

## 위상 최적화를 이용한 능동 감쇠층의 설계

### Design of an Active Damping Layer Using Topology Optimization

김태우\* · 김지환\*\*

Tae-Woo Kim and Ji-Hwan Kim

**Key Words** : Active Damping Layer, Topology Optimization, Linear Quadratic Regulator, Lyapunov Equation, State Error Energy, Control Energy

#### ABSTRACT

The optimal thickness distribution of an active damping layer is sought so that it satisfies a certain constraint on the dynamic performance of a system minimizing control efforts. To obtain a topologically optimized configuration, which includes size and shape optimization, thickness of the active damping layer is interpolated using linear functions. With the control energy as the objective function to be minimized, the state error energy is introduced as the dynamic performance criterion for the system and used for a constraint. The optimal control gains are evaluated from LQR simultaneously as the optimization of the layer position proceeds. From numerical simulation, the topologically optimized distribution of the active damping layer shows the same dynamic performance and cost as the fully covered counterpart, which is optimized only in terms of control gains, with less amount of the layer.

#### 1. 서 론

구조물의 경량화를 위한 유연 구조물의 사용으로 말미암는 진동 문제는 구조물의 안정성과 임무 수행, 또한 날로 높아 가고 있는 사용자의 쾌적함에 대한 요구 등을 위해 해결해야 할 중요한 문제이다. 구조물의 표면에 감쇠층을 부착하여 진동을 억제하려는 시도는 점탄성 재료 등을 이용한 수동적 감쇠 방법에서, 근래에 압전 재료 등을 이용한 능동적 감쇠 방법에 이르기까지 다양하게 이루어지고 있다. 감쇠층의 부착은 구조물의 질량 증가를 야기하고, 제어하려는 진동모드에 따라 최적의 부착위치가 변화하기 때문에 감쇠층의 효율적인 사용을 위해서는 최적화과정이 필요하게 된다.

수동 감쇠층은, 점탄성층(Viscoelastic Layer)만을 사용하는 구속되지 않은 감쇠층(Unconstrained Damping Layer)과 감쇠효과를 증가시키기 위해 점탄성층위에 구속층(Constraining Layer)을 얹은 구속된 감쇠층(Constrained Damping Layer)의 형태로 많이 사용되고 있다 [1]. 이의 최적 설계를 위해 감쇠층의 길이와 두께, 물성치, 구속층이 있는 경우 구속층 재료의 물성치와 두께 등의 최적화가 수

행되었으며, 감쇠층이 여러 조각(Patch)의 형태로 주어질 때의 최적의 위치도 연구된 바가 있다 [2,3]. 압전재료를 이용하는 능동 감쇠층의 경우에도 원하는 동적특성을 만족시키며 제어에너지를 최소화하는 설계변수들의 최적화에 대한 연구가 이루어진 바 있다 [4]. 최근에는 점탄성층위에 없는 구속층을 기존의 금속재료에서 압전재료로 교체하여 수동 감쇠와 능동 감쇠의 장점을 동시에 얻고자 하는 능동적으로 구속된 감쇠층(Actively Constrained Damping Layer)의 해석 및 설계에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다 [5].

위상최적화는 기존의 구조물 최적설계시 크기 또는 형상 최적화를 모두 포함할 뿐 아니라 구조물의 연결상태까지 나타낼 수 있는 최적화 방법으로서 근래에 각광을 받고 있다 [6]. 이전의 감쇠층 설계에서는 주어진 형상에서의 각 변수들의 크기들이 설계변수가 되어왔는데, 위상최적화를 이용하면 원하는 동적 특성을 얻기 위해 필요한 감쇠층의 위치, 두께 등을 모두 살필 수 있는 감쇠층의 분포 상태를 구할 수 있게 된다. 이전 논문에서는 위상최적화를 유연보를 위한 수동감쇠층의 설계문제에 적용하여 적절한 설계변수와 목적함수 그리고 구속조건에 대해 다룬 바 있다 [7]. 본 논문에서는 이전 논문의 확장된 응용으로서 위상최적화를 이용한 능동 감쇠층의 최적설계에 대해서 다룬다. 이는 여러 연구자들에 의해서 연구되어 오고 있는 구조/제어 동시 최적설계 개

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원  
E-mail : twkim@snu.ac.kr  
Tel : (02)880-1906, Fax : (02)887-2662

\*\* 서울대학교 기계항공공학부

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원  
E-mail : twkim@snu.ac.kr  
Tel : (02)880-1906, Fax : (02)887-2662

념에 속한 것으로서 최소의 에너지로 최대의 제어 효과를 내기 위한 작동기의 개수 및 위치 선정 문제를 다루고 있다 [8]. 주로 이산화된 작동기를 다루고 있는 바, 본 논문에서는 분포된 작동기의 최적의 위치를 다룬다.

## 2. 최적화과정

### 2.1 문제 정의

선형동적시스템은 다음과 같은 1차미분방정식의 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_{imp} u_{imp} \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $B$ ,  $u$ 는 제어입력의 위치와 크기에 대한 정보를 가지고 있고,  $B_{imp}$ ,  $u_{imp}$ 는 외력의 위치와 크기에 대한 정보를 나타낸다. 이러한 시스템의 동적특성을 기술하기 위해 다음과 같은 상태오차에너지를 다음과 같이 정의한다.

$$J_y = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} y_i^T Q y_i dt \quad (2)$$

여기서  $y_i$ 는 초기조건이 모두 0인 경우  $m$ 개의 입력지점 중  $i$ 번째 입력점에 단위충격이 가해지는 경우의 해를 나타내고  $Q$ 는 가중행렬이다. 따라서, 원하는 시스템의 성능은 (1)식으로 주어진 상태오차 에너지에 구속조건을 가함으로써 조정된다. 이러한 성능을 만족시키는데 있어서 최소의 비용을 사용하도록 다음과 같이 제어에너지를 정의하여 목적함수로 사용하게 된다.

$$J_u = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} u_i^T R u_i dt \quad (3)$$

여기서  $u_i$ 는  $i$ 번째 입력점에 단위충격이 가해지는 경우에 사용되는 제어입력을 나타내고  $R$ 은 가중행렬이다. 시스템의 안정성을 보장하기 위하여 제어입력을 선형이차조절기(Linear Quadratic Regulator, LQR)를 사용하여 구하게 되면 제어입력은 다음과 같이 구해진다.

$$u_i = -Gx_i \quad (4)$$

여기서  $u_i$ 는 다음과 같은 성능지수를 최소화하는 값이다.

$$J_i = \int_0^{\infty} (y_i Q y_i + u_i R u_i) dt \quad (5)$$

이득행렬  $G$ 는 다음의 대수 리카티 방정식(Algebraic Riccati Equation, ARE)의 해  $P$ 로부터 구해진다.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6)$$

$$G = R^{-1}B^T P \quad (7)$$

이 때 식(2)과 (3)는 다음과 같이 닫힌 형태로 표현될 수 있다 [9].

$$J_y = \text{trace}(QCXC^T) \quad (8)$$

$$J_u = \text{trace}(RGXG^T) \quad (9)$$

여기서  $X$ 는 다음과 같은 리아프노프(Lyapunov) 방정식의 해를 나타낸다.

$$X(A - BG)^T + (A - BG)X + B_{imp} B_{imp}^T X = 0 \quad (10)$$

### 2.2 민감도 해석

구배정보를 사용하는 최적화기법을 적용하기 위해서는 구속조건인 식(6)과 목적함수인 식(7)의 민감도 해석이 필요하다. 상태오차에너지와 제어에너지의 민감도는 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta J_y = \text{trace}(QC\Delta X C^T) \quad (11)$$

$$\Delta J_u = \text{trace}(R\Delta G X G^T + RG\Delta X G^T + RGX\Delta G^T) \quad (12)$$

여기서  $\Delta G$ 는 식(6)과 식(7)로부터, 그리고  $\Delta X$ 은 식(10)으로부터 얻게 된다. 식(6)으로부터

$$\begin{aligned} \Delta P(A - BR^{-1}B^T P) + (A^T - PBR^{-1}B^T)\Delta P \\ + \Delta A^T P + P\Delta A - P\Delta BR^{-1}B^T P \\ - P\Delta A(R^{-1})B^T P - PBR^{-1}\Delta B^T P = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

이므로  $\Delta P$ 에 대한 리아프노프 방정식을 얻고, 따라서 식(7)에서

$$\Delta G = \Delta(R^{-1})B^T P + R^{-1}\Delta B^T P + R^{-1}B^T \Delta P \quad (14)$$

을 얻는다. 마찬가지로 식(10)으로부터  $\Delta X$ 는

$$\begin{aligned} \Delta X(A - BG)^T + (A - BG)\Delta X \\ + X(\Delta A - \Delta BG - B\Delta G)^T + (\Delta A - \Delta BG - B\Delta G)X = 0 \end{aligned}$$

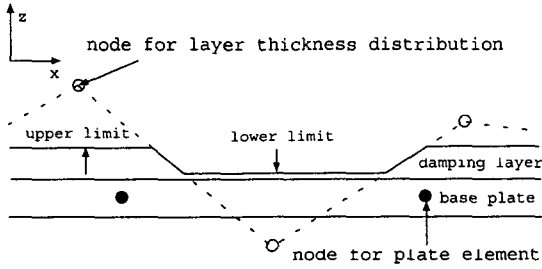


그림 1 Thickness interpolation for active damping layer distribution

(15)

같은 리야프노프 방정식의 해가 된다. 그 외의  $\Delta A, \Delta B$  등은 설계변수에 대해 해석적으로 구할 수 있다.

### 3. 유연평판의 진동제어

#### 3.1 설계변수

앞 절에서 설명한 최적화 과정을 한면이 고정지지된 외팔 유연평판의 진동감쇠를 위한 능동감쇠층의 설계에 적용해 보았다. 그림 1은 감쇠층의 분포를 나타내기 위한 절점과 보간함수를 나타내고 있다. 절점에서의 감쇠층의 두께를 설계 변수로 사용하여 감쇠층의 두께분포를 나타내도록 한다 [10]. 이와 같이 유한요소의 절점과 두께변화의 보간을 위한 절점을 다르게 설정하면 유한요소 망의 크기를 변경하지 않고 설계변수의 개수를 변경하면서 수렴성을 조사할 수 있는 장점이 있다. 단, 두께변화가 있는 요소에서는 충분한 차수의 적분이 필요하다. 감쇠층의 두께에는 제한이 있으므로 두께의 상한이 필요하고 ARE를 풀기 위한 수치적 안정성을 위해서 하한을 설정하였다. 그리고 두께의 급격한 변화를 표현할 수 있도록 절점에서의 값은 음수를 가질 수 있도록 한다. 두 번째 설계변수로는 LQR 설계시 사용되는 성능지수의 가중치를 사용한다. 가중치는 상태오차에너지와 제어에너지의 비를 조정함으로써, 상태오차에너지가 시스템이 원하는 성능을 가지도록 하는 기능을 한다. 단, 가중치가 너무

표 1 수치해석에 사용된 구조물의 기하 및 물성치

판(Aluminum Alloy)

길이 0.5m 폭 0.35m 두께 0.005m

밀도  $2740\text{kg/m}^3$  영률  $69\text{Gpa}$  포아송비 0.33

감쇠층(PZT)

두께 0.00005m,  $d_{31} = d_{32} = 6\text{E}-11\text{C/N}$ ,  $d_{33} = 0$

밀도  $7600\text{kg/m}^3$  영률  $86\text{Gpa}$  포아송비 0.29

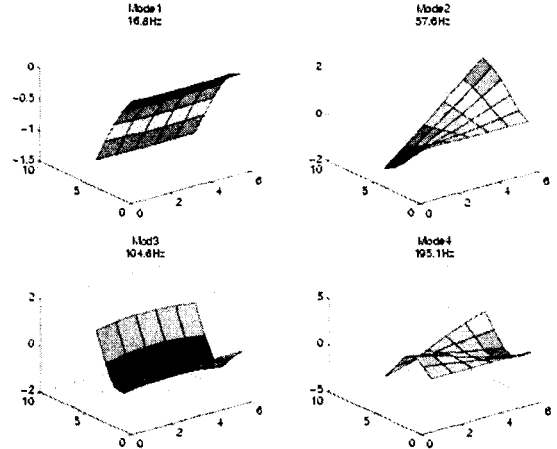


그림 2 Four lowest modes of cantilevered plate

크면 제어효과가 거의 없으므로 구배가 거의 0에 가깝고 따라서 수렴하기 어렵다. 또 너무 작으면 제어에너지가 너무 커져서 제어가 포함된 시스템의 동역학 자체가 의미가 없게 되므로 가중치의 변화범위를 주의깊게 살펴서 초기조건을 적절하게 주어야 한다. 최적화 알고리즘으로는 순차 이차 계획법(Sequential Quadratic Programming, SQR)을 사용하는 상용소프트웨어 MATLAB의 명령어 `fmincon`을 사용하였다.

#### 3.2 수치해석

원하는 동적 성능은 감쇠처리가 되지 않은 경우와의 비로 나타내어진다. 즉, 다음과 같은 구속조건을 부가한다.

$$J_y^{red}/J_y < \gamma \quad (16)$$

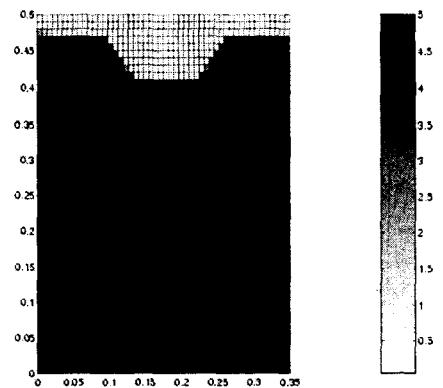


그림 3 Thickness distribution of active damping layer with 1st mode under consideration

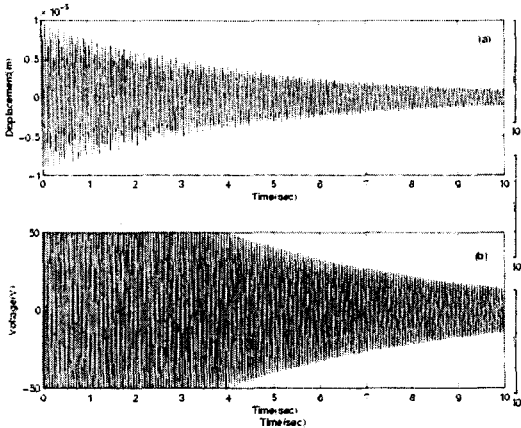


그림 7 Displacement and control input for the case with 1st through 4th modes under consideration (a) Without damping treatment (b) Fully covered with optimized control gains only (c) Optimally covered with optimized control gains

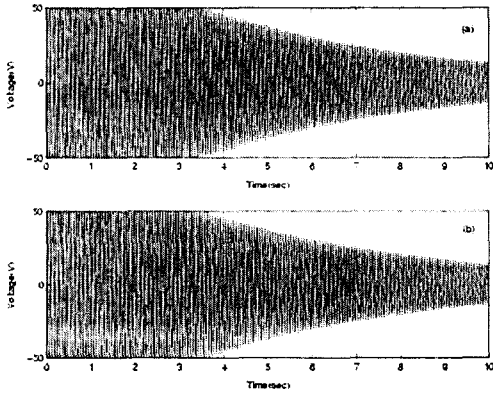


그림 5 Control input: (a) Fully covered with optimized control gains only (b) Optimally distributed with optimized control gains

여기서  $\gamma$ 는 0과 1사이의 값을 가지고,  $J_y^{ref}$ 는 감쇠처리되지 않은 판의 상태오차에너지이다. 이를 위해서 0.1%의 구조감쇠를 가정하였다. 횡방향 변위장은 Hermite 요소를 이용하여 보간하였고, 판의 한 면에만 감쇠층 처리가 되는 것을 가정하였기 때문에 판의 증립축에 대한 비대칭성으로 말미암는 면내방향 변위도 포함되었다. 수치해석에 사용된 물성치 및 구조물의 기하는 표1에 나와있다.

5×5의 유한요소망을 사용하였고, 감차모델을 사용하여 LQR을 이용한 제어기 설계시 네 개의 저차모드까지만을 고려하였다. 가중행렬  $Q$ 는 변위장에 대해서만 같은 값으로 가중하였고 속도장은 무시하였다. 그리고 능동 감쇠층에 작용하는 전압을 단일입력으로 고려하였다. 그림 2에는 감쇠처리되지 않은 판의 첫 번째부터 네 번째까지의 모드형상이 나타나있다.

먼저, 최저차 모드만을 고려하여 제어기를 설계할 경우의 결과가 그림 3부터 그림 5까지 나타나있다. 는 0.5로 설정하였고 설계변수는 감쇠층의 두께 보간을 위한 81(9×9)개의 절점 두께값과 LQR설계시 사용되는 하나의 가중치  $\gamma$ 이다. 그림 3은 감쇠층의 두께 분포를 나타내고 있다. 이 경우 판의 끝단 부분에는 감쇠층이 필요치 않음을 보여주고 있다. 또한 두께 변화는 연속적이기 보다 이산적으로 분포한 것을 볼 수 있는데, 이는 감쇠설계에서 감쇠력의 위치가 중요함을 보여준다. 그림 4와 그림 5는 MATLAB Simulink를 이용한 임펄스에 대한 응답을 보여주고 있다. 감쇠처리 되지 않은 경우와 전면처리 된 경우의 응답과 비교되어 있다. 충격지점은 끝단 모서리이고 같은 지점에서의 응답을 보여주고 있다. 전면처리된 경우는 두께는 일정한 상태에서 구속조건을 만족시키는 최적의 가중치에 대한 값을 나타낸다. 그림 4는 변위를 보여주고 있는데 감쇠처리되지 않은 경우인 (a)와 비교해볼 때  $\gamma=0.5$ 의 감쇠정도를 알 수 있으며, 전면처리된 (b)와 위상최적화된 (c)로부터 위상최적화된 경우 더 적은 양의 감쇠층으로 같은 감쇠정도를 얻고 있음을 알 수 있다. 그림 5는 각각의 경우 제어입력을 보여주고 있는데, 실제 제어입력에는 한계가 있으므로  $\pm 50V$ 의 제한 입력을 설정하였다. 두 경우가 분포상태는 다르지만 원하는 동적성능을 얻기 위해서 필요한 제어입력의 크기에는 변화가 없는 것을 알 수 있다.

다음으로 4개의 저차모드를 고려하여 위상최적화를 수행하였다. 이전 예제와 같은 조건에서 수치실험을 행하였다. 그림 6은 두께분포를 나타낸다. 이전 예제와 비교해서 더 많은 부분에 감쇠층이 위치한 것을 볼 수 있다. 마찬가지로 충격시험을 해본 결과가 그림 7에 나타나있다. 제어입력의 포화를 고려하지 않을 경우에 식(9)에 나와있는 제어에너지가 첫 번째 모드만 고려한 경우에 비해 15%정도 증가한 것을 볼 수 있었는데, 첫 번째 모드에 대한 해석과 비슷한 결과를 보여주고 있으므로 그리 큰 영향을 미치지 못하는 것을

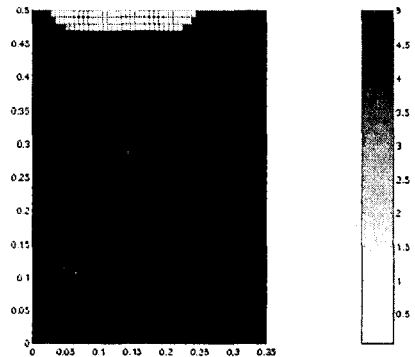


그림 6 Thickness distribution of active damping layer with 1st through 4th modes under consideration

볼 수 있다. 이는 대상시스템에 대한 첫 번째 모드에 관련한 설계가 지배적임을 나타낸다. 이번 경우에도 제어입력은 전 면처리된 경우와 다르지 않음을 볼 수 있었다.

#### 4. 결론

기존의 구조설계에 사용되는 위상최적화과정을 구조/제어 동시 설계문제에 적용하기 위하여, 적절한 목적함수와 구속조건을 제시하였고, 유연평판의 진동감쇠를 위한 능동감쇠층의 부착문제에 적용하였다. 일반적인 동적시스템의 성능을 나타낼 수 있는 상태오차에너지를 구속조건으로, 그리고 원하는 성능을 나타내기 위한 최소의 비용을 위해 제어에너지를 목적함수로 도입하였다. 설계변수로는, 감쇠층의 존재여부는 두께로 표현될 수 있으므로, 기존의 각 유한요소에서의 밀도함수 대신 두께분포를 보간하여 각 절점에서의 두께값을 사용하였다. 따라서 유한요소를 늘리지 않고도 설계변수만 증가시키며 수렴성을 조사할 수 있게 되어 계산상의 이점이 있었다. 몇몇 예제를 통해서 같은 성능을 나타내면서 감쇠층으로 인한 질량의 증가를 최소화할 수 있도록 배치가 되는 것을 볼 수 있었다. 본 논문에서 제시된 방법으로 목적함수만 적절히 재정의해주면 수동감쇠의 경우에도 제시된 위상최적화과정을 이용해서 구조물의 동적성능을 향상시킬 수 있을 것으로 생각된다. 또 본 논문에서는 단일 입력에 대한 경우만 다뤘지만, 다중입력이 있는 경우의 위상최적화문제로의 확장이 필요할 것으로 생각된다.

#### 참 고 문 헌

(1) Nashif, A. D., Jones, I. G., and Henderson, J. P., 1985, *Vibration Damping*, John Wiley & Sons, Inc.

(2) Lumsdaine, A. and Scott, R. A., 1998, "Shape Optimization of Unconstrained Viscoelastic Layers Using Continuum Finite Elements", *Journal of Sound and Vibration*, 216(1), pp. 29-52.

(3) Kung S. -W. and Singh R., 1997, "Vibration Analysis of Beams with Multiple Constrained Damping Layer Patches", *Journal of Sound and Vibration*, 212(5), pp. 781-805.

(4) Kim J., Ryou J. -K. and Kim S. J., 2002, "Optimal Gain Distribution for Two-Dimensional Modal Transducer and Its Implementation Using Multi-Layered PVDF Films", *Journal of Sound and Vibration*, 251(3), pp. 395-408.

(5) Baz A., 1997, "Optimization of Energy Dissipation Characteristics of Active Constrained Layer Damping", *Smart Materials and Structures*, Vol. 6, pp. 360-368.

(6) Bendsøe M. P., 1995, *Optimization of topology, shape and material*, Springer-Verlag.

(7) Kim T. -W. and Kim J. -H., 2003, "Eigensensitivity Based Optimal Distribution of a Viscoelastic Damping Layer for a Flexible Beam", *Journal of Sound and Vibration*, In Press.

(8) Gawronski W., 1997, "Actuator and Sensor Placement for Structural Testing and Control", *Journal of Sound and Vibration*, 208(1), pp. 101-109.

(9) Junkins J. L. and Kim Y., 1992, *Introduction to Dynamic and Control of Flexible Structures*, AIAA Inc.

(10) Wodtke, H. -W., and Lamancusa, J. S., 1998, "Sound Power Minimization of Circular Plates through Damping Layer Placement", *Journal of Sound and Vibration*, 215(5), pp. 1145-1163.