

내부 유체 유동을 포함하는 원통 셸의 유한요소 진동해석

Finite Element Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Internal Fluid Flow

서영수*·정의봉**

Young Soo Seo and Weui Bong Jeong

Key Words : Cylindrical Shells(원통 셸), Fluid Flow(유체 유동), Finite Element Analysis(유한요소해석)

ABSTRACT

A method for the dynamic analysis of thin-walled cylindrical shell conveying steady fluid flow presents. The dynamics of thin-walled shell is based on Sanders' theory and the fluid flow in cylindrical shell is treated inviscid, incompressible fluid. A dynamic coupling conditions at fluid-structure interface is used. The equations of motion are solved by a finite element method and validated by comparing the natural frequency with other published results and Nastran. The influence of fluid velocity on the frequency response function is illustrated and discussed.

1. 서론

유체 유동을 포함하는 원통 셸에 대한 연구는 셸의 길이에 대한 단면적의 비 그리고 두께에 따라서 다양한 셸 이론과 보 이론을 바탕으로 연구되어져 왔다. Jain[1]은 Love[2]의 셸 이론을 바탕으로 내부 유체 유동을 비압축성으로 가정하고 셸의 고유 진동수의 변화를 연구하였다. 그러나 Chen et al.[3]은 Love의 셸 이론을 바탕으로한 Sanders[4]의 셸 이론과 압축성 유체를 고려하여 셸의 거동을 연구하였다. 또한 Zhang[5]은 직교성의 성질을 가진 얇은 셸에 대해 유체 유동에 따른 고유 진동수를 연구하였다. Blevin[6]는 보 이론을 이용하여 내부에 유체 유동을 포함하는 길이에 비해 직경이 작은 셸에 대해서 해석을 하였다.

본 연구에서는 Sanders[4]의 셸 이론과 비압축성 유체를 고려하여 유체 유동에 따른 고유진동수의 변화, 위험속도, 그리고 주파수 응답 함수를 예측하였다. 또한 셸 이론으로 구한 고유진동수와 보 이론으로 구한 고유진동수를 비교하였다.

2. 문제의 정식화

2.1 운동 방정식

유체를 포함하는 원통 셸의 해석 모델을 Fig.1에 나타내었다. 축 대칭 모델이므로 해석의 편리성을 위하여 원통형 좌표계를 사용하였다. 셸과

셸 내부의 유체의 자중은 무시하였다.

셸의 운동 방정식을 유도하기 위하여 Sanders[4]의 얇은 셸 이론을 사용한다. 즉, 셸의 두께(h)는 반지름(R)에 비해서 아주 작고 변형 후에도 단면을 그대로 유지한다.

변형률과 변위의 관계는 다음 식과 같다.[4]

$$\epsilon = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{\theta\theta}, 2\epsilon_{x\theta}, \kappa_{xx}, \kappa_{\theta\theta}, 2\kappa_{x\theta}\}^T$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ - \frac{\partial^2 u_r}{\partial^2 \theta} \\ - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial^2 \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{2R} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad (1)$$

여기서,

u_x : 축 방향 변위

u_θ : 원주 방향 변위

u_r : 반경 방향 변위

이다.

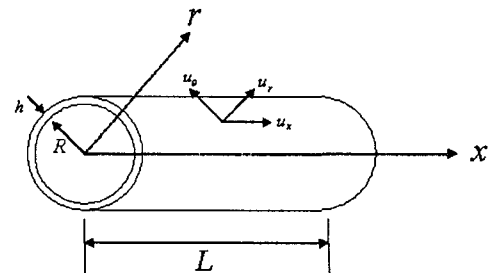


Fig. 1 Analysis Model

* 부산대학교 기계설계공학과 대학원

** 정회원, 부산대학교 기계공학부

E-mail : wbjeong@pusan.ac.kr

Tel : (051) 510-2337, Fax : (051) 517-3805

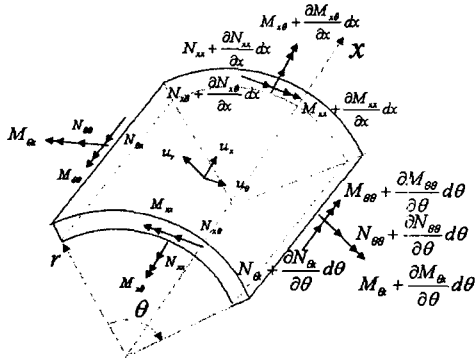


Fig. 2 Unit Forces and Moments acting upon the thin-shell element

셀의 단면에 작용하는 힘과 응력을 Fig.2 에 나타내었다. 단면에 작용하는 응력과 변형률의 관계는 다음 식과 같이 나타내어진다.

$$\sigma = \{N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}, M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}\}^T = D\varepsilon \quad (2)$$

여기서,

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}, D_{33} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, D_{12} = D_{21} = \frac{\nu Eh}{1-\nu^2}$$

$$D_{44} = D_{55} = \frac{E\tilde{h}}{12(1-\nu^2)}, D_{66} = \frac{E\tilde{h}}{24(1+\nu)}, D_{45} = D_{54} = \frac{\nu E\tilde{h}}{12(1-\nu^2)}$$

이다.

원통 셀은 내부에 유체를 포함하고 있다. 유체는 비 압축성, 비 점성 유체로 가정을 한다. 원통 셀 내에서 유체는 비 회전 정상유동이므로 원통 좌표계로 라플라스 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

내부 유체의 압력과 속도는 일정한 성분과 변동하는 성분으로 나눌 수 있고 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$p = p_0 + p_d \quad (4)$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_\theta \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

원통 셀에 작용하는 압력은 셀과 유체가 접하는 부분에서 오일러 방정식으로 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, v^2 = (U + v_x)^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p \quad (8)$$

$\vec{v} = \nabla \Phi$ 를 대입하고 비 회전 유동이므로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \left(\rho_f \dot{\Phi} + \frac{1}{2} \rho_f v^2 + p \right) = 0 \quad (9)$$

$$\rho_f \dot{\Phi} + \frac{1}{2} \rho_f v^2 + p = 0 \quad (10)$$

식(10)에서 변동하는 압력만을 고려하고 선형화하면 다음 식과 같다.

$$p_d = -\rho_f \left(\dot{\Phi} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (11)$$

셀과 유체가 충분히 연성되기 위해서는 접하는 부분에서 반경 방향 속도가 서로 같아야 한다.

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + U \frac{\partial u_r}{\partial x} \Big|_{r=R} \quad (12)$$

2.2 유한 요소법

요소에 작용하는 운동에너지, 탄성에너지 그리고 가상일은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \rho_s h u^2 dA_s \quad (13)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \varepsilon^T D \varepsilon dA_s \quad (14)$$

$$\delta W = \int_{A_e} \delta u^T (p_s + q_s) dA_s \quad (15)$$

여기서,

p_s : 원통 셀의 표면에 작용하는 압력

q_s : 원통 셀에 가해지는 외력

이다.

원통 셀의 변위를 푸리에 코사인 전개를 하여 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{u} = \{u_x \cos n\theta, u_\theta \sin n\theta, u_r \cos n\theta\}^T = [N_s] \{\bar{u}\} \quad (16)$$

$$[N_s] = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & N_8 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$\{\bar{u}\} = \{\bar{u}_{x1}, \bar{u}_{\theta1}, \bar{u}_{r1}, \phi_1, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{\theta j}, \bar{u}_{rj}, \phi_j\}^T$$

이다.

변위와 변형률의 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & B_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & B_{24} & 0 & B_{26} & B_{27} & B_{28} \\ B_{31} & B_{32} & 0 & 0 & B_{35} & B_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{43} & B_{44} & 0 & 0 & B_{47} & B_{48} \\ 0 & B_{52} & B_{53} & B_{54} & 0 & B_{56} & B_{57} & B_{58} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} & B_{67} & B_{68} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{\partial N_1}{\partial x}, B_{15} = \frac{\partial N_2}{\partial x}, B_{22} = \frac{1}{R} \frac{\partial N_3}{\partial \theta}, \\ B_{23} &= \frac{N_3}{R}, B_{24} = \frac{N_6}{R}, B_{26} = \frac{1}{R} \frac{\partial N_4}{\partial \theta}, \\ B_{27} &= \frac{N_7}{R}, B_{28} = \frac{N_8}{R}, B_{31} = \frac{1}{R} \frac{\partial N_1}{\partial \theta}, \\ B_{32} &= \frac{\partial N_2}{\partial x}, B_{35} = \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \theta}, B_{36} = \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ B_{43} &= -\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}, B_{47} = -\frac{\partial^2 N_7}{\partial x^2}, B_{48} = -\frac{\partial^2 N_8}{\partial x^2} \\ B_{52} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial N_3}{\partial \theta}, B_{53} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 N_5}{\partial \theta^2}, \\ B_{54} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 N_6}{\partial \theta^2}, B_{56} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial \theta^2} \\ B_{57} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 N_7}{\partial \theta^2}, B_{58} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 N_8}{\partial \theta^2}, \\ B_{61} &= -\frac{1}{2R^2} \frac{\partial N_1}{\partial \theta}, B_{62} = \frac{3}{2R} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ B_{63} &= -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 N_5}{\partial x \partial \theta}, B_{64} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 N_6}{\partial x \partial \theta}, \\ B_{65} &= \frac{1}{2R^2} \frac{\partial N_2}{\partial \theta}, B_{66} = \frac{3}{2R} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ B_{67} &= -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 N_7}{\partial x \partial \theta}, B_{68} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 N_8}{\partial x \partial \theta} \end{aligned}$$

그러므로 원통 셀의 질량과 강성 행렬 그리고 작용하는 외력에 의한 힘을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[m]_s = \int_{A_s} \rho_s h N_s^T N_s dA_s \quad (18)$$

$$= \rho_s h R \int_0^{2\pi} \int_0^R N_s^T N_s dx d\theta$$

$$[k]_s = \int_{A_s} B^T D B dA_s \quad (19)$$

$$= R \int_0^{2\pi} \int_0^R B^T D B dx d\theta$$

$$\{f\}_s = \int_{A_s} N_{sr}^T P_d dA_s + \int_{A_s} N_s^T q_s dA_s \quad (20)$$

원통 셀에 가해지는 압력의 변동성분을 구하기 위해서 포텐셜 함수 Φ 를 다음과 같이 가정한다.

$$\Phi(r, \theta, x, t) = \Psi(r) \mathfrak{R}(x, \theta, t) \quad (21)$$

$\bar{v} = \nabla \Phi$ 를 이용하여 반경 방향 속도성분을

구할 수 있다.

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi(R)}{\partial r} \mathfrak{R}(x, \theta, t) = \frac{\partial u_r}{\partial t} + U \frac{\partial u_r}{\partial x} \quad (22)$$

$$\mathfrak{R}(x, \theta, t) = \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + U \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \Psi(R)}{\partial r} \right) \quad (23)$$

$$\Phi(r, \theta, x, t) = \frac{\Psi(r)}{\partial \Psi(R) / \partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + U \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \quad (24)$$

위의 포텐셜 함수를 라플라스 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} \\ + \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + U \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) - n^2 \right] \frac{\Psi(r)}{\partial \Psi(R) / \partial r} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

변위 벡터 \bar{u} 를 $e^{i\alpha x / R + i\omega t}$ 라고 가정하고 위의 식에 대입하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$\Psi(r) = C_1 J_n(\lambda r) + C_2 Y_n(\lambda r), \lambda = \frac{\beta}{R} \quad (26)$$

내부 유체 유동이므로 유한한 해를 가지기 위해서는 $C_2 \rightarrow 0$ 이어야 하므로 식(24)는 다음과 같이 된다.

$$\Phi(r, \theta, x, t) = \frac{J_n(\lambda r)}{\partial J_n(\lambda R) / \partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + U \frac{\partial u_r}{\partial x} \right)_{r=R} \quad (27)$$

특성 방정식으로부터 λ 를 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_{i1} = \pm \mu_1 \mp \kappa_1, \lambda_{i2} = \pm \mu_2 \mp \kappa_2 \quad (28)$$

각각의 값을 베셀 함수에 대입하면 두개의 일정한 값을 가지게 되는데 이를 식(11)에 대입하여 실수 부를 취하면 다음과 같이 원통 셀의 내부에 작용하는 변동 압력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_d = -\rho_f \left(N_{sr} \ddot{u} + 2U \frac{\partial N_{sr}}{\partial x} \dot{u} + U^2 \frac{\partial^2 N_{sr}}{\partial x^2} \ddot{u} \right) \\ \times \text{Re} \left(\frac{J_n(\lambda R)}{\partial J_n(\lambda R) / \partial r} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

식(29)와 식(20)을 이용하면 유체를 포함하는 원통 셀의 유한 요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$(m_s + m_f) \ddot{u} + c_f \dot{u} + (k_s + k_f) u = f_s \quad (30)$$

여기서,

$$[m]_f = \int_{A_f} \rho_f N_{sr}^T N_{sr} \text{Re} \left(\frac{J_n(\lambda R)}{\partial J_n(\lambda R) / \partial r} \right) dA_f$$

$$[c]_f = 2U \int_{A_f} N_{sr}^T \frac{\partial N_{sr}}{\partial x} \text{Re} \left(\frac{J_n(\lambda R)}{\partial J_n(\lambda R) / \partial r} \right) dA_f$$

$$[k]_f = -U^2 \int_{A_f} \frac{\partial N_{sr}^T}{\partial x} \frac{\partial N_{sr}}{\partial x} \operatorname{Re} \left(\frac{J_n(\lambda R)}{\partial J_n(\lambda R) / \partial r} \right) dA_f$$

이다.

3. 해석 결과 (I)

3.1 해석 모델

길이 0.231 m, 반지름 0.07725 m, 두께 0.0015 m 인 셸에 대해서 해석을 수행하였다.

3.2 유체가 없을 때 고유 진동수와 주파수 응답함수

Table 1 에서 실험결과[7]와 해석 결과를 비교하였다. m 은 원주 방향의 모드의 차수를 의미하고 n 은 길이 방향의 모드 차수를 의미한다. 실험 결과와 해석결과들이 서로 잘 일치함을 볼 수 있다. 따라서 적은 요소로써 효과적으로 셸의 고유진동수를 구할 수 있다는 것을 알 수 있다.

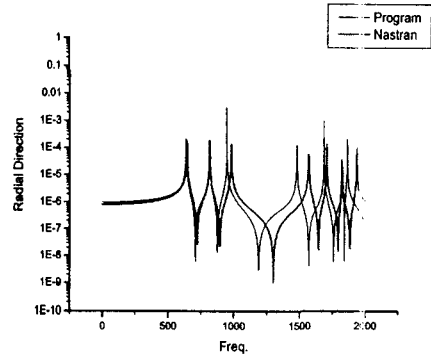
Fig. 3 은 주파수 응답함수를 나타내고 있는데 프로그램과 Nastran 의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

3.3 유체가 있을 때 고유진동수와 주파수 응답함수

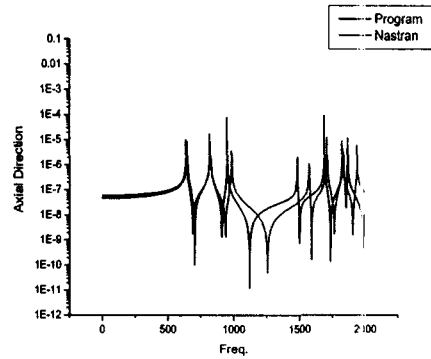
셸 내부에 유동이 없는 유체를 포함할 경우에는 유체는 셸에 부가질량의 효과를 나타낸다. 따라서 전체적으로 고유진동수는 유체가 없을 때 보다 떨어짐을 Table 2 에서 알 수 있다. 실험 결과 [7]와 일치하는 것을 확인할 수 있다. 부가 질량 효과를 나타내는 유체의 두께(h_f)를 Table 3 에 나타내었다.

Table 1 Natural Frequency of the Shell without fluid

Mode		Natural Frequency		
m	n	Experiment	Nastran	Program
1	3	616	635	635
1	2	708	805	816
1	4	945	968	948
1	5	1479	1546	1480
2	4	1628	1681	1657
2	5	1851	1908	1844
2	3	1969	2041	2039
1	6	2151	2311	2154
2	6		2539	2387



(a) Radial Direction



(b) Axial Direction

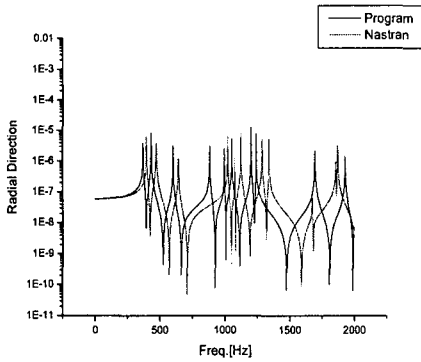
Fig. 3 Accelerance of the shell

Table 2 Natural Frequency of the Shell containing fluid

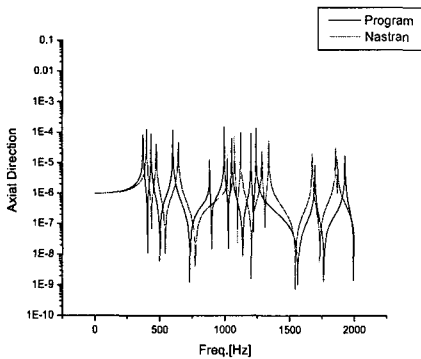
Mode		Natural Frequency		
m	N	Experiment	Nastran	Program
1	3	388	398	373
1	2	421	473	434
1	4	628	643	602
1	5	1027	1076	996
2	4	1094	1124	1054
2	5	1299	1340	1242
2	3	1245	1287	1202
1	6	1546	1674	1515
2	6	1748	1857	1680

Table 3 Effect of Add Mass by Circumferential Mode (Inner Radius is 0.0765 [m])

n	h_f [m]
1	0.0765
2	0.0388
3	0.0250
4	0.0186
5	0.0149



(a) Radial Direction

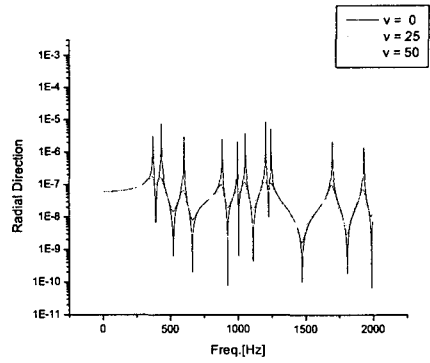


(b) Axial Direction

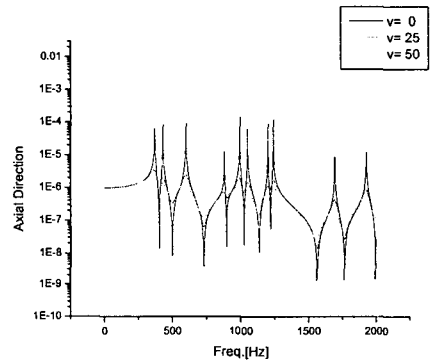
Fig. 4 Accerlerance of the shell

3.4 유속에 따른 고유 진동수 및 주파수 응답함수의 변화

셸 내부의 유체가 일정한 속도를 가지고 유동을 할 때는 전체적으로 질량, 감쇠, 그리고 강성에 영향을 준다. 따라서 Fig. 5 와 같이 속도의 증가에 따라서 공진 점에서 감쇠가 증가하고 고유 진동수는 낮아지는 것을 확인할 수 있다.



(a) Radial Directin



(b) Axial Directin

Fig. 5 Effect of Flow Velocity on Accelerance

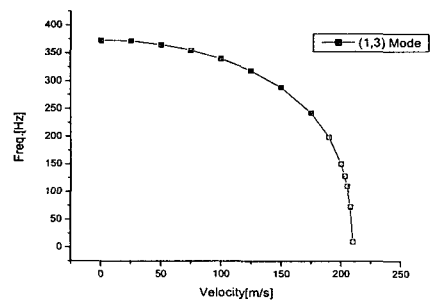


Fig. 6 Effect of Flow Velocity on Natural Frequency for m=1, n=3

속도가 증가하면 고유진동수가 점차 낮아지면서 위험속도 이상에서는 고유 진동수가 음수가 되어 불안정해지는 것을 알 수 있다.

Table 1 Natural Frequency of the Shell without Fluid : Comparison of Beam Theory with Shell Theory

Order	Beam Theory		Shell Theory	
	Nastran	Program	Nastran	Program
1	36	36	36	37
2	226	227	223	230
3	630	634	623	640
4	1225	1243	1215	1246

Table 2 Natural Frequency of the Shell containing Fluid : Comparison of Beam Theory with Shell Theory

Order	Beam Theory		Shell Theory	
	Nastran	Program	Nastran	Program
1	-	33	32	33
2	-	205	197	208
3	-	573	550	578
4	-	1123	1076	1126

Table 6 Effect of Add Mass by Circumferential Mode (Inner Radius is 0.004 [m]))

n	h_f [m]
1	0.00400
2	0.00180
3	0.00148
4	0.00084
5	0.00065

4. 해석 결과 (II)

4.1 유체가 없을 때 고유진동수

길이 0.5 m, 반지름 0.0045 m, 두께 0.001 m에 대해서 해석을 수행 하였다. 이 모델의 경우는 길이에 비해서 단면적이 작으므로 제안한 셸 이론 및 보 이론을 가지고 해석을 수행하였다.

4.2 유체가 없을 때 고유진동수

셸 이론과 보 이론에 따른 고유진동수를 Table 4에 나타내었다. 셸 이론과 보 이론[8]이 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다. 따라서 길이에 비해 단면적이 작을 경우에는 보 이론으로도 효과적으로

고유 진동수를 얻을 수 있다.

4.3 유체가 있을 때 고유진동수

보 이론의 경우는 Nastran에서는 유체의 영향을 고려할 수 없으므로 프로그램 결과만 제시하였고 셸 이론의 경우는 Nastran과 프로그램 결과를 모두 Table 5에 제시하였다. 유체가 있을 경우에도 잘 맞는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 부가 질량의 효과를 나타내는 유체의 두께를 Table 6에 나타내었다. 모드의 차수가 증가면서 고려해야 할 유체의 두께가 감소하는 것을 알 수 있다.

5. 결론

Sanders의 얇은 셸 이론과 비 점성, 비 회전 유체이론을 바탕으로 유체 유동을 포함하는 원통 셸에 대해 유한 요소 법을 적용하였다. 원통 셸과 유체가 접하는 경계 면에서 반경방향의 속도가 같다는 조건을 이용하여 셸과 유체를 충분히 연성되도록 하였다. 유체의 속도가 셸의 질량, 감쇠 그리고 강성에 영향을 주는 것을 확인할 수 있었다. 그리고 셸이 단면적에 비해 길이가 길 경우 셸 이론과 보 이론이 잘 일치한다는 것을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) R.K. Jain, 1974, Journal of Sound and Vibration 37,379-388. Vibration of fluid-filled orthotropic cylindrical shells.
- (2) A.E.H. Love, 1926, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press, Cambridge.
- (3) W.Q. Chen, H.J. Ding, Y.M. Guo and Q.D. Yang, 1997, Journal of Engineering Mechanics 123, 1130. Free vibrations of fluid-filled orthotropic cylindrical shells.
- (4) J.L. Sanders, 1963, Quarterly of Applied Mathematics 21, 21-36. Nonlinear theories for thin shells.
- (5) Y.L. Zhang, D.G. Gorman and J.M. Reese, 2001, Journal of Sound and Vibration 245, 93-112. A finite element method for modeling the vibration of initially tensioned thin-walled orthotropic cylindrical tubes conveying fluid.
- (6) Robert D. Blevins, 1990, Flow-Induced Vibration, Van Nostrand Reinhold, New York.
- (7) T. Mazuch, J. Horacek, J. Trnka and J. Vesely, Journal of Sound and Vibration 193,669-690. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water : FEM and Measurement.
- (8) 서영수 등, 2002, "맥동하는 유체를 포함하는 3 차원 배관 계의 진동해석", 추계학술발표회 논문집, 한국소음진동 공학회