

# 일반적인 단부조건을 갖는 보의 자유진동 Free Vibrations of Generally Restrained Beams

신성철\* · 김봉규\* · 안대순\* · 김선기\*\*

Seong Cheol Shin, Bong Kyou Kim, Dae Soon Ahn and Sun Ki Kim

**Key Words** : tapered beam(변단면 보), free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수), translational spring(수직방향 스프링), rotational spring(회전스프링), point mass(집중질량)

### ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the free vibration characteristics of tapered beams with translational and rotational springs and point masses at the ends. The beam model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory which neglects the effects of rotatory inertia and shear deformation. The governing differential equation for the free vibrations of linearly tapered beams is solved numerically using the corresponding boundary conditions. Numerical results are compared with existing solutions by other methods for cases in which they are available. The lowest four natural frequencies are calculated over a range of non-dimensional system parameters.

### 1. 서론

보는 구조물을 형성하는 가장 기본이 되는 구조요소이며 다양한 조건을 갖는 보의 정, 동적 거동에 관한 많은 연구가 수행되어 왔다. 구조계의 진동특성 및 안정성에 대한 지배인자들의 영향을 결정하는 문제는 공학관련 분야에서 매우 실제적이고 중요한 문제로 취급되고 있다.<sup>(1)</sup> 지배인자들 중 특히 축방향력, 지지조건, 수학적 모형, 추가질량, 단면변화 등은 보의 횡방향 진동 특성 및 안정성에 중요한 영향을 미치는 인자로 알려져 있어 이에 대한 폭넓은 연구가 이루어지고 있다.

이 논문에서는 Fig. 1에 보여진 바와 같이 양단부가 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되고, 단부에 집중질량을 갖는 변단면 보의 자유진동 특성을 고찰하고자 한다. 이를 위하여 해석대상 보의 단부조건에 대한 경계조건을 적용하고, 단면제원이 보축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예에서는 변화율이, 변화폭 및 정방향 변단면 보를 고려하였으며, 다양한 제변수 변화에

따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

### 2. 수학적 모형

Fig. 1은 양단부가 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되어 있고, 단부에 집중질량을 갖는 지간길이  $l$ 인 변단면 보의 기하학적 형상 및 제변수를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $A$ 와  $I$ 는 각각 보축상 임의점  $x$ 에서의 단면적과 단면2차 모멘트이고,  $A_a$ 와  $I_a$ 는 좌측단에서,  $A_b$ 와  $I_b$ 는 우측단에서 보단면의 단면적과 단면2차모멘트이다.  $K_{ra}$ 와  $K_{rb}$ 는 회전 스프링상수,  $K_{ta}$ 와  $K_{tb}$ 는 수직방향 스프링상수,  $M_a$ 와  $M_b$ 는 집중질량의 크기이다. 그리고  $w = w(x, t)$ 는 횡방향 진동변위이다.

Bernoulli-Euler 보이론을 적용하면 Fig. 1에 보인 변단면 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서  $E$ 와  $\rho$ 는 각각 보 재료의 탄성계수 및 밀도이다. Fig. 1에 보인 대상 보가 조화진동을 한다면, 횡방향 변위에 대한 조화진동식은 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

\* 원광대학교 환경건설연구소

E-mail : shin3737@wonkwang.ac.kr

Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204

\* 원광대학교 대학원 토목환경공학과

\*\* 이오엔지니어즈

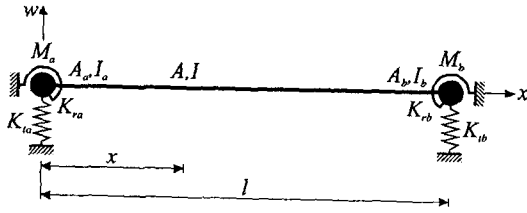


Fig. 1 Tapered beam with general boundary condition.

여기서  $w_x$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며,  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/s),  $i$ 는 모드번호이다.

본 연구에서는 해석대상 보로서 좌측단의 단면적 및 단면2차모멘트를 기준으로 식 (3), (4)에 나타낸 바와 같이 단면적과 단면2차모멘트가 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보를 택하였다.

$$A = A_a [1 + (\beta - 1)x/l]^m \quad (3)$$

$$I = I_a [1 + (\beta - 1)x/l]^n \quad (4)$$

식 (3), (4)에서  $\beta$ 는 좌측단과 우측단에서의 단면제원  $d_a$ 와  $d_b$ 의 비로서 이후 단면비( $d_b/d_a$ , section ratio)라 한다. 그리고  $m$ 과  $n$ 은 단면형상계수로서 본 연구에서 택한 변화율이 변단면(depth taper), 변화폭 변단면(breadth taper) 및 정방형 변단면(square taper)에 대한 이들 값은 식 (5)에 나타낸 바와 같다.<sup>(2)</sup>

$$\text{depth taper} \quad m=1, \quad n=3 \quad (5a)$$

$$\text{breadth taper} \quad m=1, \quad n=1 \quad (5b)$$

$$\text{square taper} \quad m=2, \quad n=4 \quad (5c)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 표현하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{w_x}{l} \quad (6,7)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{\rho A_a}{EI_a}}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$$k_{ia} = \frac{K_{ia} l^3}{EI_a}, \quad k_{ra} = \frac{K_{ra} l}{EI_a} \quad (9,10)$$

$$k_{ib} = \frac{K_{ib} l^3}{EI_a}, \quad k_{rb} = \frac{K_{rb} l}{EI_a} \quad (11,12)$$

식 (8)에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이며, 식 (9)~(12)에서  $k_{ra}$ 와  $k_{rb}$ 는 회전 스프링상수(rotational spring parameter),  $k_{ia}$ 와  $k_{ib}$ 는 수직방향 스프링상수(translational spring parameter)이다.

식 (1)에 식 (2)~(4)를 대입하고, 식 (6)~(8)의 무차원

변수들을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\frac{2n(\beta-1)}{1+(\beta-1)\xi} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \frac{n(n-1)(\beta-1)^2}{[1+(\beta-1)\xi]^2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 [1+(\beta-1)\xi]^{m-n} \eta \quad (13)$$

이상에서 식 (13)은 단면제원이 보축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이다.

회전 스프링과 수직방향 스프링으로 구성된 좌측단에서는  $EI_a d^2 w_x / dx^2 = K_{ra} dw_x / dx$ ,  $EI_a d^3 w_x / dx^3 = -K_{ia} w_x + \omega_i^2 M_a w_x$ 이며, 우측단에서는  $EI_b d^2 w_x / dx^2 = -K_{rb} dw_x / dx$ ,  $EI_b d^3 w_x / dx^3 = K_{ib} w_x - \omega_i^2 M_b w_x$ 이다. 좌측단 및 우측단에서의 경계조건을 무차원 변수를 이용하여 나타내면 각각 식 (14), (15)와 같다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - k_{ra} \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + (k_{ia} - C_i^2 m_a \theta) \eta = 0 \quad (14b)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \beta^{-n} k_{rb} \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (15a)$$

$$\frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \beta^{-n} (k_{ib} - C_i^2 m_b \theta) \eta = 0 \quad (15b)$$

식 (14b), (15b)에서  $m_a$ 와  $m_b$ 는 각각 식 (16), (17)에 나타낸 바와 같이 양단부의 집중질량의 크기와 보 전체질량의 비(mass ratio)이다. 그리고  $\theta$ 는 변단면 보를 동일한 지간길이의 등단면 보로서 변환한 경우 보 단면의 단면적  $A_m$ 과 좌측단에서의 단면적  $A_a$ 의 비로서 변화율이며 변화폭 변단면인 경우 식 (18a), 정방형 변단면인 경우에는 식 (18b)와 같다.

$$m_a = \frac{M_a}{\rho A_m l}, \quad m_b = \frac{M_b}{\rho A_m l} \quad (16,17)$$

$$\theta = \frac{\beta+1}{2}, \quad \theta = \frac{\beta^2+\beta+1}{3} \quad (18a,b)$$

### 3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (13)의 지배방정식을 수치해석하여 고유진동수를 산출하기 위해 문헌 [3]에서와 동일한 수치해석 방법을 사용하였다. 해석과정의 개략적인 내용은 다음과 같다. 식 (13)의 미분방정식에는 불확정량인 미지의 무차원 고유진동수  $C_i$ 항이 포함되어 있으므로 먼저  $C_i$ 값을 가정하여 미분방정식에 대입하고, 좌측단에서 우측단까지 수치적분

**Table 1.** Comparison of results between this study and other methods

Geometry	mode	Reference	
		This study	Reference
$\beta=1^{(a)}$ $k_{ia}=k_{ra}=10^8$ $k_{ib}=0.1, k_{rb}=0$ $m_a=0, m_b=10$	1	0.5503	0.5507
	2	15.51	15.52
	3	50.06	50.01
	4	104.3	-
$\beta=1^{(a)}$ $k_{ia}=k_{ra}=10^8$ $k_{ib}=10, k_{rb}=0$ $m_a=0, m_b=100$	1	0.3601	0.3602
	2	15.43	15.44
	3	49.97	50.01
	4	104.3	-
$\beta=1^{(b)}$ $k_{ia}=k_{ra}=10^8$ $k_{ib}=10^8, k_{rb}=10$ $m_a=0, m_b=0$	1	19.63	19.61
	2	55.50	55.44
	3	110.7	110.6
	4	185.3	185.2
$\beta=1^{(b)}$ $k_{ia}=k_{ra}=1$ $k_{ib}=k_{rb}=1$ $m_a=0, m_b=0$	1	1.406	1.407
	2	4.988	4.986
	3	25.64	25.63
	4	65.23	65.24
Depth taper, $\beta=0.8^{(c)}$ $k_{ia}=10^8, k_{ra}=1$ $k_{ib}=k_{rb}=0$ $m_a=0, m_b=1$	1	0.7890	0.7890
	2	10.47	-
	3	37.12	-
	4	81.42	-
Depth taper, $\beta=0.6^{(c)}$ $k_{ia}=10^8, k_{ra}=0.1$ $k_{ib}=k_{rb}=0$ $m_a=0, m_b=10$	1	0.1077	0.1077
	2	7.924	-
	3	31.36	-
	4	70.24	-

(a): Ref. [4], (b): Ref. [5], (c): Ref. [6]

을 시행한다. 가정한 값의 대상구조에 대한 고유치 여부 판단은 수치적분에서 얻어진 우측단에서의 결과가 식 (15)의 경계조건을 만족하는지 여부로 판단한다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 무차원 고유진동수  $C_i$ 는 행렬값 탐사법을 반복적으로 적용하는 과정에서 Regula-Falsi method를 이용하여 산출하였다. 본 연구에서는 해석대상 보에 대한 단면변화, 단면비  $\beta$ , 무차원 스프링상수  $k_{ia}, k_{ra}, k_{ib}, k_{rb}$  질량비  $m_a$ 와  $m_b$ 가 입력되면 무차원 고유진동수가 출력되도록 컴퓨터 프로그램을 작성하였으며, 해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

본 연구결과를 검증하기 위하여 문헌(4-6)들의 결과와 Table 1에 비교하였다. 이 표에서 본 연구와 문헌의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

대상보의 지지조건이  $k_{ia}=k_{ib}=k_{ra}=k_{rb}=0$ 인 경우에는 자유-자유 보,  $k_{ia}=k_{ib}=k_{ra}=0, k_{rb}=10^6$ 인 경우 자유-가이드(guided) 보,  $k_{ia}=k_{ra}=k_{rb}=0, k_{ib}=10^6$ 인 경우 자유-회전 보,

**Table 2.** Frequency parameter for beams with non-classical boundary conditions

Geometry	mode	Reference	
		This study	Ref. [7]
free-free $\beta=1$	1	22.37	22.37
	2	61.67	61.64
	3	120.9	120.8
	4	199.9	-
free-guided $\beta=1$	1	5.593	5.593
	2	30.23	30.22
	3	74.64	74.60
	4	138.8	138.5
free-hinged $\beta=1$	1	15.42	15.41
	2	49.96	49.94
	3	104.2	104.2
	4	178.3	178.0
guided-guided $\beta=1$	1	9.870	9.866
	2	39.48	39.46
	3	88.83	88.76
	4	157.9	157.8

Rigid body modes in all cases are discoun.ed.

$k_{ia}=k_{ib}=0, k_{ra}=k_{rb}=10^6$ 인 경우 가이드-가이드 보를 의미한다. Table 2는 이러한 비교전적인 단부조건을 갖는 보의 무차원 고유진동수를 비교한 것으로 본 연구결과와 문헌(7)의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Table 3, 4는 각각  $k_{ia}=k_{ib}=10^6$ 인 등단면 보( $\beta=1$ )와  $\beta=2$ 인 변화높이 변단면 보의 회전 스프링상수  $k_{ra}$ 와  $k_{rb}$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 이 표에서  $k_{ra}$ 와  $k_{rb}$ 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있다.

Table 3, 4에서  $k_{ra}=k_{rb}=0$ 인 경우 고정적인 단부조건인 회전-회전 보,  $k_{ra}=10^6, k_{rb}=0$ 인 경우 고정-회전 보,  $k_{ra}=0, k_{rb}=10^6$ 인 경우 회전-고정 보,  $k_{ra}=10^6, k_{rb}=10^6$ 인 경우 고정-고정 보의 무차원 고유진동수와 일치함을 알 수 있다.(8,9)

Table 5는  $k_{ra}=k_{rb}=10^6, \beta=3$ 인 변화폭 변단면 보의 수직방향 스프링상수  $k_{ia}, k_{ib}$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 이 표에서  $k_{ia}$ 와  $k_{ib}$ 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 증가하며,  $k_{ia}=k_{ib}=10^6$ 으로 근접함에 따라 고정-고정 보의 무차원 고유진동수로 변환됨을 알 수 있다.(9)

Table 6은  $k_{ib}=k_{rb}=10^6, \beta=1.5$ 인 정방형 변단면 보의 좌측단 수직방향 스프링상수  $k_{ia}$ 와 회전 스프링상수  $k_{ra}$  변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다.

Table 6에서  $k_{ia}=k_{ra}=0$ 인 경우 고정적인 단부조건인 자

Table 3. uniform beam,  $\beta=1$ ,  $k_{ta}=k_{tb}=10^6$

		first mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	9.869	9.968	10.71	13.43	15.13	15.39	15.41	15.42	15.42	
0.1	9.967	10.07	10.81	13.53	15.23	15.49	15.52	15.52	15.52	
1	10.71	10.81	11.55	14.29	16.03	16.30	16.33	16.34	16.34	
10	13.43	13.53	14.29	17.27	19.27	19.59	19.62	19.63	19.63	
$10^2$	15.13	15.23	16.03	19.27	21.54	21.91	21.95	21.95	21.95	
$10^3$	15.39	15.49	16.30	19.59	21.91	22.28	22.32	22.33	22.33	
$10^4$	15.41	15.52	16.33	19.62	21.95	22.32	22.36	22.37	22.37	
$10^5$	15.42	15.52	16.34	19.63	21.95	22.33	22.37	22.37	22.37	
$10^6$	15.42	15.52	16.34	19.63	21.95	22.33	22.37	22.37	22.37	
		second mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	39.48	39.57	40.40	44.72	49.04	49.86	49.95	49.96	49.96	
0.1	39.57	39.67	40.49	44.81	49.14	49.96	50.05	50.06	50.06	
1	40.40	40.49	41.31	45.61	49.96	50.78	50.87	50.88	50.88	
10	44.72	44.81	45.61	49.95	54.50	55.38	55.48	55.49	55.49	
$10^2$	49.04	49.14	49.96	54.50	59.43	60.41	60.52	60.53	60.53	
$10^3$	49.86	49.96	50.78	55.38	60.41	61.41	61.52	61.53	61.54	
$10^4$	49.95	50.05	50.87	55.48	60.52	61.52	61.63	61.64	61.65	
$10^5$	49.96	50.06	50.88	55.49	60.53	61.53	61.64	61.66	61.66	
$10^6$	49.96	50.06	50.88	55.49	60.53	61.54	61.65	61.66	61.66	
		third mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	88.81	88.91	89.76	95.07	102.4	104.0	104.2	104.2	104.2	
0.1	88.91	89.01	89.86	95.17	102.5	104.1	104.3	104.3	104.3	
1	89.76	89.86	90.70	96.00	103.3	105.0	105.2	105.2	105.2	
10	95.07	95.17	96.00	101.3	108.7	110.5	110.6	110.7	110.7	
$10^2$	102.4	102.5	103.3	108.7	116.6	118.5	118.7	118.7	118.7	
$10^3$	104.0	104.1	105.0	110.5	118.5	120.4	120.6	120.6	120.6	
$10^4$	104.2	104.3	105.1	110.6	118.7	120.6	120.8	120.8	120.8	
$10^5$	104.2	104.3	105.2	110.7	118.7	120.6	120.8	120.8	120.8	
$10^6$	104.2	104.3	105.2	110.7	118.7	120.6	120.8	120.8	120.8	
		fourth mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	157.9	158.0	158.8	164.8	175.1	177.8	178.1	178.2	178.2	
0.1	158.0	158.1	158.9	164.9	175.2	177.9	178.2	178.3	178.3	
1	158.8	158.9	159.8	165.7	176.0	178.8	179.1	179.1	179.1	
10	164.8	164.9	165.7	171.7	182.1	184.9	185.2	185.2	185.2	
$10^2$	175.1	175.2	176.0	182.1	192.9	195.9	196.2	196.3	196.3	
$10^3$	177.8	177.9	178.8	184.9	195.9	198.9	199.3	199.3	199.3	
$10^4$	178.1	178.2	179.1	185.2	196.2	199.3	199.6	199.7	199.7	
$10^5$	178.2	178.3	179.1	185.2	196.3	199.3	199.7	199.7	199.7	
$10^6$	178.2	178.3	179.1	185.2	196.3	199.3	199.7	199.7	199.7	

Table 4. depth taper,  $\beta=2$ ,  $k_{ta}=k_{tb}=10^6$

		first mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	14.24	14.31	14.89	17.55	19.88	20.31	20.36	20.36	20.36	
0.1	14.28	14.35	14.92	17.58	19.92	20.34	20.39	20.40	20.40	
1	14.56	14.63	15.21	17.86	20.21	20.64	20.68	20.69	20.69	
10	16.74	16.81	17.38	20.06	22.48	22.93	22.98	22.98	22.98	
$10^2$	22.12	22.19	22.81	25.84	28.74	29.30	29.36	29.36	29.36	
$10^3$	24.28	24.36	25.01	28.29	31.53	32.16	32.22	32.23	32.23	
$10^4$	24.57	24.65	25.30	28.62	31.90	32.54	32.61	32.62	32.62	
$10^5$	24.59	24.67	25.33	28.65	31.94	32.58	32.65	32.66	32.66	
$10^6$	24.60	24.68	25.34	28.66	31.94	32.58	32.65	32.66	32.66	
		second mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	57.89	57.98	58.76	63.42	69.47	70.84	71.00	71.01	71.01	
0.1	57.92	58.01	58.79	63.44	69.50	70.87	71.02	71.04	71.04	
1	58.14	58.23	59.01	63.66	69.72	71.09	71.25	71.26	71.27	
10	60.15	60.24	61.01	65.63	71.73	73.12	73.27	73.29	73.29	
$10^2$	68.47	68.56	69.33	74.04	80.51	82.03	82.20	82.21	82.22	
$10^3$	74.06	74.15	74.94	79.88	86.86	88.52	88.71	88.73	88.73	
$10^4$	74.92	75.01	75.81	80.80	87.87	89.56	89.75	89.77	89.77	
$10^5$	75.01	75.11	75.90	80.89	87.98	89.67	89.86	89.88	89.88	
$10^6$	75.02	75.11	75.91	80.90	87.99	89.68	89.87	89.89	89.89	
		third mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	129.9	130.0	130.8	136.8	146.9	149.7	150.0	150.1	150.1	
0.1	129.9	130.0	130.9	136.8	147.0	149.7	150.0	150.1	150.1	
1	130.1	130.2	131.1	137.0	147.2	149.9	150.3	150.3	150.3	
10	132.1	132.2	133.1	139.0	149.1	151.9	152.2	152.3	152.3	
$10^2$	142.4	142.5	143.4	149.3	159.7	162.7	163.0	163.0	163.0	
$10^3$	152.1	152.2	153.1	159.2	170.2	173.4	173.7	173.8	173.8	
$10^4$	153.9	154.0	154.9	161.0	172.2	175.4	175.7	175.8	175.8	
$10^5$	154.1	154.2	155.0	161.2	172.4	175.6	175.9	176.0	176.0	
$10^6$	154.1	154.2	155.1	161.2	172.4	175.6	176.0	176.0	176.0	
		fourth mode								
		$k_{ra}$								
$k_{rb}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0	230.5	230.6	231.5	238.2	252.5	257.1	257.6	257.7	257.7	
0.1	230.5	230.6	231.5	238.3	252.5	257.1	257.6	257.7	257.7	
1	230.7	230.8	231.7	238.5	252.7	257.3	257.8	257.9	257.9	
10	232.6	232.8	233.7	240.4	254.7	259.2	259.8	259.8	259.9	
$10^2$	244.3	244.4	245.3	252.1	266.5	271.2	271.8	271.8	271.8	
$10^3$	258.4	258.5	259.4	266.3	281.4	286.3	286.9	287.0	287.0	
$10^4$	261.3	261.4	262.3	269.2	284.5	289.5	290.1	290.2	290.2	
$10^5$	261.6	261.7	262.7	269.6	284.8	289.9	290.5	290.5	290.6	
$10^6$	261.7	261.8	262.7	269.6	284.9	289.9	290.5	290.6	290.6	

유-고정 보,  $k_{ta}=0$ ,  $k_{ra}=10^6$ 인 경우 가이드-고정 보,  $k_{ra}=10^6$ ,  $k_{rb}=10^6$ 인 경우 고정-고정 보의 무차원 고유진동수를

의미한다.

Table 7은 Table 6과 동일한 조건을 갖으며, 좌측단에

Table 5. breadth taper,  $\beta = 3$ ,  $k_{ra} = k_{rb} = 10^6$

		first mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ib}$		0.01	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0.01		0.0961	0.1731	0.4843	1.424	3.030	3.711	3.803	3.812	3.813
0.1		0.2674	0.3038	0.5453	1.447	3.044	3.723	3.815	3.825	3.826
1		0.8312	0.8439	0.9602	1.662	3.179	3.847	3.938	3.947	3.948
10		2.558	2.563	2.613	3.021	4.280	4.906	4.992	5.001	5.002
$10^2$		6.195	6.201	6.261	6.797	9.047	10.30	10.45	10.47	10.47
$10^3$		7.682	7.690	7.767	8.488	12.80	18.59	19.65	19.76	19.77
$10^4$		7.836	7.844	7.924	8.659	13.17	20.05	21.54	21.70	21.71
$10^5$		7.852	7.860	7.939	8.676	13.20	20.19	21.72	21.88	21.89
$10^6$		7.853	7.861	7.940	8.678	13.21	20.20	21.73	21.89	21.91
		second mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ib}$		0.01	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0.01		10.81	10.82	10.88	11.47	15.94	25.40	27.93	28.19	28.22
0.1		10.81	10.82	10.88	11.47	15.94	25.40	27.93	28.19	28.22
1		10.84	10.84	10.90	11.50	15.96	25.41	27.94	28.20	28.23
10		11.09	11.10	11.16	11.72	16.08	25.52	28.04	28.31	28.34
$10^2$		14.13	14.14	14.17	14.47	17.60	26.63	29.19	29.46	29.48
$10^3$		27.42	27.43	27.45	27.63	29.53	38.57	41.88	42.20	42.24
$10^4$		32.37	32.37	32.40	32.63	34.96	49.27	57.96	58.90	58.99
$10^5$		32.82	32.82	32.84	33.08	35.44	50.20	59.68	60.72	60.82
$10^6$		32.86	32.87	32.89	33.12	35.49	50.29	59.84	60.89	60.99
		third mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ib}$		0.01	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0.01		40.77	40.78	40.80	40.99	43.01	58.13	70.92	72.39	72.53
0.1		40.77	40.78	40.80	40.99	43.01	58.13	70.92	72.39	72.53
1		40.78	40.78	40.80	41.00	43.02	58.14	70.93	72.39	72.54
10		40.85	40.86	40.88	41.07	43.08	58.18	70.97	72.44	72.58
$10^2$		41.61	41.61	41.63	41.82	43.75	58.58	71.39	72.86	73.00
$10^3$		51.20	51.20	51.21	51.32	52.47	63.90	76.54	78.02	78.16
$10^4$		74.04	74.04	74.05	74.15	75.22	86.47	107.6	110.4	110.7
$10^5$		77.11	77.11	77.12	77.23	78.34	90.12	115.2	119.0	119.3
$10^6$		77.39	77.39	77.40	77.51	78.61	90.43	115.9	119.7	120.0
		fourth mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ib}$		0.01	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0.01		90.25	90.25	90.26	90.35	91.31	101.9	131.2	136.1	136.6
0.1		90.25	90.25	90.26	90.35	91.31	101.9	131.2	136.1	136.6
1		90.25	90.25	90.26	90.35	91.32	101.9	131.2	136.1	136.6
10		90.28	90.28	90.29	90.39	91.35	102.0	131.2	136.2	136.6
$10^2$		90.62	90.62	90.63	90.72	91.67	102.2	131.4	136.4	136.8
$10^3$		94.51	94.51	94.52	94.60	95.45	105.1	133.8	138.8	139.3
$10^4$		128.0	128.0	128.0	128.0	128.6	134.9	163.5	169.6	170.1
$10^5$		140.5	140.5	140.5	140.6	141.2	148.1	185.5	195.8	196.7
$10^6$		141.5	141.5	141.5	141.6	142.2	149.1	187.2	197.8	198.7

Table 6. square taper,  $\beta = 1.5$ ,  $k_{ib} = k_{rb} = 10^6$

		first mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ra}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0		6.219	6.248	6.501	8.530	15.79	20.08	20.62	20.67	20.68
0.1		6.366	6.393	6.637	8.604	15.79	20.14	20.70	20.75	20.76
1		7.282	7.303	7.492	9.093	15.77	20.64	21.32	21.39	21.40
10		9.082	9.094	9.200	10.17	15.71	22.89	24.30	24.45	24.46
$10^2$		9.671	9.681	9.765	10.55	15.68	24.75	26.96	27.19	27.22
$10^3$		9.744	9.753	9.834	10.60	15.68	25.08	27.45	27.70	27.72
$10^4$		9.751	9.760	9.842	10.61	15.68	25.11	27.50	27.75	27.78
$10^5$		9.752	9.761	9.842	10.61	15.68	25.12	27.51	27.76	27.78
$10^6$		9.752	9.761	9.842	10.61	15.68	25.12	27.51	27.76	27.78
		second mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ra}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0		30.58	30.58	30.65	31.27	37.66	57.86	62.94	63.43	63.48
0.1		30.80	30.80	30.86	31.48	37.78	57.89	63.03	63.52	63.57
1		32.42	32.43	32.48	33.04	38.62	58.07	63.72	64.27	64.33
10		37.67	37.68	37.71	38.05	41.47	58.99	67.86	68.82	68.92
$10^2$		40.36	40.36	40.38	40.62	43.03	59.91	73.21	74.75	74.90
$10^3$		40.73	40.73	40.75	40.98	43.26	60.09	74.42	76.08	76.24
$10^4$		40.77	40.77	40.79	41.01	43.28	60.11	74.56	76.23	76.39
$10^5$		40.77	40.78	40.80	41.02	43.28	60.12	74.57	76.24	76.41
$10^6$		40.77	40.78	40.80	41.02	43.28	60.12	74.57	76.25	76.41
		third mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ra}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0		79.67	79.67	79.69	79.94	82.57	107.5	128.4	130.4	130.6
0.1		79.89	79.89	79.91	80.16	82.78	107.5	128.5	130.5	130.7
1		81.65	81.65	81.67	81.91	84.39	107.6	129.1	131.3	131.5
10		89.32	89.32	89.34	89.51	91.23	107.9	133.4	136.9	137.2
$10^2$		94.87	94.87	94.88	94.99	96.11	108.3	140.5	146.2	146.7
$10^3$		95.75	95.75	95.76	95.86	96.89	108.3	142.5	148.7	149.3
$10^4$		95.84	95.84	95.85	95.95	96.97	108.3	142.7	149.0	149.6
$10^5$		95.85	95.85	95.86	95.96	96.98	108.3	142.7	149.0	149.6
$10^6$		95.85	95.85	95.86	95.96	96.98	108.3	142.7	149.0	149.6
		fourth mode								
		$k_{ia}$								
$k_{ra}$		0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0		152.9	152.9	152.9	153.0	154.4	170.8	215.4	221.5	222.0
0.1		153.1	153.1	153.1	153.3	154.6	170.9	215.5	221.6	222.1
1		155.0	155.0	155.0	155.1	156.4	171.8	215.9	222.4	223.0
10		164.5	164.5	164.5	164.6	165.6	176.6	219.2	228.5	229.4
$10^2$		173.4	173.4	173.4	173.5	174.1	181.1	225.5	241.0	242.4
$10^3$		175.0	175.0	175.0	175.1	175.6	182.0	227.5	244.9	246.4
$10^4$		175.2	175.2	175.2	175.2	175.8	182.1	227.7	245.4	246.9
$10^5$		175.2	175.2	175.2	175.3	175.8	182.1	227.7	245.5	247.0
$10^6$		175.2	175.2	175.2	175.3	175.8	182.1	227.7	245.5	247.0

집중질량  $m_a=1$ 을 갖는 보의 좌측단에서의 수직방향 스프링상수  $k_{ia}$ 와 회전 스프링상수  $k_{ra}$  변화에 따른 무차원 고유진동수의

변화를 나타낸 것이다. Table 6과 7에서  $m_a=1$ 인 경우  $m_a=0$ 인 경우에 비해 무차원 고유진동수가 항상 작음을 알 수 있다.

Table 7. square taper,  $\beta=1.5$ ,  $k_{tb}=k_{rb}=10^6$ ,  $m_a=1$

first mode										
$k_{ra}$										
$k_{ra}$	0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	
0	2.350	2.362	2.464	3.312	7.707	19.25	20.61	20.67	20.68	
0.1	2.422	2.433	2.532	3.362	7.723	19.29	20.69	20.75	20.76	
1	2.908	2.917	2.999	3.717	7.838	19.55	21.32	21.39	21.40	
10	4.195	4.201	4.254	4.758	8.214	20.39	24.28	24.45	24.46	
$10^2$	4.792	4.797	4.842	5.272	8.418	20.80	26.92	27.19	27.22	
$10^3$	4.875	4.880	4.924	5.345	8.447	20.86	27.41	27.70	27.72	
$10^4$	4.884	4.889	4.933	5.353	8.451	20.86	27.46	27.75	27.78	
$10^5$	4.885	4.890	4.934	5.353	8.451	20.86	27.47	27.76	27.78	
$10^6$	4.885	4.890	4.934	5.354	8.451	20.86	27.47	27.76	27.78	

second mode										
$k_{ra}$										
$k_{ra}$	0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	
0	21.50	21.50	21.50	21.51	21.62	26.15	62.08	63.42	63.48	
0.1	21.60	21.60	21.60	21.61	21.72	26.20	62.15	63.51	63.57	
1	22.38	22.38	22.38	22.39	22.51	26.66	62.69	64.27	64.33	
10	26.03	26.03	26.04	26.05	26.18	29.14	65.57	68.81	68.92	
$10^2$	29.16	29.16	29.16	29.17	29.29	31.52	68.34	74.73	74.90	
$10^3$	29.71	29.71	29.71	29.72	29.84	31.96	68.83	76.06	76.24	
$10^4$	29.77	29.77	29.77	29.78	29.90	32.01	68.88	76.21	76.39	
$10^5$	29.77	29.77	29.78	29.79	29.90	32.01	68.89	76.23	76.41	
$10^6$	29.78	29.78	29.78	29.79	29.90	32.01	68.89	76.23	76.41	

third mode										
$k_{ra}$										
$k_{ra}$	0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	
0	64.28	64.28	64.28	64.28	64.29	64.41	79.50	130.3	130.6	
0.1	64.38	64.38	64.38	64.38	64.39	64.52	79.53	130.4	130.7	
1	65.22	65.22	65.22	65.22	65.23	65.37	79.77	131.2	131.5	
10	70.27	70.27	70.27	70.27	70.29	70.46	81.52	136.7	137.2	
$10^2$	76.67	76.67	76.67	76.67	76.68	76.86	84.43	145.9	146.7	
$10^3$	78.07	78.07	78.07	78.07	78.08	78.25	85.17	148.3	149.3	
$10^4$	78.22	78.22	78.22	78.22	78.24	78.41	85.26	148.6	149.5	
$10^5$	78.24	78.24	78.24	78.24	78.25	78.43	85.27	148.7	149.6	
$10^6$	78.24	78.24	78.24	78.24	78.26	78.43	85.27	148.7	149.6	

fourth mode										
$k_{ra}$										
$k_{ra}$	0	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	
0	131.4	131.4	131.4	131.4	131.4	131.4	131.8	219.4	222.0	
0.1	131.5	131.5	131.5	131.5	131.5	131.5	131.9	219.5	222.1	
1	132.4	132.4	132.4	132.4	132.4	132.4	132.8	220.2	223.0	
10	138.4	138.4	138.4	138.4	138.4	138.5	139.0	224.5	229.3	
$10^2$	148.4	148.4	148.4	148.4	148.4	148.5	149.0	231.5	242.4	
$10^3$	151.0	151.0	151.0	151.0	151.0	151.1	151.6	233.1	246.4	
$10^4$	151.3	151.3	151.3	151.3	151.3	151.4	151.9	233.3	246.9	
$10^5$	151.3	151.3	151.3	151.3	151.3	151.4	151.9	233.3	247.0	
$10^6$	151.3	151.3	151.3	151.3	151.3	151.4	151.9	233.3	247.0	

#### 4. 결론

이 논문은 양단이 회전스프링과 수직방향 스프링에 지지되어 있고, 단부에 집중질량을 갖는 변단면 보의 자유진동에 관한 연구이다. 해석대상 보로서 단면제원이 보축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보를 택하였다. 대상 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 대응하는 경계조건을 적용하여 수치적분기법과 시행착오적 행렬값 탐사법이 결합된 수치해석기법으로 해석하여 고유진동수를 구하였다.

타문헌의 결과와 비교하여 본 연구결과를 검증하였으며, 다양한 제변수 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

#### 5. 참고문헌

- (1) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold.
- (2) Gupta, A. K., 1985, "Vibration of Tapered Beams," Journal of Structural Engineering, Vol. 111, pp.19-36.
- (3) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp.4871-4891.
- (4) Kim, H. K. and Kim, M. S., 2001, "Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions using Fourier Series," Journal of Sound and Vibration, Vol. 245, pp.771-784.
- (5) Li, W. L., 2000, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, pp.709-725.
- (6) Aucilleo, N. M., 1996, "Transverse Vibrations of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Tip Mass of Rotatory Inertia and Eccentricity," Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, pp.25-34.
- (7) Maurizi, M. J., Belles, P. M. and Martin, H. D., 1999, "An Additional Contribution on the Transverse Vibration of a Uniform Circular Thick Beam with Non-Classical Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 226, pp.1053-1056
- (8) Paz, M., 1997, Structural Dynamics-Theory and Computation, 4th Edition, Chapman & Hall.
- (9) 이병구, 오상진, 최규도, 1991, "변단면 보의 자유진동 해석", 대한토목학회 논문집, 제11권 제3호, pp.37-46