

정면내응력을 받는 유공 후판의 진동해석

Vibration Analysis of Opening Thick Plate Subjected to Static Inplane Stress

김일중* · 이용수† · 오숙경** · 박형복***

Kim, Il Jung, Lee, Yong Soo and Oh, Soog Kyoung and Park, Hyoung Bok

Key Words : Finite Element Method, Natural frequency, Thick Plate, Pasternak Foundation

Abstract

This paper has the object of investigating natural frequencies of opening thick plates on Pasternak foundation by means of finite element method and providing Kinematic design data for mat of building structures. Vibration analysis that opening plate subjected to In-plane stress is presented in this paper. Finite element analysis of rectangular opening plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. In order to analysis plate which is supported on Pasternak foundation, the Winkler foundation parameter is varied with 0,10,102,103 and the shear foundation parameter is 0, 5, 10, 15. The ratio of In-plane force to critical load is applied as 0.2, 0.8, respectively. This paper analyzed varying opening position and opening size.

기호설명

$2\bar{a} \times 2\bar{b}$: 전체판의 크기
 D : 판의 휨강성
 E : 탄성계수
 G : 전단탄성계수
 K_c : 판 요소의 휨 전단강성
 K_f : 판요소의 전단지반 강성
 k_w : Winkler 지반강성
 k_g : 전단지반강성
 M_c : 판의 요소질량
 P_x : 면내력
 SFP : 전단지반계수
 WFP : Winkler지반계수
 ρ : 단위 체적당 질량
 ν : 포아송비

w : 수직처짐
 θ_x : x 방향 회전각
 θ_y : y 방향 회전각
 ω : 판의 고유진동수
 σ : 면내응력
 σ_{cr} : 판의 좌굴응력

1. 서론

최근 지진이나 건설현장의 발파, 항타, 굴착 등에 의해 발생하는 지반진동은 인접 건축물의 기초를 통해 건물에 동적 영향을 끼친다. 지반을 통해 전달되는 동적영향은 새로운 응력파의 발생으로 지반과 기초 또는 지하 벽체에 영향을 주고 그 영향은 다시 구조물의 동적응답에 영향을 미치게 된다. 이러한 현상을 지반-구조물 상호작용이라고 한다. 지반-구조물의 상호작용에 대한 해석은 진동 제어분야의 중요한 연구대상이 되고 있다.

1950년대 D. Young¹⁾, G. B. Warburton²⁾, A. W. Leissa³⁾에 의해 등방질 판의 자유 진동에 대한 연구가 이루어졌으며, 1984년 P. A. A. Laura⁴⁾ 등은 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 비균질 지반에 지지된 판의 동적 해석을 하였다. 1997년 K. N.saha⁵⁾ 등은 Galerkin법을 이용하여 비균질

† 책임저자, 정희원, 원광대학교 건축학부 정교수
전화: 063-850-6709; Fax: 063-843-0782
E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

* 정희원, 전북과학대학 건축·토목 계열 조교수

** 정희원, 원광대학교 대학원 건축공학과 박사과정

*** 정희원, 원광대학교 산업대학원 건축공학과 석사과정

지반에 지지된 판의 동적 문제를 다루었고, Mecit Celik⁶⁾는 반복법을 이용하여 Two-Parameter 지반에 의해 지지된 판을 해석하였다. 2000년 Hiroyki Matsunaga⁷⁾가 탄성지반에 지지된 후판의 진동과 안정 해석에 대해 발표하였다.

국내에서 1999년 이용수⁸⁾ 등은 탄성 스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동 해석을 행하였고, 백승목⁹⁾은 탄성스프링으로 지지된 정면내응력을 받는 보강판의 좌굴 및 진동 해석을 행하였다.

본 연구에서는 개구부가 있는 면내력을 받는 후판의 진동 해석을 하였으며, 이와 같은 유공판의 예는 집수정이 있는 지하실 바닥이나 덕트가 있는 슬래브등을 들 수 있다. 이와 같은 후판의 진동에 관한 해석을 통하여 개구부를 갖는 판 구조물의 동적 거동 특성을 파악함으로써 기초 구조물 설계의 기본자료를 얻는데 그 목적이 있다.

후판 해석시 Mindlin판 이론을 적용하고, 8절점 Serendipity 요소계를 이용한 유한요소해를 이용하여 면내력을 받는 후판의 진동 해석을 행하였다. 판을 지지하는 지반은 Winkler 지반 모형에 전단 지반층을 추가한 Pasternak 지반 모형을 사용하였다. 그리고 판 해석시 Shear Locking 현상과 Zero energy mode에 대한 개선을 위해 전단 강성 행렬을 감차적분하고 그 이외의 강성행렬은 정상 행렬을 사용하는 선택적 적분을 이용하여 강성행렬을 구하였다.

2. 후판의 유한요소해석

2.1 후판의 진동해석

판 요소의 운동 에너지 T_e 와 변형 에너지 U_e , 외력에 의한 일 W_e 를 구하여 각 요소를 조합하고 이들의 변분을 쫓아 놓아 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

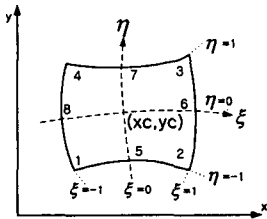


Fig. 1 8-nodes Serendipity Element System

판 요소의 크기를 $2\bar{a} \times 2\bar{b}$ 로 할때 Fig. 1과 같이 무차원 좌표계 $\xi = (x - x_c)/\bar{a}$, $\eta = (y - y_c)/\bar{b}$ 를 이용한 8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소 내의 임의의 위치에 대한 변위를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [M] \{ \delta_e \} \quad (1)$$

여기서,

w : 판 요소의 수직변위,

θ_x : 판 요소의 x 방향 회전각

θ_y : 판 요소의 y 방향 회전각

$$\{ \delta_e \} = [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, w_8, \theta_{x8}, \theta_{y8}]^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_k \end{bmatrix}$$

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} \{ (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi \xi)^2 (1 - \eta^2) \} \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

판 요소의 운동에너지 T_e 는 (1)식을 이용하여 행렬 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [M_e] \{ \delta_e \} \quad (2)$$

여기서,

$\{ \delta_e \}$: 시간에 따른 판 요소의 절점변위 변화율

$[M_e]$: 판 요소의 질량행렬

Winkler지반 강성과 전단지반 강성을 고려한 판 요소의 변형에너지 U_e 에 (1)식을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$U_e = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [K_e] \{ \delta_e \} + \frac{1}{2} \{ w_e \}^T [K_f] \{ w_e \} \quad (3)$$

여기서,

$[K_e]$: 판 요소의 휨·전단 강성행렬

$[K_f]$: 판 요소의 지반강성 행렬

외력에 의한 일은 1방향압축만을 고려하여 (1)식과 면내력 $P_x = \sigma h$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$W_p = \frac{1}{2} \{ w_e \}^T [K_g] \{ w_e \} \quad (4)$$

여기서, $[K_g]$: 판 요소의 기하강성 행렬

σ : 면내응력

h : 판의 두께

(2), (3), (4)식을 전체 판요소에 대해 조합하고 가상 일의 원리를 적용하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_E] - \sigma [K_C] - \omega^2 [K_M] = 0 \quad (5)$$

여기서,

$[K_E]$: 전체 판요소의 요소강성행렬

$[K_M]$: 전체 판요소의 질량행렬

$[K_C]$: 면내응력이 1인 경우 전체 판요소의 기하강성행렬

ω : 판의 고유 원 진동수

(5)식에서 면내응력 $\sigma=0$ 인 경우는 Pasternak지반 위에 놓인 후판의 자유진동문제를 다루는 식이 되며, $\omega=0$ 로 놓으면 Pasternak지반 위에 놓인 후판의 정적 안정문제를 다루는 식이 된다.

(5)식에서 좌굴응력보다 작은 면내응력을 가지값으로 하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[[K_E] - \sigma [K_C]] - \omega^2 [K_M] = 0 \quad (6)$$

(6)식에서 좌굴응력 이하의 면내응력을 받는 후판의 고유진동수 ω 를 구할 수 있다.

2.2 유한요소해석 프로그램

본 유한요소법에 의해 개발된 프로그램의 흐름도는 Fig. 2와 같다. 프로그램의 언어는 FORTRAN POWER STATION ver.4.0을 사용하였다.

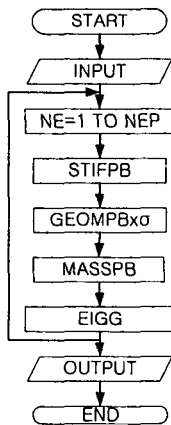


Fig. 2 Flow chart of finite element method program

3. 비교 분석 및 적용

3.1 비교분석

8절점 Serendipity 요소계를 이용하여 유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 정확성을 검토하였다.

균질지반에 대해 면내력이 없는 경우 고유 진동수와 지반에 지지되지 않고 면내력이 있는 경우 고유 진동수비를 구하여 기존 문헌해와 비교하였다.

비교분석을 위한 판의 제 계수들은 다음과 같다.

탄성계수(E) : 2.1×10^6 kgf/cm²

판의 크기 : 100cm × 100cm

판의 두께(h) : 20cm

포와송비(ν) : 0.3

판 지지상태 : 4변 단순지지

판의 단위 체적당 질량(ρ) : 7.981413×10^{-6} kgf/cm³

면내응력 : $0.2\sigma_{cr}, 0.4\sigma_{cr}, 0.6\sigma_{cr}, 0.8\sigma_{cr}$

Winkler지반변수 (WFP = $k_w a^4/D$)

: 0, 10, 102, 103, 104

전단 지반 변수 (SFP = $k_g a^2/D$) : 0, 10

a : 판의 길이

Table 1은 Winkler지반 변수(WFP)와 전단지반 변수(SFP)의 변화에 따라 본 해석해를 문헌해⁶⁾와 비교한 것이다. Table 1에 의하면 최대 0.215%의 오차를 나타내어 본 해석을 위한 프로그램의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

Table 1 comparison of natural frequency according to variation of foundation parameters ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$)

SFP	WFP	Reference ³⁾	This solution	Error
0	0	17.4486	17.4345	0.081
	10	17.7208	17.7071	0.077
	10 ²	20.0042	19.9952	0.045
	10 ³	35.5028	35.5161	0.037
	10 ⁴	98.5331	98.7452	0.215
10	0	22.2117	22.1956	0.072
	10	22.4261	22.4104	0.070
	10 ²	24.2698	24.2580	0.049
	10 ³	38.0638	38.0741	0.027
	10 ⁴	99.4473	99.6619	0.216

Table 2 natural frequency ratios of plate subjected to in-plane stress

	This solution ($\bar{\omega}/\omega_e$)	Reference ¹⁰⁾	Error
0	1	1	-
$0.2 \sigma_{cr}$	0.8945	0.8944	0.001
$0.4 \sigma_{cr}$	0.7747	0.7746	0.013
$0.6 \sigma_{cr}$	0.6324	0.6325	0.016
$0.8 \sigma_{cr}$	0.4466	0.4472	0.134

$\bar{\omega}$: Frequency of Inplane stress
 ω_e : Natural frequency of plate

Table 2는 면내응력을 받는 판의 무차원 고유 진동수비 ($\bar{\omega}/\omega_e$)에 대해 문헌¹⁰⁾과 비교한 것이다. 면내응력이 0일 경우 즉 면내응력이 없는 경우 본 해석 해와 문헌¹⁰⁾ 해가 일치함을 알 수 있고 면내응력이 좌굴 응력에 가까워 질 수록 문헌¹⁰⁾ 해와의 오차가 커져 최대 오차 0.134%를 보이고 있다.

3.2 면내력을 받는 유공판의 자유진동

앞에서 지반에 대해 면내력이 없는 경우 고유 진동수와 지반에 지지되지 않고 면내력이 있는 경우 고유 진동수비를 구하여 기존 문헌^{6), 10)}의 해를 비교하였다. 그 결과, 본 연구의 결과가 매우 높은 정도를 보임을 알 수 있었다. 따라서 본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 Pasternak 지반으로 지지된 면내력을 받는 유공판의 자유진동해석을 시행하였다.

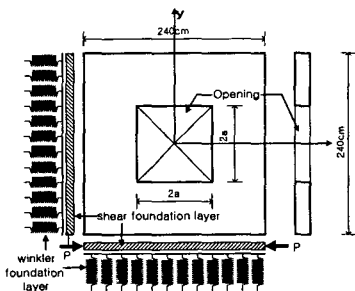


Fig. 3 Opening Plate Modelling on Pasternak Foundation

면내력을 받는 유공판의 자유진동해석을 위한 Pasternak 지반 위에 놓인 유공판의 모형은 Fig. 3과 같다. 해석에 사용한 지반 및 보강판의 기계적, 기하적 제원은 다음과 같으며, 이 연구에서 보강판의 지지조건은 4변 단순지지에 국한하였다.

탄성계수 (E): $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
 포와송 비 (ν): 0.167
 지지조건: 4변 단순지지
 판의 질량 밀도 (ρ): $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$
 판의 크기: 240cm×240cm
 판 두께: 12cm, 15cm, 18cm
 Winkler 지반 변수 (WFP): 0, 10, 100, 1000
 전단 지반 변수 (SFP): 0, 5, 10, 15
 면내응력의 크기: $0.4 \sigma_{cr}$, $0.8 \sigma_{cr}$
 개구부 크기: 60cm×60cm, 120cm×120cm, 180cm×180cm

면내력을 받는 유공판의 진동해석을 하기 위해 다음 Fig. 4와 같이 개구부의 위치와 크기를 변화시켰으며, 면내응력의 크기는 좌굴응력의 0.4, 0.8배로 하였다.

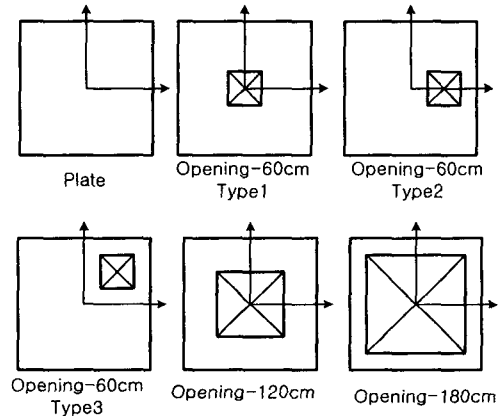


Fig. 4 Opening size and position of the plates

유공판에 면내력이 작용할 경우 진동해석을 한 결과는 Fig. 5- Fig. 8과 같다.

Fig. 5는 개구부 크기가 60cm×60cm로 중앙에 위치하고 판의 두께가 12cm로 일정할 경우 WFP, SFP와 면내응력을 변화시켰을 때의 유공판의 고유진동수변화를 나타내었다. 면내응력이 $0.8 \sigma_{cr}$ 에 비해 $0.4 \sigma_{cr}$ 일 경우 고유진동수가 더 크게 나타났고, SFP와 WFP가 증가할수록 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다. Fig 6은 개구부 크기가 60cm×60cm로 중앙에 위치할 경우 판의 두께, WFP 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 판의 두께가 두꺼워질수록 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다. Fig. 7은 WFP=100으로 일정하고 개구부 크기가 60cm×60cm일 경우 개구부의 위치 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 개구부가 중앙에 위치할 경우(Type1)와 가장자리(Type2)에 위치할 경우에 비해 모서리로 위치할 경우(Type3) 진동수가 커짐을 볼 수 있다.

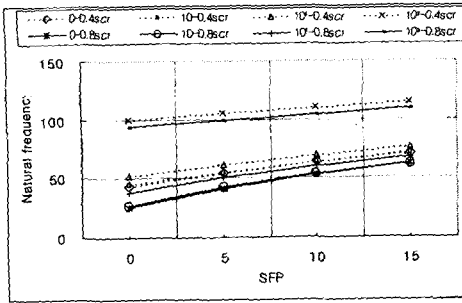


Fig. 5 Variations natural frequency versus variations of Inplane stress and foundation parameters

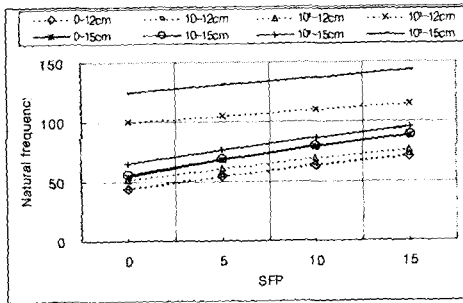


Fig. 6 Variations natural frequency versus variations thickness of plate

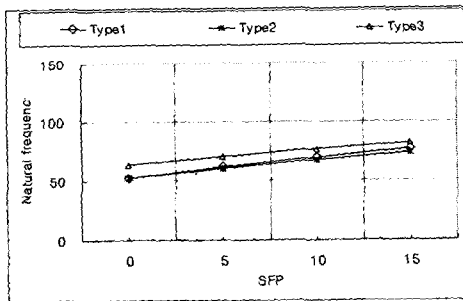


Fig. 7 Variations natural frequency of opening plate versus variations of opening position

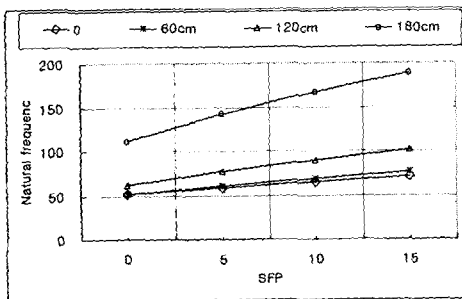


Fig. 8 variations natural frequency of plate versus variations of opening size

Fig 8은 WFP=100으로 일정하고 개구부가 중앙부에 위치할 경우 개구부 크기 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 개구부가 커질수록 유공판의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.

4. 결론

이 연구는 면내력을 받는 Pasternak 지반 위에 놓인 유공판의 진동해석 관한 것이다. 유공판의 지반은 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모형화하였다. 판해석은 Mindlin 판 이론을 적용하였다. 이 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서 산출한 면내력이 없고 지반에 지지된 판의 고유진동수와 지반에 지지되지 않고 면내력이 있는 경우 고유진동수비는 문헌 해와 매우 근사하였다.
- 2) 판에 작용하는 면내응력이 감소 할수록 고유진동수가 증가함을 보였고, SFP와 WFP가 증가할수록 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.
- 3) 개구부의 크기와 판의 두께가 두꺼워질수록 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.
- 4) 개구부가 중앙에 위치할 경우에 비해 모서리로 위치할 경우진동수가 커짐을 볼 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) D. Young, "Vibration of rectangular plates by the Rayleigh-Ritz method" J. appl. Mech.17, pp.448-453, 1950
- (2) G. B. Warburton, "The vibration of rectangular plates", Proc. Institute of Mechanical Engineers, pp.371-384, 1953
- (3) A.W.Leissa, "Vibration of plates". NASA SP-160, 1969
- (4) P. A. A Laura, R. H. Gutierrez, "Vibration of Plates Elastically Supported on a Non-Homogeneous Foundation", Journal of Sound Vibration, Vol.95, No.4, pp.531-536, 1984
- (5) K. N.saha, R. C. Kar, P. K Datta, "Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation", JCS, Vol.63, pp.1213-1222, 1997
- (6) M. Celik, A. Saygun, "A method for the analysis of plates on a two-parameter foundation", computer and structure, vol.36, 1999, pp.2891-2915
- (7) H. Matsunaga, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations", Journal of Engineering Mechanics, January 2000, pp.27-34
- (8) 이용수 외, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표 논문집, 제 12권 2집 통권 제 23호, pp 35-42, 1999.54.
- (9) 백승목, "탄성스프링으로 지지된 정면내응력을 받는 보강판의 좌굴 및 진동해석", 석사학위논문, 원광대, 1999
- (10) R. F. S. Hearmon, "The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or supported edges", J. appl. Mech. Trans. ASME, 1959, pp.537-540.