: 전체판의 크기

D : 판의 휨강성

E : 탄성계수

G : 전단탄성계수

h : 판 두께

k_w : Winkler 지반강성

k_g : 전단지반강성

$SFP = \frac{k_g a^2}{D}$: 전단지반계수

$WFP = \frac{k_w a^4}{D}$: Winkler지반계수

ρ : 단위 체적당질량

ν : 포아송비

w : 판의 수직처짐

θ_x : 판의 x 방향 회전각

θ_y : 판의 y 방향 회전각

ω : 판의 고유진동수

1. 서론

구조물에서 발생하는 자유진동은 구조체의 형상과 크기에 따라 다르게 나타날 수 있다. 구조물에 따라 각기 다른 진동수는 항타, 발파, 기계진동과 같은 진동원의 진동수와 같은 크기를 갖게 되면 구조물은 공진 현상을 일으키게 된다. 이러한 공진현상은 구조물에 손상을 줄 수 있으므로 진동의 영향을 주로 받는 구조체의 진동수의 조절은 중요하다. 특히 지하층 바닥의 집수정, 파이프 덕트를 위한 개구부, 상하 통로를 위한 개구부를 갖는 판의 자유진동에 의해 주로 영향을 받을 수 있다.

지하층 바닥의 경우는 지반 위에 놓인 후판으로 모형화할 수 있으며 지반위에 놓인 개구부를 갖는 판의 자유진동 해석을 함으로써 구조체에 진동에 의한 영향을 최소화시키고 구조체의 특히 판구조물의 동적설계의 근간이 된다.

1950년대 D. Young¹⁾, G. B. Warburton²⁾에 의해 장방형 판의 진동해석이 이루어진 후 A. W. Leissa³⁾에 의해 1973년 다양한 조건하에 장방형판의 자유진동이 해석되었고, 1976년 D. J. Gorman⁴⁾ 등은 지지조건이 다른 장방형판들에 대해 증첩법을 사용하여 자유진동 해석을 행하였다. 1997년 R. O. Grossi⁵⁾ 등은 원형 개구부를 갖는 장방형판의 자유진동해석을 하였고, 1998년 Mecit Celik⁶⁾ 등은 Two-Parameter 지반상의 판을 해석하였다. 2003년 A. V. Singh⁷⁾ 등에 의해 개구부를 갖는 박판의 유한 변위 정적해석이 이루어졌다.

국내에서는 1979년 권택진⁸⁾에 의해 유공후판의 탄성해석

† 책임저자, 정회원, 원광대학교 건축학부 정교수
전화: 063-850-6709; Fax: 063-843-0782
E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

* 정회원, 원광대학교 대학원 건축공학과 박사과정

** 정회원, 전북과학대학 건축·토목계열 조교수

*** 정회원, 원광대학교 대학원 건축공학과 석사과정

에 관한 연구가 이루어졌으며, 이용수등은 1994년 탄성지지 유공 보강판의 좌굴해석⁹⁾, 1999년 탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석¹⁰⁾을 하였고 이병구¹¹⁾등은 Pasternak지반에 지지된 곡선보의 자유진동 해석에 대한 연구 결과를 발표하였다.

문헌고찰의 결과, pasternak 지반으로 지지된 유공 판에 대한 연구는 찾아볼 수 없었다.

본 연구에서는 유한요소법을 적용하여 Pasternak 지반으로 지지된 유공판의 자유진동해석을 하였다.

유공판의 유한요소 8절점 Serendipity 요소계를 적용하여 요소에 대한 강성행렬을 구한 뒤 전체 요소에 대해 조합하여 유공판의 진동방정식을 얻는다. 판의 해석을 위해 Mindlin 판 이론을 적용하였다. 구조물을 지지하는 지반은 전단층을 추가하여 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모델링하였다.

2. 판의 자유진동 해석

2. 1 가상일의 원리

판요소의 운동 에너지 T_e 와 변형 에너지 U_e 를 구하고 각 요소의 운동에너지와 변형에너지를 조합하고 이들의 변분을 0으로 놓아 고유치 방정식을 얻을 수 있다. 이 고유치 방정식의 해가 판의 고유진동수가 되고 이 고유 진동수에 대응하는 고유 벡터가 진동모드가 된다.

가상일의 원리에 의하여 다음 방정식이 얻어진다.

$$\delta (T - U) = 0 \quad (1)$$

여기서, T : 판 전체요소의 운동에너지

U : 판 전체요소의 변형에너지

2. 2 판요소의 강성 행렬 및 질량 행렬

판요소의 운동에너지 T_e 는 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho (h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dx dy \quad (2)$$

여기서 $2a, 2b$: 판요소의 길이, 폭

ρ : 단위 체적당 판의 질량

h : 판요소의 두께

$\dot{w}, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$: 판의 시간변화에 따른 변위 및 회전각

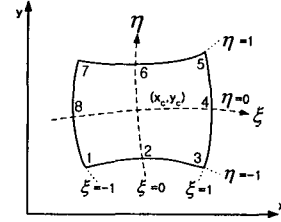


Fig. 1 8-nodes serendipity element system
Winkler지반 강성과 전단지반 강성을 고려한 판요소의 변형에너지 U_e 는 다음과 같다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [M]^T \{ \chi \} dA + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T \{ \phi \} dA + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA + \frac{1}{2} \int_A k_g \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \quad (3)$$

여기서, $[M]$: 모멘트,

$[Q]$: 전단력,

$\{ \chi \}$: 곡률,

$\{ \phi \}$: 전단변형각,

k_w : Winkler지반강성 k_g : 전단지반강성,

w : 판의 수직변위 $dA = dx \cdot dy$

Fig. 1과 같이 8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위와 회전변위를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \quad (4)$$

여기서

$$\{ \delta_e \} = [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, w_8, \theta_{x8}, \theta_{y8}]^T$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_g(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

(4)식을 이용하여 (2)식을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [M_e] \{ \delta_e \} \quad (5)$$

(4)식을 (3)식 우변 첫째 항에 대입하면

$$\frac{1}{2} \int_A [M]^T \{ \chi \} dA = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [K_{ef}] \{ \delta_e \} \quad (6)$$

여기서,

$$[K_{ef}] = \int_A [B_f]^T [D_f]^T [B_f] dA$$

$$[D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$[B_{fi}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

ν : 포와송비

(4)식을 (3)식 우변 둘째 항에 대입하면

$$\frac{1}{2} \int_A [Q]^T \{ \phi \} dA = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [K_{es}] \{ \delta_e \} \quad (7)$$

여기서,

$$[K_{es}] = \int_A [B_s]^T [D_s]^T [B_s] dA$$

$$[B_{si}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$

$$[D_s] = \frac{Eh}{2(1+\nu)\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

α : 전단 보정 계수 (=6/5)

(3)식 우변 셋째항도 마찬가지로 정리하면

$$\frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA = \frac{1}{2} \{ w_e \}^T [W_{fe}] \{ w_e \}$$

여기서,

$$[W_{fe}] = \int_A k_w [\bar{N}]^T [\bar{N}] dA$$

(3)식 우변 넷째항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_A k_g \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \\ & = \frac{1}{2} \{ w_e \}^T \{ [S_{xe}] + [S_{ye}] \} \{ w_e \} \quad (9) \end{aligned}$$

여기서, $[S_{xe}] = \int_A k_g \frac{\partial [\bar{M}]^T}{\partial x} \frac{\partial [\bar{M}]}{\partial x} dA$

$$[S_{ye}] = \int_A k_g \frac{\partial [\bar{M}]^T}{\partial y} \frac{\partial [\bar{M}]}{\partial y} dA$$

(6), (7), (8), (9)식을 (3)식에 대입하면 변형에너지는 다음과 같이 된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [K_e] \{ \delta_e \} + \frac{1}{2} \{ w_e \}^T [K_{ef}] \{ w_e \} \quad (10)$$

여기서

$$[K_e] = [K_{ef}] + [K_{es}]$$

$$[K_{ef}] = [W_{fe}] + [S_{xe}] + [S_{ye}]$$

2.3 고유치 방정식

판 요소의 운동에너지 (5)식과 변형에너지 (10)식을 전체 판에 대한 것으로 조합하고 (1)식에 대입하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_E] - \omega^2 [K_M] = 0 \quad (11)$$

여기서,

$[K_E]$: $[K_e]$, $[K_{fe}]$ 를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 강성행렬

$[K_M]$: $[M_e]$ 를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 질량행렬

ω : 판의 고유 원진동수

3. 검증 및 적용

3.1 검증

유공판의 자유진동해석 프로그램의 정밀도를 검증하기 위해 본 연구해와 문헌해를 비교한다.

Table 1에서 무차원 Winkler지반 파라미터 WFP와 무차

원 전단지반 파라미터 SFP를 각각 변화시키며 기존 참고문헌¹²⁾과 비교하였다.

Winkler 지반과 전단지반의 변화에 해를 비교한 결과 최대 0.083%의 오차를 보였다.

Table 1에서 보듯이 WFP의 크기가 커질수록 진동수도 커지며 WFP=10²까지는 고유진동수 증가폭이 적었으나, WFP=10² 보다 커지면서 급격한 증가를 보였다. 그리고 전단지반 파라미터(SFP)을 무시하는 경우인 SFP=0 와 SFP=10인 경우를 비교하면 진동수가 무시할 수 없을 정도

Table 1 Natural frequency of square plate on homogeneous foundation($\lambda^2 = \omega^2 a^2 \sqrt{\rho/D}$)

WFP	SFP	This Paper Solutions	Reference ¹²⁾	Error
0	0	17.4342	17.4486	0.083
10		17.7067	17.7208	0.079
10 ²		19.9915	20.0042	0.063
10 ³		35.4956	35.5028	0.020
10 ⁴		98.5611	98.5331	0.028
0	10	22.2006	22.2117	0.050
10		22.4150	22.4261	0.049
10 ²		24.2596	24.2698	0.042
10 ³		38.0572	38.0638	0.017
10 ⁴		99.4756	99.4473	0.028

로 증가하는 것으로 보아 Pasternak 지반에서 고려한 전단지반의 효과도 고유진동수의 변화에 큰 영향을 주는 것으로 보인다.

3. 2 유공판의 자유진동

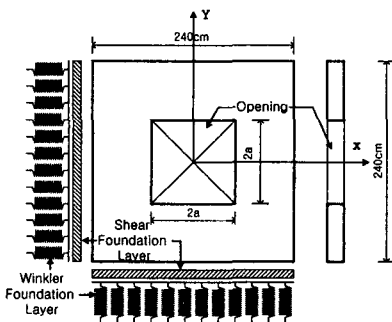


Fig. 2 Opening plate modelling on Pasternak foundation

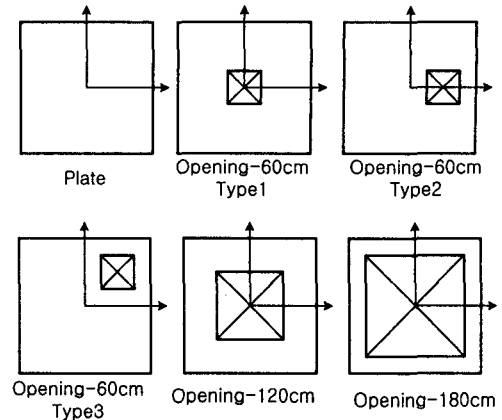


Fig. 3 Opening size and position of the plates

앞에서 자유진동 대해 본 연구와 문헌¹²⁾의 해를 비교하였다. 그 결과, 본 연구의 결과가 매우 높은 정도를 보임을 알 수 있었다. 따라서 본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 비균질 Pasternak 지반으로 지지된 유공판의 자유진동 해석을 시행할 수 있다. 유공판의 자유진동해석을 위해 Fig. 2와 같이 지반은 Pasternak 지반으로 모델링하여 Winkler 지반 파라미터, 전단지반 파라미터를 변화시켰으며, Fig. 3과 같이 판의 개구부의 크기와 개구부의 위치, 판의 두께를 변화시키며 자유진동 해석을 하였다.

해석에 사용한 지반 및 보강판의 기계적, 기하적 제원은 다음과 같으며, 이 연구에서 보강판의 지지조건은 4변 단순지지에 국한하였다.

탄성계수 (E) $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

포와송 비 (ν) 0.167

지지조건: 4변 단순지지

판의 질량 밀도 (ρ_b) $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$

판의 크기: 240cm×240cm

판 두께: 12cm, 15cm, 18cm

Winkler 지반 변수 (WFP) 0, 10, 100, 1000

전단 지반 변수 (SFP) 0, 5, 10, 15

개구부 크기: 60cm×60cm, 120cm×120cm,

180cm×180cm

Fig. 4~Fig. 7은 유공판의 판두께, 개구부 크기, 개구부 위치, 지반파라미터 변화에 따른 고유진동수를 나타낸 것이다.

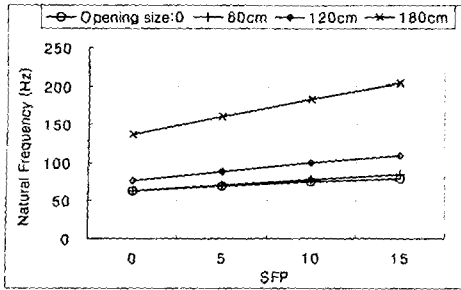


Fig. 4 variations natural frequency of plate versus variation of opening size

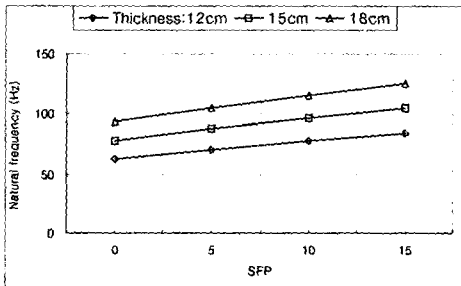


Fig. 5 variations natural frequency of opening plate versus variation of plate thickness

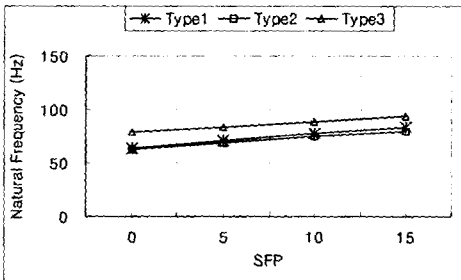


Fig. 6 Variations natural frequency of opening plate versus variation of opening position

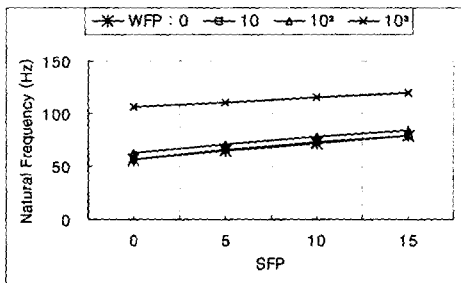


Fig. 7 Variations natural frequency versus foundation parameters

Fig. 4는 WFP=100으로 일정하고 SFP와 개구부의 크기 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 개구부

크기와 SFP가 커짐에 따라 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.

Fig. 5는 WFP=100으로 일정하고 개구부 크기가 60cm 이고 개구부가 중앙에 위치할 경우 판의 두께를 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 판의 두께가 두꺼워질 수록 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다. Fig. 6은 WFP=100으로 일정하고 개구부 크기가 60cm일 때 개구부의 위치 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 개구부가 중앙에 위치할 경우(Type1)와 가장자리(Type2)에 위치할 경우에 비해 모서리로 위치할 경우(Type3) 진동수가 커짐을 볼 수 있다. Fig. 7은 개구부 크기가 60cm이고 중앙부에 위치할 경우 지반 파라미터(SFP, WFP) 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 SFP와 WFP가 증가함에 따라 유공판의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.

4. 결론

이 연구는 비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 유공판의 자유진동해석 관한 것이다. 유공판의 지반은 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모형화하였다. 판해석은 Mindlin 판 이론을 적용하였다. 이 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서 산출한 지반 위에 놓인 판의 고유진동수는 문헌 해와 매우 근사하였다.
- 2) 개구부의 크기가 커지고, 판의 두께가 두꺼워질수록 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.
- 3) 개구부가 중앙부에 있을 때보다 모서리에 위치할 때 고유진동수가 더 커짐을 알 수 있다.
- 4) SFP와 WFP가 증가함에 따라 유공판의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.

참고 문헌

- (1) D. Young, "Vibration of rectangular plates by the riz method" J. appl. Mech.17, 448-453. 1950.
- (2) G. B. Warburton, "The vibration of retangular plates", proc.Institute of Mechanical Engineers, pp.371-384. 1953.
- (3) A. W. Leissa, "Vibration of plates". NASA SP-160 (1969)
- (4) D. J. Gorman. "Free Vibration Analysis of Rectangular Plates", Elsevier, New York 1982.

- (5) R.O.Grossi, B.V.Arenas, P.A.A.Laura, "Free vibration of rectangular plates with circular openings", Ocean Engng. Vol.24, No.1, pp.19-24, 1997.
- (6) M. Celik, A. Saygun, "A Method for the Analysis of Plates on a Two-Parameter Foundation", Journal of Computer and Structures, vol(36), pp 2891-2915, 1998.
- (7) A. V. Singh, U. K. Paul, "Finite displacement static analysis of thin plate with an opening-a variational approach", Journal of Solids and Structures, pp.4135-4151, March 2003.
- (8) 권택진, "유공후판의 탄성해석에 관한 연구", 대한 건축학회, 제 23권 제 90호. pp.23-29, 1979. 10.
- (9) 이용수 외, "탄성지지 유공 보강판의 좌굴해석", 대한건축학회. 제 10권 제 73호. pp.307-314, 1994. 11.
- (10) 이용수 외, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표 논문집, 제12권 통권 제23호, pp 35-42, 1999.
- (11) 이병구 외, "탄성지반위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동". 전산구조공학. 제 11권 제 2호. 1998. 6.
- (12) Hirayoki Matsunaga, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations", Journal of Engineering Mechanics, pp.27-34, January 2000.