

# 비균질 Pasternak지반 위에 놓여진 후판의 자유진동해석 Free Vibration Analysis of Thick Plates on Inhomogeneous Pasternak Foundation

이 용 수\* · 김 일 중\*\* · 오 숙 경\*\*\* · 오 이 효 진\*\*\*\*  
Lee Yong-Soo, Kim Il-Jung, Oh Soog-Kyoung, Lee Hoy Jin

**Key words** : Pasternak foundation(Pasternak지반), Winkler foundation parameter(Winkler지반계수), Shear foundation parameter(전단지반계수), Thick plate(후판)

## ABSTRACT

This paper has the object of investigating natural frequencies of thick plates on inhomogeneous Pasternak foundation by means of finite element method and providing kinematic design data for mat of building structures. This analysis was applied for design of substructure on elastic foundation. Mat of building structure may be considered as a thick plate on elastic foundation. Recently, as size of building structure becomes larger, mat area of building structure also tend to become larger and building structure is supported on inhomogeneous foundation.

In this paper, vibration analysis of rectangular thick plate is done by use of Serendipity finite element with 8 nodes by considering shearing strain of plate. The solutions of this paper are compared with existing solutions and finite element solutions with 4\*4 meshes of this analysis are shown the error of maximum 0.083% about the existing solutions. It is shown that natural frequencies depend on not only Winkler foundation parameter but also shear foundation parameter.

### 기호설명

2a, 2b : 판요소의 길이, 폭  
 $\rho$  : 단위 체적당 판의 질량  
h : 판요소의 두께  
 $w, \theta_x, \theta_y$  : 판의 시간변화에 따른 변위 및 회전각  
[M] : 모멘트  
[Q] : 전단력  
{ $\chi$ } : 곡률  
{ $\phi$ } : 전단변형각  
 $k_w$  : Winkler지반강성

$k_g$  : 전단지반강성  
w : 판의 수직변위  
 $\nu$  : 포아송비  
[ $K_E$ ] : [ $K_e$ ], [ $K_{ge}$ ]를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 강성행렬  
[ $K_M$ ] : [ $M_e$ ]를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 질량행렬  
 $\omega$  : 판의 고유 원진동수  
[M] : 요소 형상함수행렬

### 1. 서론

최근 빈번하게 발생하고 있는 지진이나 진설현장의 발파, 항타, 다짐, 굴착 등은 지반 탄성매질을 통해 지반 진동을 일으켜 주변의 건설구조물에 동적 영향을 미치고 있다. 지반을 통해 구조물에 가해지는 동적 영향은 새로운 응력파를 발생시켜 근접한 지반과 기초 상호간에 영향을 주고 그 영향은 다시 구조물의 동적 응답에 영향을 미치게 되는데 이러한 현상을 지반-구조물 상호작용이라 한다. 지반-구조물의 상호작용에 대한 해석은 탄성 지지된 교차보, 지표면 위

\* 책임저자, 원광대학교 건축학부 정교수  
E-mail : struct@wonkwang.ac.kr  
Tel : (063) 850-6709, Fax : (063) 843-0782

\*\* 정인대학 건축인테리어디자인과 조교수

\*\*\* 원광대학교 대학원 박사과정

\*\*\*\* 원광대학교 대학원 석사과정

에 놓인 기초, 철도 궤도 등의 해석에 적용될 수 있다. 또한 건설구조물의 기초는 탄성지반 위에 놓인 구조물로 고려할 수 있고 특히 건축구조물의 온통기초는 탄성지반에 놓여진 후판으로 고려될 수 있다.

탄성지반은 Winkler지반 모형과 Pasternak지반 모형 등으로 이상화하여 해석되고 있다. Winkler지반 모형은 지반을 여러 개의 수직 스프링으로 이상화 한 것이다. 이 경우 Winkler지반 위의 판이 거동하면 이를 지지하는 각각의 스프링은 서로 아무런 영향을 미치지 못하고 독립적으로 거동하게 된다. 그러나 실제 지반 거동은 연속적이므로 이러한 불연속성을 보완하기 위해 제안된 방법이 전단층을 추가 고려한 Pasternak지반 모형이다.

Pasternak 지반 모형의 전단층은 인접지반 사이의 거동을 연계시켜주는 역할을 한다.

1950년대 D. Young<sup>(1)</sup>, G. B. Warburton<sup>(2)</sup>에 의해 장방형 판의 진동해석이 이루어진 후 A. W. Leissa<sup>(3)</sup>에 의해 1973년 다양한 조건하에 장방형판의 자유진동이 해석되었고, 1976년 D. J. Gorman<sup>(4)</sup> 등은 지지조건이 다른 장방형판들에 대해 중첩법을 사용하여 자유진동 해석을 행하였다. 1980년대 들어 P. A. A. Laura<sup>(5)</sup> 등은 비균질지반상의 판의 진동에 대해, J. A. G. Horenberg<sup>(6)</sup> 등은 비균질지반상의 장방형판의 횡방향 진동에 대해 해석하였고 근래들어 Mecit Celik<sup>(7)</sup> 등은 Two-Parameter 지반상의 판을 해석하였다. 국내에서는 1999년 이용수<sup>(8)</sup> 등이 탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석을 하였고 이병구<sup>(9)</sup> 등은 Pasternak지반에 지지된 곡선보의 자유진동 해석에 대한 연구 결과를 발표하였다.

본 연구에서는 8절점 Serendipity 유한요소를 사용하고, 전단변형을 고려하여 장방형 후판의 진동 문제를 다룬다. 요소 강성 행렬을 얻는데 이용되는 수치적분은 전단강성 부분만 감차적분, 그 이외 강성행렬은 정상 적분을 사용하였으며 전체강성 행렬로 이루어지는 고유값문제를 풀므로써 후판의 모드형상 및 고유 진동수를 구하였다.

본 연구는 Pasternak지반에 놓여진 후판에 대해 해석하여 기초구조물의 공진현상을 억제 또는 방지할 수 있는 기초적 자료를 제공하는데 그 목적이 있다.

## 2. 판의 자유진동 해석

### 2.1 가상일의 원리

판요소의 운동 에너지  $T_e$ 와 변형 에너지  $U_e$ 를 구하고 각 요소의 운동에너지와 변형에너지를 조합하고 이들의 변분을 0으로 놓아 고유치 방정식을 얻을 수 있다. 이 고유치 방정식의 해가 판의 고유진동수가 되고, 이 고유 진동수에 대응하는 고유 벡터가 진동모드가 된다.

가상일의 원리에 의하여 다음 방정식이 얻어진다.

$$\delta ( T - U ) = 0 \quad (1)$$

여기서

$T$  : 판 전체요소의 운동에너지

$U$  : 판 전체요소의 변형에너지

### 2.2 판요소의 강성 행렬 및 질량 행렬

판요소의 운동에너지  $T_e$ 는 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho ( h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 ) dx dy \quad (2)$$

Winkler지반 강성과 전단지반 강성을 고려한 판요소의 변형에너지  $U_e$ 는 다음과 같다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [M]^T (\chi) dA + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T (\psi) dA + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA + \frac{1}{2} \int_A k_s \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \quad (3)$$

8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내 임의점의 좌표  $x$ ,  $y$  와 변위, 회전변위는 동일한 형상함수를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i x_i = [\bar{N}]\{x\}$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i y_i = [\bar{N}]\{y\}$$

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i w_i = [\bar{N}]\{w_e\}$$

$$\theta_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{xi} = [\bar{N}]\{\theta_{xe}\}$$

$$\theta_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{yi} = [\bar{N}]\{\theta_{ye}\} \quad (4)$$

여기서

$$[\bar{N}] = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

$$\{w_e\} = [w_1, w_2, \dots, w_8]^T$$

$$\{\theta_{xe}\} = [\theta_{x1}, \theta_{x2}, \dots, \theta_{x8}]^T$$

$$\{\theta_{ye}\} = [\theta_{y1}, \theta_{y2}, \dots, \theta_{y8}]^T$$

요소내의 임의의 위치에 대한 변위와 회전변위를 행렬형 태로 나타내면

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [M]\{\delta_e\} \quad (5)$$

여기서

$$\{\delta_e\} = [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \dots, w_8, \theta_{x8}, \theta_{y8}]^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

식(4) 및 (5)를 이용하여 식(2)를 정리하면 다음과 같이 된다.

$$T_e = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T \int_A \rho [M]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [M] dA \{\delta_e\} \\ = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [M_e] \{\delta_e\} \quad (6)$$

여기서

$$[M_e] = \int_A \rho [M]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [M] dA$$

식(4) 및 (5)를 식(3) 우변 첫째 항에 대입하면

$$\frac{1}{2} \int_A [M]^T(x) dA = \frac{1}{2} \int_A (x)^T [D_f]^T(x) dA \\ = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T \int_A [B_f]^T [D_f] [B_f] dA \{\delta_e\} \\ = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_{ef}] \{\delta_e\} \quad (7)$$

여기서

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = [B_{f1}, B_{f2}, \dots, B_{f8}]\{\delta_e\} = [B_f]\{\delta_e\}$$

$$[D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ef}] = \int_A [B_f]^T [D_f] [B_f] dA \quad (8)$$

식(4) 및 (5)를 식(3) 우변 둘째 항에 대입하면

$$\frac{1}{2} \int_A [Q]^T(\phi) dA = \frac{1}{2} \int_A (\phi)^T [D_s]^T(\phi) dA \\ = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T \int_A [B_s]^T [D_s] [B_s] dA \{\delta_e\} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_{es}] \{\delta_e\}$$

여기서

$$[B_{si}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\} = [B_{s1}, B_{s2}, \dots, B_{s8}]\{\delta_e\} = [B_s]\{\delta_e\}$$

$$[D_s] = \frac{Eh}{2(1+\nu)\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha = \frac{6}{5}$  : 전단 보정 계수

$$[K_{es}] = \int_A [B_s]^T [D_s] [B_s] dA \quad (10)$$

식(3) 우변 셋째 항도 마찬가지로 정리하면

$$\frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA = \frac{1}{2} \int_A k_w (w_e)^T [\bar{N}]^T [\bar{N}] (w_e) dA \\ = \frac{1}{2} (w_e)^T [W_{Fe}] (w_e)$$

여기서

$$[W_{Fe}] = \int_A k_w [\bar{N}]^T [\bar{N}] dA \quad (11)$$

식(3) 우변 넷째 항은

$$\frac{1}{2} \int_A k_e \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \\ = \frac{1}{2} (w_e)^T [ [S_{xe}] + [S_{ye}] ] (w_e) \\ = \frac{1}{2} \int_A k_e \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \quad (12)$$

여기서

$$[S_{xe}] = \int_A k_e \frac{\partial [\bar{N}]^T}{\partial x} \frac{\partial [\bar{N}]}{\partial x} dA$$

$$[S_{ye}] = \int_A k_e \frac{\partial [\bar{N}]^T}{\partial y} \frac{\partial [\bar{N}]}{\partial y} dA \quad (13)$$

식(7), (9), (11), (12)을 식(3)에 대입하면 변형에너지는 다음과 같이 된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [ [K_{ef}] + [K_{es}] ] \{\delta_e\} \\ + \frac{1}{2} (w_e)^T [ [W_{Fe}] + [S_{xe}] + [S_{ye}] ] (w_e) \\ = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_e] \{\delta_e\} + \frac{1}{2} (w_e)^T [K_{ef}] (w_e)$$

여기서

$$[K_e] = [K_{ef}] + [K_{es}]$$

$$[K_{ef}] = [W_{Fe}] + [S_{xe}] + [S_{ye}]$$

### 2.3 고유치 방정식

판 요소의 운동에너지와 변형에너지를 전체 판에 대한 것으로 조합하고 식(1)에 대입하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_E] - \omega^2 [K_M] = 0 \quad (14)$$

### 3. 유한요소법 적용

후판의 형상, 지지조건 등을 대칭으로 하여 후판의 1/4만을 모델링한다. 1/4판에 대해 요소 분할수 및 균질지반강성에 따른 후판의 고유진동수를 기존해와 비교한다. 본 해석 Program을 이용하여 비균질 Pasternak지반에 지지된 정방형 후판의 고진동수를 결정한다.

#### 3.1 유한요소법 적용 모델

Fig. 1과 같은 비균질탄성지반에 의해 지지된 단순지지 정방형 후판의 제반조건은 다음과 같다.

탄성계수 ( $E$ ):  $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

포아송비 ( $\nu$ ): 0.3

판 두께 ( $h$ ): 20cm

판의 크기 ( $\bar{a} \times \bar{b}$ ): 100cm  $\times$  100cm

비균질탄성지반의 크기  $u, v$ : 0.25m, 0.75m

$D$ : 판의 휨강성

$\bar{a} \times \bar{b}$ : 판의 길이  $\times$  판의 폭

무차원 Winkler지반 강성: ( $W_p$ )

( $W_p = \frac{k_w \bar{a}^4}{D}$ ): 0, 10,  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$

무차원 전단지반 강성: ( $S_p$ )

( $S_p = \frac{k_g \bar{a}^2}{D}$ ): 0, 5, 10

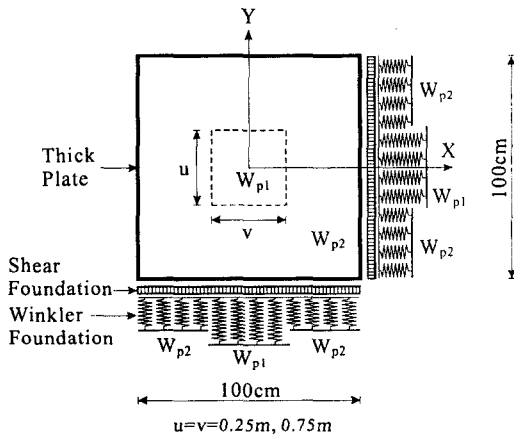


Fig.1 Foundation Modeling

#### 3.2 해석 프로그램의 신뢰성 검증

무차원 Winkler지반 강성  $W_p$ 와 무차원 전단지반 강성

$S_p$ 를 각각 변화시키며 기존 참고문헌(10)과 비교한다.

Table 1은 본 해석해와 참고문헌(10)의 해를 요소분할수에 따라 비교한 것이다. Winkler 지반과 전단지반의 변화에 대해 참고문헌(10)의 해와 비교한 결과 요소 분할수  $4 \times 4$ 에서 최대 0.083%의 오차를 보였다. Table 1에서 보듯이 Winkler 지반 강성( $W_p$ )의 크기가 커질수록 진동수도 커지며  $W_p=10^2$ 까지는 고유진동수 증가폭이 적었으나,  $W_p=10^2$ 보다 커지면서 급격한 증가를 보였다. 그리고 전단지반강성( $S_p$ )을 무시하는 경우인  $S_p=0$ 와  $S_p=10$ 인 경우를 비교하면 진동수가 무시 할 수 없을 정도로 증가하는 것으로 보아 Pasternak 지반에서 고려한 전단지반의 효과도 고유진동수의 변화에 큰 영향을 주는 것으로 보인다.

Table 1 Comparison of natural frequency versus present and Ref(10)  $\lambda^2 = \omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$

Discretization of plate	h (cm)	$W_p$	$S_p$	Analysis	Reference(10)		
4x4	20	0	0	17.43421	17.4486		
				17.70669	17.7208		
				19.99150	20.0042		
				35.49559	35.5028		
				98.56108	98.5331		
				22.20061	22.2117		
		10	10	22.41501	22.4261		
				24.25961	24.2698		
				38.05718	38.0638		
				99.47558	99.4473		
				10^2	10^2	10^3	10^4

#### 3.3 비균질 탄성지반에 의해 지지된 단순지지 정방형 후판의 고유진동수

Fig. 1과 같이 판의 중앙에서  $u, v$ 되는 영역과 바깥쪽 구역에 대해 Winkler지반 강성을 서로 다르게 적용함으로써 비균질 지반을 이상화하였다. 전단지반 강성은 판의 전체 구역에 일정한 값으로 하였다.

Table 2, 3은 각각  $u, v=0.25m, 0.75m$ 일 때  $W_{p1}$ ,  $W_{p2}$ ,  $S_p$ 값의 변화에 따른 고유진동수  $\lambda^2$ 의 값을 구한 것이다. 전단지반강성  $S_p$ 가 증가함에 따라 고유진동수  $\lambda^2$ 이 증가하고  $u, v$ 값이 증가함에 따라 고유진동수  $\lambda^2$ 이 감소함을 알 수 있다.

Fig. 2~4는  $W_{p1}=0 \sim 10^4$ 과  $u, v=0.25m, 0.75m$  및  $S_p=0, 5, 10$ 일 경우 각각에 대해  $W_{p2}$ 를  $0 \sim 10^4$ 로 변환시키며 고유진동수  $\lambda^2$ 를 구하여 그래프로 나타낸 것이다. 모든 그래프가  $W_{p2}=10^2$ 까지는  $\lambda^2=20$  전후값을 나타내

Table 2  $u = v = 0.25m$

$$\lambda^2 = \omega^2 a^2 \sqrt{\rho/D}$$

$W_P$		$S_P$		
$W_{P1}$	$W_{P2}$	0	5	10
0	0	17.43421	19.93261	22.20061
	10	17.70653	20.19861	22.41489
	$10^2$	19.99001	22.22720	24.25833
	$10^3$	35.48699	36.79068	38.04924
	$10^4$	98.52472	98.98843	99.43829
10	0	17.43438	19.96064	22.20073
	10	17.71178	20.20344	22.41911
	$10^2$	19.99014	22.22732	24.25845
	$10^3$	35.48708	36.79078	38.04932
	$10^4$	98.52777	98.98846	99.43826
$10^2$	0	17.43593	19.96199	22.20195
	10	17.70822	20.20009	22.41622
	$10^2$	19.99929	22.23535	24.26590
	$10^3$	35.48787	36.79148	38.04997
	$10^4$	98.52659	98.98613	99.43718
$10^3$	0	17.45111	19.97525	22.21387
	10	17.72318	20.21321	22.42804
	$10^2$	20.00479	22.24051	24.27053
	$10^3$	35.51794	36.82052	38.07817
	$10^4$	98.52787	98.98768	99.44086
$10^4$	0	17.57953	20.06868	22.31685
	10	17.84967	20.32533	22.53008
	$10^2$	20.11726	22.34274	24.36505
	$10^3$	35.56094	36.86243	38.11886
	$10^4$	98.74586	99.21556	99.66563

Table 3  $u = v = 0.75m$

$$\lambda^2 = \omega^2 a^2 \sqrt{\rho/D}$$

$W_P$		$S_P$		
$W_{P1}$	$W_{P2}$	0	5	10
0	0	17.43421	19.93261	22.20061
	10	17.63190	20.13324	22.35609
	$10^2$	19.31427	21.62210	23.70568
	$10^3$	31.17125	32.68209	34.12066
	$10^4$	64.48998	66.70028	68.72565
10	0	17.50969	20.02644	22.25988
	10	17.71178	20.20344	22.41911
	$10^2$	19.38359	21.68391	23.76204
	$10^3$	31.22167	32.72955	34.16549
	$10^4$	64.55041	66.75847	68.77892
$10^2$	0	18.16903	20.60570	22.78253
	10	18.35999	20.77411	22.93496
	$10^2$	19.99929	22.23535	24.26590
	$10^3$	31.66816	33.14972	34.56339
	$10^4$	65.09671	67.27378	69.26586
$10^3$	0	23.37149	25.34260	27.16645
	10	23.52802	25.48639	27.30013
	$10^2$	24.88902	26.74286	28.47242
	$10^3$	35.51794	36.82052	38.07817
	$10^4$	70.24614	72.13528	73.86925
$10^4$	0	41.27604	43.00080	44.61425
	10	41.38176	43.10150	44.71092
	$10^2$	42.31977	43.99783	45.57031
	$10^3$	50.72015	52.06251	53.37423
	$10^4$	98.74586	99.21556	99.66563

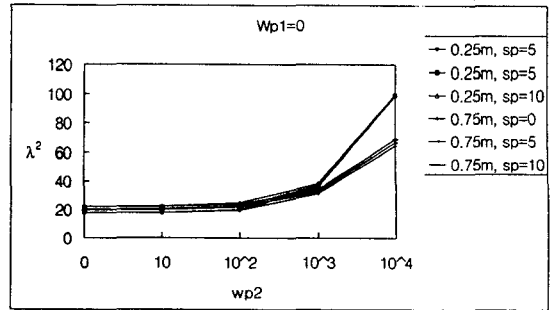


Fig.2 Variations of natural frequencies versus vibrations of foundation parameter(In case of  $W_{p1}=0$ )

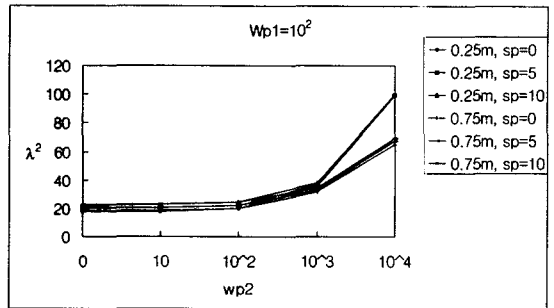


Fig.3 Variations of natural frequencies versus vibrations of foundation parameter(In case of  $W_{p1}=10^2$ )

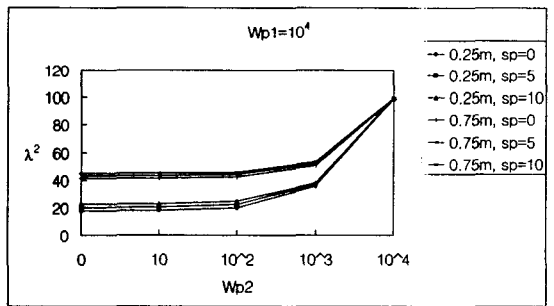


Fig.4 Variations of natural frequencies versus vibrations of foundation parameter(In case of  $W_{p1}=10^4$ )

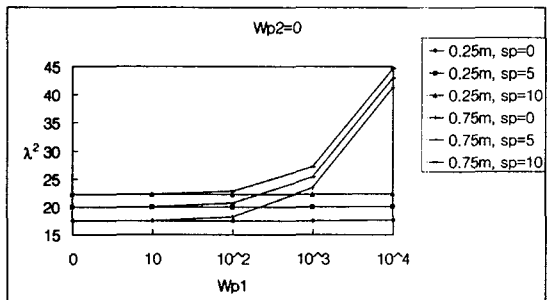


Fig.5 Variations of natural frequencies versus vibrations of foundation parameter(In case of  $W_{p2}=0$ )

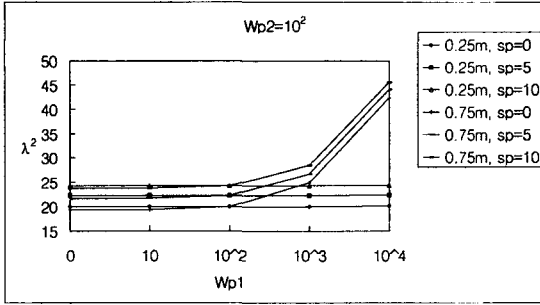


Fig.6 Variations of natural frequencies versus vibrations of foundation parameter(In case of  $Wp_2=10^2$ )

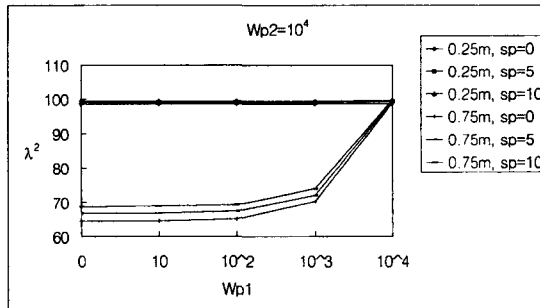


Fig.7 Variations of natural frequencies versus vibrations of foundation parameter(In case of  $Wp_2=10^4$ )

고 있으며  $Wp_2 = 10^3$  이상에서는  $Wp_2$  값이 커짐에 따라  $\lambda^2$ 의 값도 급격하게 커짐을 볼 수 있다. Fig. 4를 참조하면  $Wp_1 = Wp_2 = 10^4$ 인 경우로  $u, v$  나  $S_p$ 의 값에 관계없이  $\lambda^2$ 이 100 정도의 값을 갖는 것을 알 수 있으며 이것은  $Wp_1 = Wp_2 = 10^4$ 인 경우 Winkler 지반강성이 전단지반강성에 비해 상대적으로 커 전단지반강성의 크기가 고유진동수  $\lambda^2$ 에 영향을 미치지 못함을 의미하는 것으로 사료된다.

Fig. 5~7은  $Wp_1$ 의 변화에 따른 고유진동수  $\lambda^2$ 을 그래프로 나타낸 것이다. Fig. 5~7과 Table 2, 3을 참조하면  $Wp_2$ 가 일정하고  $u, v=0.25m$ 일 때 고유진동수  $\lambda^2$ 은  $Wp_1$  값에 관계없이 수평선으로 나타나 일정한 값이 됨을 알 수 있다.  $u, v=0.75m$ 일 경우 그래프는 Fig. 2~4와 유사한 양상을 보이거나 각 Fig.마다 고유진동수  $\lambda^2$ 의 값을 주지하면 고유진동수  $\lambda^2$ 값의 차이가 Fig. 2~4보다 Fig. 5~7이 상대적으로 적음을 알 수 있다.  $u, v=0.25m$ 인 경우  $Wp_1=0$ 일 때 고유진동수  $\lambda^2$ 은 17.43에서 99.44의 범위에 있으나  $Wp_2=0$ 일 때  $\lambda^2$ 은 17.43에서 22.31의 범위를 보이고  $Wp_1=10^4$ 일 때  $\lambda^2$ 은 17.58에서 99.67의 범위에 있으나  $Wp_2=10^4$ 일 때  $\lambda^2$ 은 64.49에서 99.67의 범위에 있다. 이것은 판 변두리의 Winkler 지반강성  $Wp_2$ 가 판의 중앙의 Winkler 지반강성  $Wp_1$ 보다 판의 고유진동수에 더 큰 영향을 미침을 의미하는 것으로 판단된다.

#### 4. 결론

비균질 Pasternak 지반에 놓여진 후판의 고유진동수를 구하기 위해 Winkler 지반을 비균질로 하고 전단지반을 고려한 Pasternak 지반에 대해 해석하였다. 해석시 8절점 Serendipity 요소계와 유한요소법을 이용하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 본 해석해의 신뢰성 확보를 위하여 수행한 요소 분할수에 따른 오차 범위는  $4 \times 4$ 에서 최대 0.083%의 오차를 보였다.
2. 판의 중앙부 보다 가장자리부분 Winkler 지반강성의 변화가 판의 고유진동수에 큰 영향을 준다.
3. 전단지반강성의 변화도 판의 고유진동수에 큰 영향을 미치므로 지반강성 고려시 전단지반강성을 무시할 수 없다.

#### 참고 문헌

- 0). D. Young, 1950, Vibration of rectangular plates by the riz method., J. appl. Mech.17, 448-453.
- 0). G. B. Warburton, 1953, The vibration of retangular plates, Proc. Institute of Mechanical Engineers, pp.371-384.
3. A. W. Leissa, 1969, Vibration of plates. NASA SP-160
4. D. J. Gorman, 1982, Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier, New York
5. P. A. A Laura and R. H. Gutierrez, 1984, Vibration of Plates Elastically Supported on a Non-Homogeneous Foundation, Journal of Sound Vibration, Vol95, No.4. pp.531~536.
6. J. A. G. Horenberg & J. G. M. Kerstens, 1985, Transverse Vibrations of Rectangular Plates on inhomogeneous foundations Part II: Modal Constraint Method, Computers and Structures, Vol(101), pp.317-324.
7. Mecit Celik, Ahmet Saygun, 1998, A Method for the Analysis of Plates on a Two-Parameter Foundation, Journal of Computer and Structures, vol(36), pp 2891-2915.
8. 이용수 등, 1999, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표 논문집, 제12권 통권 제23호, pp 35-42.
9. 이병구 등, 1998, "탄성지반 위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동". 전산구조공학. 제 11권 제 2 호.
10. Hirayoki Matsunaga, 1973, Vibration and Stability of Thick Pltes in Elastic Foundations. J. of Engineering Mechanics, pp.27-34.