한국소음진동공학회 2003년도 춘계학술대회논문집, pp. 858~863

불연속 변화단면 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Stepped Horizontally Curved Beams with Variable Curvature

○ 이태은* · 안대순** · 이병구*** · 김권식****

Tae Eun Lee, Dae Soon Ahn, Byoung Koo Lee and Kwon Sik Kim

Key Words : horizontally curved beam(수평 곡선보), variable curvature(변화곡률), free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수)

ABSTRACT

In the practical engineering fields, the horizontally curved beams are frequently erected as the major/minor structural components. The effects of both variable curvature and variable cross-section on structural behavior are very important and therefore these effects should be included in structural analyses. From this viewpoint, this paper deals with the free vibrations of horizontally curved beams with variable curvature and variable cross-section. In this study, the parabola as the curvilinear shape and stepped beam as the variable cross-section are considered. The ordinary differential equation governing free vibrations of such beams are derived. For calculating the natural frequencies, the governing equations are solved by numerical methods. The Runge-Kutta and Determinant search Methods are used for integrating the differential equations and for calculating the natural frequencies, respectively. With regard to numerical results, the relationships between frequency parameters and various beam parameters are presented in the forms of Table and Figures.

1. 서 론

수평 곡선보는 보, 기둥, 평판 등과 더불어 각종 구조공학 분야에서 단위구조로 이용되고 있다. 특히 도시지역 내에서 고가고속도로를 건설하는 경우에 수평 곡선보의 이용은 필수적이다. 따라서 지난 수 십 년간에 수평 곡선보의 정적, 동적인 연구가 많은 학자들에 의하여 이루어졌다.[1~10]

수평 곡선보를 건설하는 경우에 변화곡률 곡선보의 시공이 불가피하며 특히 완화곡선을 필요로 하는 경우에는 더욱 그러하다. 또한 변단면은 미적 감각, 시공상의 이유 또는 경제적 이유 등으로 그 사용이 날로 증가하는 추세이다. 수평 곡선보를 변단면으로 시공하는 경우에 연속 변단면 보다는 일정 구간을 덮개판으로 보강하는 불연속 변화단면이 대부분이다.

이제까지의 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구를 살펴보면 대부분 원호형 등단면 보에 대한 정, 동적 거동을 연구하였다. 이와 같은 관점에서 본 연구는 불연속 변화단면 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 해석하는데 연구목적이 있다. 이 연구에서 변화곡률 수평 곡선보로는 포물선형 수평 곡선보를 채택하였다.

이 연구에서는 불연속 변화단면 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식과 경계조건을 유도하고, 이를 수치해석하여 보의 고유진동수를 산출하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고, 고유진동수의 산정은 행렬값 탐사법을 이용하였다.

이 연구에서의 기본가정은 다음과 같다.

1) 곡선보의 재료는 선형탄성체이다.

2) 이론의 용이한 전개를 위하여 곡선보의 단면은 원형단면으로 가정한다.

3) 곡선보의 거동은 작은 처짐이론에 의한다.

4) 자유진동은 조화진동에 의한다.

* 정회원, 원광대학교 대학원 박사과정
E-mail: telee@wonkwang.ac.kr
Tel: (063) 850-6718, Fax: (063) 857-7204
** 정회원, 원광대학교 대학원 박사과정
*** 정회원, 원광대학교 교수
**** (주) SK건설

2. 수학적 모형

다음 그림 1은 직교좌표계(x, y, z)에 놓인 불연속 변화단면 변화곡률 수평 곡선보를 나타낸다. 보의 지간길이는 l, 수평높이는 h이며, 보는 양단회전 또는 양단고정 지점으로 지지되어 있다. 보의 축상 임의점에서 곡률반경 및 곡률반경과 수평축이 이루는 각도는 각각 ρ와 θ이다. 수평 곡선보의 축은 m개의 구간으로 나누어져 있으며, i구간의 단면적, 단변이차모멘트 및 단면극관성모멘트는 각각 A_i, I_i, J_i로 표시되어 있다. i구간의 시작점은 x_{i1}, 종점은 x_{i2}로 표시되며, 따라서 $i-1$구간의 종점과 i구간의 시점은 같은 x좌표이다.

또한 이 그림에서 곡선보의 임의 축에서 z축과 일치하는 수직변위 v, 휨에 의한 단면회전각 Ψ, 전단에 의한 단면회전각 β 및 비틀림에 의한 비틀림 각 ϕ가 표시되어 있다.

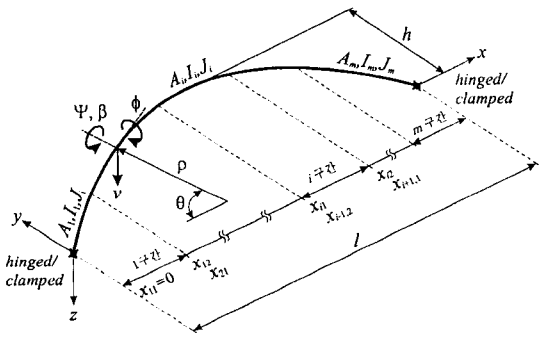

그림 1. 불연속 변화단면 변화곡률 수평 곡선보의 기하학적 형상 및 제 변수

그림 2는 곡선보 요소에 발생하는 변위로 인한 합응력 및 자유진동으로 인한 관성력을 나타낸다. 변위로 인한 합응력으로는 전단력 Q, 휨 모멘트 M 및 비틀림 모멘트 T가 발생하며, 관성력으로는 수직방향 관성력 F_v, 회전관성우력 C_Ψ 및 비틀림 관성력 C_ϕ가 발생한다.

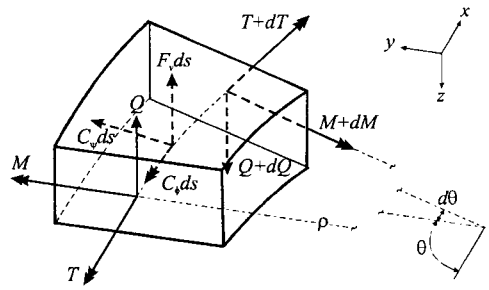

그림 2. 곡선보의 미소요소

그림 2에서 합응력 Q, M, T 및 관성력 F_v, C_Ψ, C_ϕ에 대한 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$Q' - \rho F_v = 0 \tag{1}$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\Psi = 0 \tag{2}$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \tag{3}$$

여기서, $(\,')= d/d\theta$이다.

이 연구에서 보의 자유진동을 조화진동으로 가정하였으므로 다음과 같이 관성력을 유도할 수 있다.

$$F_v = -\gamma A_i \omega_i^2 v \tag{4}$$

$$C_\Psi = -\gamma I_i \omega_i^2 \Psi \tag{5}$$

$$C_\phi = -\gamma J_i \omega_i^2 \phi \tag{6}$$

위의 식들에서 γ는 질량밀도이고, ω_i는 고유각진동수이다.

변위에 의하여 발생하는 합응력 Q, M, T는 다음과 같이 나타낼 수 있다[10].

$$Q = kGA\beta \tag{7}$$

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \Psi') \tag{8}$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\phi' + \Psi) \tag{9}$$

위의 식들에서 k는 단면형상계수, E, G는 각각 탄성계수 및 전단탄성계수이다.

전단면회전각 dv/ds는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dv}{ds} = \rho^{-1} v' = \Psi + \beta \tag{10}$$

식 (10)으로부터 전단에 의한 단면회전각 β를 산출하면 다음과 같다.

$$\beta = \rho^{-1} v' - \Psi \tag{11}$$

식 (11)의 β를 식 (7)에 대입하여 Q를 산출하면 다음과 같다.

$$Q = kGA\beta = kGA(\rho^{-1} v' - \Psi) \tag{12}$$

위의 Q, M, T식들을 평형방정식인 식 (1), (2), (3)에 적용하기 위하여 Q', M', T'를 산출하면 다음과 같다.

$$Q' = kGA(\rho^{-1} v'' - \rho^{-2}\rho' v' - \Psi') \tag{13}$$

$$M' = EI\rho^{-1}(\phi' - \Psi'') - EI\rho^{-2}\rho'(\phi - \Psi') \quad (14)$$

$$T' = GJ\rho^{-1}(\Psi' + \phi'') - GJ\rho^{-2}\rho'(\Psi + \phi') \quad (15)$$

본 연구에서는 상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (16)$$

$$\eta = y/l \quad (17)$$

$$\delta = v/l \quad (18)$$

$$f = h/l \quad (19)$$

$$\zeta = \rho/l \quad (20)$$

$$\mu = kG/E \quad (21)$$

$$e = GJ_1/(EI_1) \quad (22)$$

$$s = l/\sqrt{I_1/A_1} \quad (23)$$

$$s_p = l/\sqrt{J_1/A_1} \quad (24)$$

곡선보의 각 구간에서 단면이차모멘트 I_i를 I_1에 대한 단면비 n_i로 나타내면 다음과 같다.

$$n_i = I_i/I_1, \quad \xi_{i1} \le \xi \le \xi_{i2} \quad (25)$$

이상에서 언급한 Q, M, T, Q', M', T' 및 F_v, C_Ψ 및 C_ϕ를 평형방정식 (1), (2), (3)에 대입하고, 무차원 변수식 (16)~(24)를 이용하면 다음의 불연속 변화단면 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원으로 유도할 수 있다.

$$\delta'' = a_1\delta' + a_2 c_i^2\delta + a_3\Psi', \quad \xi_{i1} \le \xi \le \xi_{i2} \quad (26)$$

$$\Psi'' = a_1\Psi' + (a_4 + a_5 c_i^2)\Psi + a_6\phi' + a_1\phi + a_7\delta, \quad \xi_{i1} \le \xi \le \xi_{i2} \quad (27)$$

$$\phi'' = a_1\phi' + (a_8 + a_9 c_i^2)\phi + a_6\Psi' + a_1\Psi, \quad \xi_{i1} \le \xi \le \xi_{i2} \quad (28)$$

여기서, 미분방정식 식 (26)~(28)에 포함된 계수 a_1~a_9는 다음과 같다.

$$a_1 = \zeta'/\zeta \quad (29.1)$$

$$a_2 = -n_i\mu^{-1}s^{-2}\zeta^2 \quad (29.2)$$

$$a_3 = \zeta \quad (29.3)$$

$$a_4 = n_i^{-1}(\mu s^2\zeta^2 + e) \quad (29.4)$$

$$a_5 = -s^{-2}\zeta^2 \quad (29.5)$$

$$a_6 = 1 + n_i e^{-1} \quad (29.6)$$

$$a_7 = -n_i^{-1}\mu s^2\zeta \quad (29.7)$$

$$a_8 = n_i^{-1}e \quad (29.8)$$

$$a_9 = -n_i e^{-1}s_p^{-2}\zeta^2 \quad (29.9)$$

위의 상미분방정식 식 (26)~(28)에서 c_i는 무차원 고유진동수이며, 다음과 같이 정의된다.

$$c_i = \omega_i l^2\sqrt{\gamma A_1/EI_1}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \cdots \quad (30)$$

다음은 지점조건에 대응하는 경계조건을 고찰한다. 회전지점($x=0$ 또는 $x=l$)에서 수직방향변위 v, 휨모멘트 M 및 비틀림 각 ϕ가 "0"이므로 다음과 같은 경계조건이 유도된다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \quad (31)$$

$$\Psi' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \quad (32)$$

$$\phi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \quad (33)$$

또한 고정지점($x=0$ 또는 $x=l$)에서 수직방향변위 v, 전단면회전각 $\Psi+\beta$ 및 비틀림 각 ϕ가 "0"이므로 다음과 같은 경계조건이 유도된다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \quad (34)$$

$$\delta' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \quad (35)$$

$$\phi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \quad (36)$$

3. 형상함수

그림 1에 보인 직교좌표계(x, y, z)위에 놓인 수평 곡선보의 선형은 일반 함수식 $y=y(x)$로 주어진다. 선형식이 주어지면 변수 θ 및 계수 a_1~a_9에 포함되어 있는 형상함수 ζ와 ζ'를 ξ의 변수로 나타내어야 상미분방정식을 수치해석할 수 있다.

주어진 수평 곡선보의 선형식 $y=y(x)$는 식 (16), (17)의 무차원 변수를 이용하면 다음과 같이 무차원 선형식으로 나타낼 수 있다.

$$\eta = \eta(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1 \quad (37)$$

위의 선형식에서 곡률반경과 ξ축이 이루는 각도 θ와 곡률반경 ζ 및 미분 ζ'은 수학적 정의에 의하여 다음 식들과 같이 산출할 수 있다.

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) \tag{38}$$

$$\zeta=\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2}\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^{-1} \tag{39}$$

$$\zeta'=\frac{d\zeta}{d\xi}\frac{d\xi}{d\theta} \tag{40}$$

수평 곡선보의 선형식으로는 매우 다양한 식들이 가능하며, 본 연구에서는 자유진동 해석의 수치해석 예제를 위하여 포물선형 수평 곡선보를 택하였다. 수평높이 h, 지간길이 l을 갖는 식 (37)과 같은 포물선의 무차원 선형식은 다음과 같다.

$$\eta=-4f\xi(\xi-1),\ 0\le\xi\le1 \tag{41}$$

식 (41)를 식 (38)~(40)에 적용하면 포물선 보에 대한 형상함수들을 다음과 같이 ξ의 변수로 나타낼 수 있다.

$$\theta=\pi/2-\tan^{-1}[-4f(2\xi-1)] \tag{42}$$

$$\zeta=0.125f^{-1}[1+16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \tag{43}$$

$$\zeta'=1.5(2\xi-1)[1+16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \tag{44}$$

이상의 형상함수들을 이용하면, 임의 ξ좌표에서 계수 a_1~a_9을 계산할 수 있다.

4. 수치해석 예제 및 토의

위에서 상미분방정식의 계수 a_1~a_8이 계산되었으므로 상미분방정식 (26)~(28)과 경계조건식 (31)~(33) 또는 (34)~(36)를 이용하여 무차원 고유진동수 c_i 및 진동형 $\delta=\delta_i(\xi)$, $\Psi=\Psi_i(\xi)$, $\phi=\phi_i(\xi)$를 수치해석적 방법으로 산출할 수 있다.

이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 다른 방법과 비교하여 정확성이 매우 우수한 Runge-Kutta법[11]을 이용하였고, 무차원 고유진동수 c_i를 산출하기 위해서는 행렬값 탐사법과 비선형 방정식의 해석법 중의 하나인 Regula-Falsi법[11]을 이용하였다. 자유진동 해석에서 이와 같은 수치해석 방법은 다수의 문헌들[4, 9, 10]에서 이미 그 적합성이 입증되었다.

그림 3은 $f=0.2$, $s=75$, $s_p=53$, $e=0.65$, $\mu=0.32$이고, $m=2$, $\xi_{21}=0.5$, $\xi_{22}=1.0$, $n_2=2$ 인 수평 곡선보에 대하여 분할갯수($1/\Delta\xi$)에 따른 수치해의 수렴해석 결과를 나타낸 것이다. 수렴해석 결과 $1/\Delta\xi$=20, 즉 $\Delta\xi$=0.05에서 모든 c_i값들은 충분한 정도를 갖고 수렴함을 알 수 있다. 본 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 모든 수치해석 예제들은 $1/\Delta\xi$=100, 즉 $\Delta\xi$=0.01로 하여 모든 결과를 산출하였다.

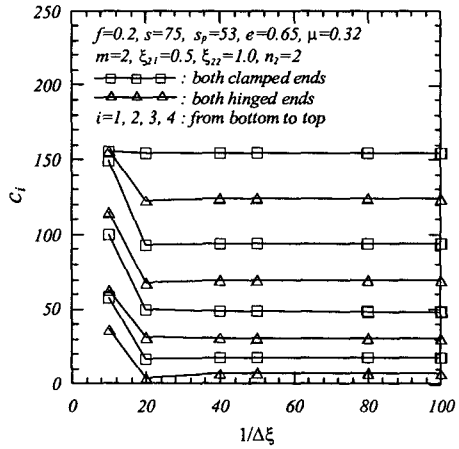

그림 3. 수렴해석

그림 4는 $s=75$, $s_p=53$, $e=0.65$, $\mu=0.32$이고, $m=2$, $\xi_{21}=0.5$, $\xi_{22}=1.0$, $n_2=2$ 인 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 c_i와 수평높이 대 지간길이비 f의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 f가 증가하면 일반적으로 c_i는 감소하며, 이는 f값이 증가하면 진동에 대한 수평 곡선보의 강성이 감소하기 때문으로 사료된다.

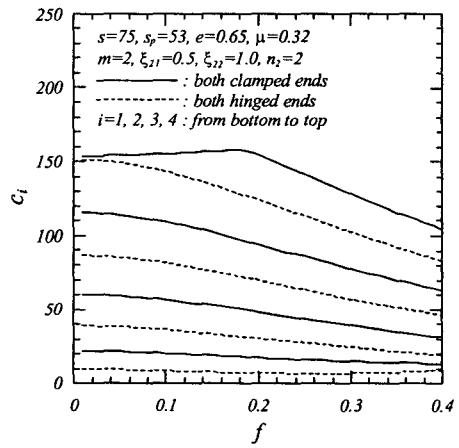

그림 4. c_i - f 곡선

그림 5는 $f=0.2$, $s_p=0.71\,s$, $e=0.65$, $\mu=0.32$이고, $m=2$, $\xi_{21}=0.5$, $\xi_{22}=1.0$, $n_2=2$ 인 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 c_i와 세장비 s의 관계를 나타

낸 것이다. 이 그림에서 s가 증가하면 c_i는 증가하며, s가 일정 값에 도달하면 그 증가율은 0에 근접하여 c_i값은 일정값에 수렴하게 된다.

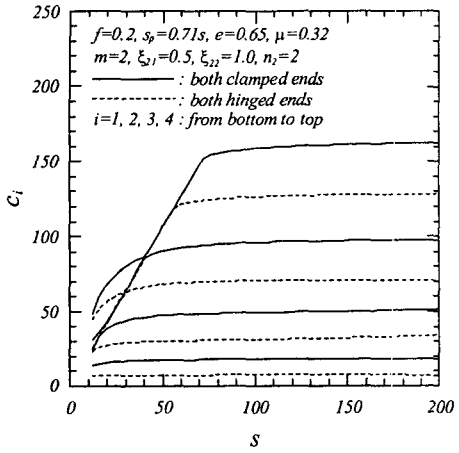

그림 5. c_i - s 곡선

그림 6은 $f=0.2$, $s=75$, $s_p=53$, $e=0.65$, $\mu=0.32$이고, $m=2$, $\xi_{21}=0.5$, $\xi_{22}=1.0$ 인 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 c_i와 단면비 n의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에 보인바와 같이 n의 증가는 c_i를 증가시키는 요인으로 작용하나 n값이 2 이상이면 그 증가율이 거의 없음을 알 수 있다. 따라서 구조물의 고유진동수를 증가시키기 위하여 단면비를 일정 값 이상으로 크게 증가시키는 것은 비효율적임을 알 수 있다. 또한 이상의 그림 3~6으로부터 모든 무차원 고유진동수 c_i값은 고정-고정보가 회전-회전보에 비하여 크게 나타났다.

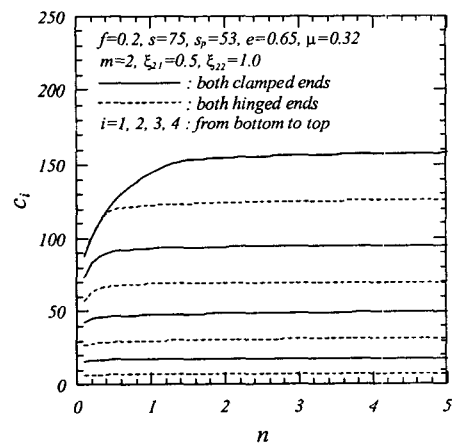

그림 6. c_i - n 곡선

그림 7은 $f=0.2$, $s=75$, $s_p=53$, $e=0.65$, $\mu=0.32$이고, $m=2$, $\xi_{22}=1.0$, $n_2=2$ 인 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 c_i와 두 번째 구간의 시작위치 ξ_{21}의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 ξ_{21}의 위치가 변화함에 따라 c_i값은 증가와 감소를 반복함을 알 수 있다. 따라서 이 그림으로부터 큰 c_i값을 나타낼 수 있는 ξ_{21}의 위치를 파악할 수 있어 구조물의 진동수를 효과적으로 증가시킬 수 있을 것으로 판단된다.

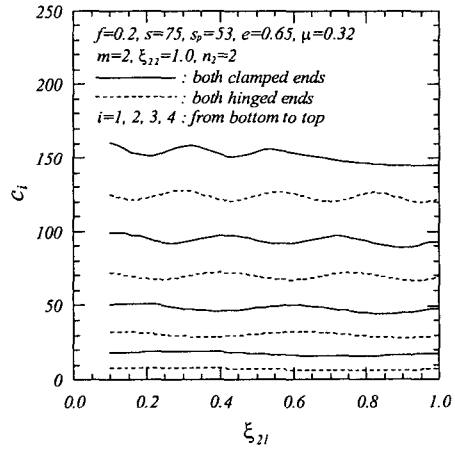

그림 7. c_i - ξ_{21} 곡선

5. 결 론

이 논문은 불연속 변화단면 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 보의 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력들 사이의 동적 평형방정식을 이용하여 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전 및 고정-고정의 포물선 보에 대하여 제 변수 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

이 논문을 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 고유진동수는 고정-고정보가 회전-회전보에 비하여 크게 나타난다.

2) 수평 높이 비의 증가는 진동에 대한 강성을 감소시켜 무차원 고유진동수를 감소시킨다.

3) 세장비 및 단면비의 증가는 무차원 고유진동수를 증가시키며, 세장비 및 단면비가 일정값에 도달하면 무차원 고유진동수는 특정값으로 수렴한다.

이 연구에서 얻어진 결과들은 곡선교량 등과 같은 구조물의 동적 해석에서 고유진동수를 산출하는 데 그 유용성이 매우 기대된다.

참고문헌

(1) Shore, S and Chaudhuri, S., 1971, "Free Vibration of Horizontally Curved Beam," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, No. ST3, pp. 793-796.

(2) Wang, T.M., 1975, "Fundamental Frequency of Clamped Elliptic Arcs for Vibration Outside the Plane of Initial Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 42, No. 4, pp. 515-519.

(3) Laskey, A.J., 1981, Out-of-Plane Vibration of Continuous Circular Curved Beams considering Shear Deformation and Rotatory Inertia, M.S. Thesis, University of New Hampshire, USA.

(4) Lee, B.K. and Wilson, J.F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp. 75-89.

(5) Maurizi, M.J., Belles, P.M., Rossi, R.E. and Rossa, M.A., 1993, "Free Vibrations of Three-Centered Arc Clamped at the Ends," Journal of Sound and Vibration, Vol. 161, No. 1, pp. 87-189.

(6) Howson, W.P., Jemah, A.K. and Zhou, J.Q., 1995, "Exact Natural Frequencies for Out-of-Plane Structures Composed of Curved Members," Computers & Structures, Vol. 55, No. 6, pp. 989-995.

(7) Kang, K.J., Bert, C.W. and Striz, A.G., 1996, "Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams with Waping using DQM," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 122, No. 6, pp. 657-662.

(8) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 1999, "Natural Frequencies of Noncircular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, No.1, pp. 23-33.

(9) 이병구, 진태기, 이태은, 2002, "완화곡선을 갖는 수평곡선보의 자유진동," 한국소음진동공학회논문집, 제 12권, 제 1호, pp. 82-88.

(10) Lee, B.K., Oh, S.J and Park, K.K., 2002, "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams resting on Elastic Foundation, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 2, No. 1, pp. 77-97.

(11) Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R., 1986, Numerical Method in Engineering Practice, Holt, Reinhardt and Winston, Inc.