

STFT, 고차위그너분포 및 웨이브렛 변환 기술을 이용한 탄성과 추적

An Analysis of the Wave Propagation of a Structure Based on STFT, Higher Order Time-Frequency Analysis and Wavelet Transform

이 상 권*

Sang-Kwon Lee

Key Words : STFT (Short Time Fourier Transform), Wigner Fourth Order Distribution, Wavelet Transform.

ABSTRACT

There has been a number methods for the presentation of time-frequency analysis of non-stationary signal. In this paper, STFT(short time Fourier transform), wavelet transform, Wigner distribution, and higher order Wigner distribution are discussed in details with simulation signals. They are also applied to the analysis of the wave propagation of a semi finite beam. Wigner distribution and higher order Wigner distribution have good time-frequency resolutions. Wavelet transform is required for impact analysis but should be applied carefully. STFT suffers from time-frequency resolutions. Each method is has its advantage and disadvantage depending on each application signals.

1. 서 론

신호에 대한 주파수 분석 기법으로 가장 많이 사용되는 기술은 푸리에 변환이다. 그러나 푸리에 변환은 정상적인 신호 (stationary signal) 에 대한 주파수 분석에 주로 사용하며, 비정상적인 신호 (nonstationary signal)에 대한 주파수 분석기법에는 오차를 수반한다. 특히 기계의 결함에 의해서 발생하는 신호는 비정상신호로서, 단순히 주파수성분만 표시하는 푸리에 변환으로서는 결함의 발생시기 및 그때의 주파수성분 분석을 통한 동특성을 이해하기가 어렵다. 이 경우에는 결함이 발생하는 순간에 주파수 분석을 할 수 있는 방법이 필요하다. 1946 년에 Gabor 는 시간-주파수 표현 방법을 처음으로 도입하였다. 유사한 시기에 스펙트로그램(spectrogram)이 Koenig 에 의해서 미국 음향학회에 소개되었다. 그러나 이 방법은 무한대의 신호를 사용하지 않고 짧은 창문 (window) 안의 신호를 사용하기 때문에 불확실성의 원리 (Uncertainty)의

지배를 받는다. 따라서 시간 분해능 (time resolution) 과 주파수 분해능 (frequency resolution)을 동시에 만족할 수가 없다. 이러한 제한된 어려움을 해결하기 위해서 빌 (Ville) 에 의해서 1948 년도에 새로운 시간-주파수분석 기법이 미국 전자공학회 신호처리 분과회에 소개되었다. 빌이 소개한 방법은 1932 년도에 위그너 (Wigner: 물리학자)가 발견한 방법에 기초를 두고 있으므로 이 후에 이 방법을 위그너-빌 분포 (Wigner-Ville distribution) 이라 불린다. 위그너-빌 방법의 결점은 이중선형 변환 (Bilinear transform)의 원리를 이용하므로 간섭항 (cross-term)이 존재하며 이것이 위그너-빌의 큰 결점이다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 많은 연구가 계속되어서 간섭항을 제거하는 커널 함수 (kernel function)을 이용하게 되는데 이러한 커널함수가 제작될 때마다 새로운 논문이 탄생하게 되었다. 이후 간섭항의 형태에 따라서 다양한 커널함수가 존재하는데 이것을 코헨 (Cohen)이 총 정리하여 일반화된 시간-주파수 기법을 제시하게 된다. 이러한 커널함수를 사용하면 간섭항은 제거되지만 필수적으로 시간-주파수 분해능이 떨어진다. 그러나 커널

* 정 회원: 인하대학교 기계공학과

함수에 따라서 시간-주파수 분해능을 조정 할 수가 있다. 따라서 스펙트로그램 보다는 매우 좋은 시간-주파수 분해능을 가진다. 그러나 시간-주파수 분해능을 증가시키기 위해서는 계산양이 너무 많아 계산시간이 증가한다. 간섭항의 문제를 제거하면서 시간-주파수 분해능을 주파수의 범위에 따라서 향상시키는 방법으로 최근에 각광을 받는 것이 웨이브렛 (Wavelet Transform) 기술이다. 웨이브렛은 1952년부터 수학자들에 의해서 오랜 기간 동안 연구되어 왔다. 이후 Morlet 이 1982 년도에 지질 탐사분야를 위해서 웨이브렛을 연구하면서 Grossman 과 함께 1984 상세한 연구결과를 출판했다. 이후에 이미지해석, 음성신호처리, 데이터 압축, 음향악기 등 다양한 분야에 적용하게 되었다. 이것은 주로 비 직교 (non-orthogonal), 연속 웨이브렛 (continuous wavelet)을 이용하였으며, 모 웨이브렛 (Mother wavelet)에 관한 연구이다. 이 방법은 1993 년에 Wang 와 Macfadden 등에 의해서 기어의 결함 진단에 대한 논문이 출판되면서 현재까지 기계의 결함진단에 많이 응용되고 있다. 이러한 연속 웨이브렛의 경우 주파수 분석을 연속적으로 가능하여 시간이 많이 소요된다. 통신신호의 경우 신호의 재생이 중요한데, 이 경우에는 신호에 대한 자세한 주파수 분석이 필요 없고 단지 재생만 가능하면 되므로 자세한 주파수 분석이 필요치 않는 이산 웨이브렛 (Discrete wavelet)이 1988 년도에 Daubechies 에 의해서 직교 모 웨이브렛 (orthogonal mother wavelet)이 소개되면서 연구에 대한 활기를 띠게 되었다. 기계분야는 이러한 직교 웨이브렛 분야의 하나인 하모닉 웨이브렛 (Harmonic Wavelet)을 1994 년도에 Newland 가 발견하여 ASME 에 소개함으로써 기계의 결함 진단에 응용하기 시작했다. 그러나 이산 웨이브렛의 경우는 결함이 발생 시 나타나는 고주파 에너지를 1/3 옥타브밴드로 주파수 분석을 시행하므로 주파수 분해능은 상당히 나쁘다. 그러나 시간 축에서 결함이 발생하는 충격의 존재 유무를 찾는 데는 유용하게 사용된다. 따라서 이산 웨이브렛과 연속 웨이브렛은 이용 시 상당한 주의가 요구된다. 또한 모 함수의 선택에 따라서 신호에 대한 필터링 모양이 달라지므로 필터링 하고자 하는 웨이브렛 필터의 모양도 고려하여 적용해야 한다. 이러한 부분에 대한 깊은 관계를 잘 알고 있다면 적용의 범위는 무궁무진하며 현재에도 적용에 대한 많은 논문이 출판되고 있다. 그러나 기본적으로 시간-주파수 분해능은 위그너 분포 보다는

좋은 양으므로 시간-주파수 분해능이 요구는 분야는 커널을 이용한 위그너 분포를 사용하는 것이 좋다. 본 연구에서는 보 (beam)에서의 탄성과 추적을 위해서 각종 시간-주파수 기법을 비교 분석 하여 새로운 개발된 고차 위그너분포를 이러한 탄성과 추적에 적용하고자 한다. 위그너 분포는 2 차 모멘트를 이용하지만, 고차 위그너 분포는 3 차, 4 차 등의 고차 모멘트를 이용한다. 본 연구는 4 차 모멘트를 이용한 고차 위그너 분포를 사용하여 비선형 및 비정상 신호인 탄성파를 추적을 표현하고자 한다.

2. STFT 변환

Gabo[1]의 방법을 수식적으로 표현하면 다음과 같다.

$$S_t(f) = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1)$$

이 식에서 Δt 는 푸리에 변환을 유도하는 짧은 구간이며 일반적으로 푸리에 변환을 위해서 사용되는 창문(Window)의 크기이다. Garbo 의 방법은 Koenig [2]가 발견한 STFT (Short Time Fourier Transform)의 기초가 되었다. STFT 의 수학적 표현은 다음과 같다 [3].

$$S(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau - t) s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2)$$

여기서 함수 $h(t)$ 는 창문함수 이다.

3. 웨이브렛변환 (Wavelet Transform)

웨이브렛 변환은 일반적인 충격파 신호가 가지고 있는 특성을 잘 표현하기 위해 사용되는 방법으로 창문의 사이즈를 조정하여 고주파에서는 시간 분해능을 증가시키고, 저주파에서는 주파수 분해능을 증가시킨다. 그러나 불확실성의 원리는 여전히 존재한다. 따라서 고주파에서는 주파수 분해능이 나빠지고, 저주파에서는 시간 분해능이 감소한다. 웨이브렛 변환에 대한 수학적 표현은 다음의 식과 같다.

$$CWT(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt = \int s(t) e^{-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 / \sigma^2} e^{j2\pi \frac{f_0}{a}(t-b)} dt \quad (3)$$

여기서 함수 $\Psi(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\psi(t) = A e^{-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 / \sigma^2} e^{j2\pi \frac{f_0}{a}(t-b)} \quad (4)$$

함수 $\Psi(t)$ 의 envelop 는 STFT 에서의 $h(t)$ 에 해당하며 $\Psi(t)$ 의 파형은 지수함수와 sine 함수를 곱한 것으로 나타나 웨이브렛을 형성한다. 일반적으로 $\Psi(t)$ 를 Mother Wavelet 이라 한다.

이 Mother wavelet 은 Scaling Factor a 와 Shift Factor b 에 의해서 조정된다. 이때 a 는 주파수와 역으로 관계가 있으며 b 는 시간축의 이동에 관계한다.

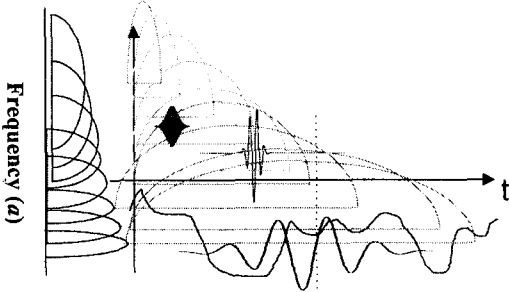


Fig.1 Wavelet Transform and its window

Fig.1 은 여러 단계의 a 값에 대한 창문 크기를 표현한 것으로 각 Mother Wavelet 이 위치하는 주파수에서 파형이 변화함을 보여준다.

4. 위그너분포(Wigner Distribution)

앞에서 논의된 푸리에 변환은 무한대 시간의 창문을 이용하며, STFT 그리고 웨이브렛 변환은 주어진 짧은 구간의 창문을 이용하였다. 백색 잡음 속에 충격파 신호가 묻혀 있다면 푸리에 변환을 통하여 이 충격파 신호에 포함된 주파수 성분을 명확히 찾아내기는 어렵다. 이 경우에 주로 사용되는 방법으로 자기상관함수(auto correlation)의 푸리에 변환이다. 신호 s(t)의 자기상관함수의 푸리에 변환을 주파수 스펙트라 (frequency spectra)라 불린다. 유사하게 비 정상상태의 충격파 신호가 백색 잡음 속에 숨겨져 있다면, 이 신호 s(t)에 대한 순간자기 상관 함수 (instantaneous auto correlation)의 푸리에 변환을 이용한다면, 비 정상상태의 충격파 신호도 보다 명확히 찾을 수 있다. 이것을 수학적으로 표현하면 다음 식과 같다.

$$W(t, f) = \int s(t - \tau/2) s^*(t + \tau/2) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (5a)$$

$$= \int S(f - \nu/2) S^*(f + \nu/2) e^{-2\pi j \nu t} d\nu \quad (5b)$$

이 관계식을 위그너분포(Wigner distribution)라 불린다. 이 방법을 전자신호처리학회에 빌(Vill)이 소개함으로써 위그너-빌 분포의 함수가 널리 사용하게 되었다 [4]. 여기에 사용되는 창문은 일반 푸리에 변환과 같이 무한대 시간이다. 그러나 실제로 컴퓨터를 이용하여 위그너 분포를 구하려면 무한대의 창문을 사용할 수 없으므로 STFT 처럼 짧은 구간의 창문을 이용한다. 이러한

창문 h(t)을 이용한 위그너 분포를 가상 위그너분포 (pseudo Wigner distribution)이라 불린다. 따라서 가상 위그너 분포는 다음과 같이 표현된다.

$$W_{pw}(t, f) = \int_{-T_w}^{T_w} s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2}) h(\frac{\tau}{2}) h^*(-\frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (6)$$

여기서 T_w 가 창문의 크기이다. 이 경우에 시간 분해능은 창문의 이동이, STFT 혹은 웨이브렛 변환처럼 창문 크기 또는 시간이동 factor b 만큼 이동하지 않고, 연속적으로 모든 데이터에 대해서 이루어지므로 시간 분해능이 완벽하다. 그러나 주파수분해능은 창문의 크기에 따라서 영향을 받는다. 그러나 창문의 크기는 충분히 신호에 따라서 조정이 가능하므로 주파수 분해능도 충분히 증가시킬 수 있다. 따라서 이 방법의 경우 창문의 크기만 증가하면 시간-주파수 분해능이 동시에 증가하므로 비 정상상태의 신호를 보다 정확히 표현할 수 있다. 그러나 이 방법의 문제는 신호 s(t)에 대한 변환이 아니고 s(t)의 곱으로 나타나는 자기상관 함수의 변환을 이용하므로, 만약 신호 s(t) 가 두 개의 신호 (예제: 두 개 이상의 sine 신호 혹은 두 개 이상의 충격파) 향으로 이루어져 있다면 간섭항(cross)이 나타난다. 이러한 간섭항은 원래 신호에 대한 혼선을 불러일으킨다. 이러한 혼선을 방지하기 위해서 간섭항을 제거하기 위한 Kernel 이 필요하다[5]. Kernel 은 신호의 형태에 따라서 다양한 형상을 가진다. 따라서 Kernel 을 이용한 위그너 분포를 Cohen 이 처음 발견하였으므로 일반적으로 Cohen 분류의 이중선형변환 (Bilinear Time Frequency Transform) 이라 불린다 [6]. 이것의 수학적 표현은 다음과 같다.

$$C(t, f) = \iint W(t', f') \Phi(f' - f, t' - t) dt' df' \quad (7)$$

여기서 $\Phi(\xi, \tau)$ 를 Kernel 함수라 불린다. 결론적으로 위그너 분포를 이용한 비정상상태의 신호를 성공적으로 완성하려면 이 Kernel 함수의 바른 선택과 새로운 Kernel 함수의 설계에 달려있다.

Kernel 함수의 설계는 Ambiguity 영역에서 완성된다. Ambiguity 영역은 위그너 분포의 이중역 푸리에 변환을 통하여 이루어진다. 이것을 도식적으로 표현하면 Fig.2 와 같다. Fig.2 에서 위그너 분포의 영역을 $W(t, f)$ 라 표현하면, Ambiguity 영역은 $A(\xi, \tau)$ 로 표현된다. 그리고 $R(t, \tau)$ 는 자기 상관 함수이다. Kernel 설계방법으로서 먼저 신호에 대한 위그너 분포를 구하면 많은 간섭항이 나타난다. 이러한 간섭항을 제거하기 위해서는 위그너 분포를 이중역 푸리에 변환을 시도하여 신호에 대한

Ambiguity 함수를 구한다. Ambiguity 함수의 특징은 간섭항은 원점을 기준으로 떨어져 있으며 원래 신호항들은 원점의 주변에 모여서 큰 값들을 이룬다. 이러한 이유는 위그너 분포상에서 간섭항들은 원래 sine 성분을 가진 파형이지만 신호항들은 DC 값을 가진 성분들이다. 따라서 Ambiguity 함수는 이들의 푸리에 변환이므로 원점에 DC 성분들이 모이고 원점에서 벗어나면 간섭항이 된다. 여기에 신호항만을 강조하기 위해서 Kernel 을 곱하면 간섭항은 축소되고 신호항만은 증가한다. 신호항을 강조하기 위한 Kernel 은 매우 다양한데 Fig.3 은 Exponential Kernel 로서 원점에서 1 을 가지고 지수함수로 2 차원적으로 감소하는 함수가 된다. 이 kernel 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi(\xi, \tau) = e^{-\xi^2 \tau^2 / \sigma} \quad (8)$$

Ambiguity 함수에 Kernel 이 곱해진 함수를 Weighted Ambiguity 함수라 불리면 이것을 다시 이중 푸리에 변환을 하면 Weighted 위그너 분포가 된다.

5. 고차시간-주파수해석 (Higher Order Time Frequency Analysis)

2차 모멘트를 이용한 위그너 분포를 표현하는 방법은 식5(a),(b)로 표현되었다. 식5(a)(b)에 대한 위그너 분포는 4차 모멘트를 이용한 4차 위그너분포가 되며, 식9(a),(b)로 표현된다 [7].

$$SSW_f(t, f) = \frac{1}{2} \int h(t)C(f, t-\tau)C(f, t+\tau)d\tau \quad (9a)$$

$$SSW_t(t, f) = \frac{1}{2} \int H(f)C(t, f-v)C(t, f+v)dv \quad (9b)$$

여기서 2차 모멘트에 대한 간섭항이 있듯이 4차 모멘트에 의한 간섭항이 여전히 존재한다. 이러한 문제는 식9(a),(b)에 새로운 창문함수 h(t)와 H(f)를 이용하여 제거할 수가 있다. 이 두 함수는 새로운 커널을 형성하지만 기본적으로 일반적인 커널과 다르다. 이러한 이유는 고차에서 나타나는 간섭항은 DC성분을 갖는 간섭항이므로 일반적인 방법의 커널에 대한 설계로서는 곤란하다. 본 연구에서는 이러한 새로운 커널을 설계하여 고차 위그너 분포에 적용하였다.

6. 시뮬레이션 신호에 대한 기법의 응용

시간-주파수 해석의 각 기법에 대한 이해를 위해서 2개의 chirp 신호를 이용하여 각 기법을 적용하고자 한다. Fig. 4는 시뮬레이션 신호에 대한 STFT이다. Fig.5의 경우는 웨이브렛을 이용한 경

우이다. 또한 Fig.6은 Exponential Kernel을 이용한 위그너 분포 이다. 마지막으로 고차위그너 분포를 이용한 것은 Fig. 7이다. 이들의 결과를 비교하면 Fig. 5의 경우 웨이브렛의 경우 STFT 보다 고주파에서 주파수 분해능이 부족하여 두개의 chip신호를 뚜렷이 분리하기가 어렵다. 그러나 고차 위그너 분포는 분리가 STFT 및 위그너분포보다. 시간-주파수 분해능이 우수함을 알 수가 이다. 따라서 웨이브렛의 경우는 고차 주파수 분석이 중요하지 않은 충격과의 탐지에 유리하며 정교한 주파수 분해능이 요구되는 신호의 탐지에는 주의해서 사용해야 한다.

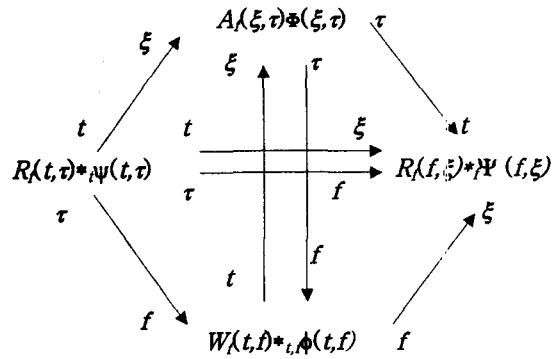


Fig.2 Relation between ambiguity function and Wigner distribution

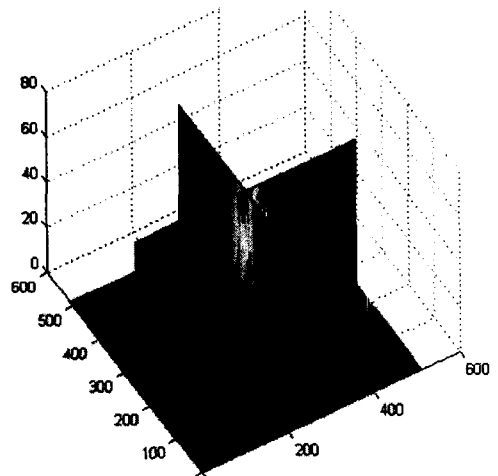


Fig.3 Exponential Function Kernel for the smoothing of cross-terms

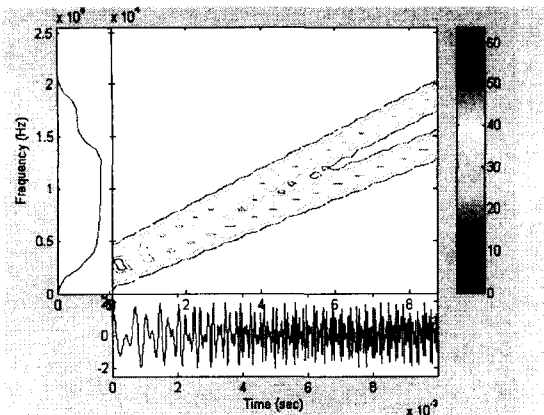


Fig. 4 Short Time Fourier Transform for two chips signals

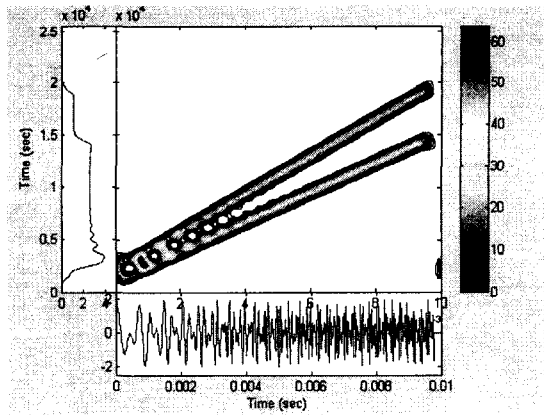


Fig. 7 Combined Wigner fourth order distribution smoothed by a new kernel for two chips signals

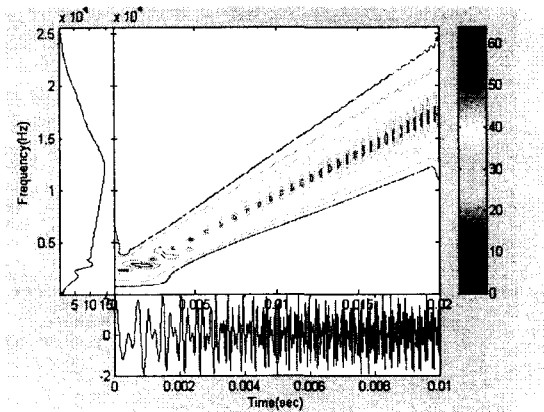


Fig. 5 Wavelet Transform for two chips signals

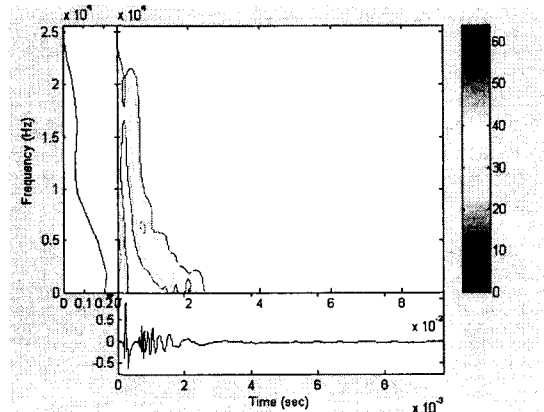


Fig. 8 Short Time Fourier Transform for the wave propagation of a semi finite beam

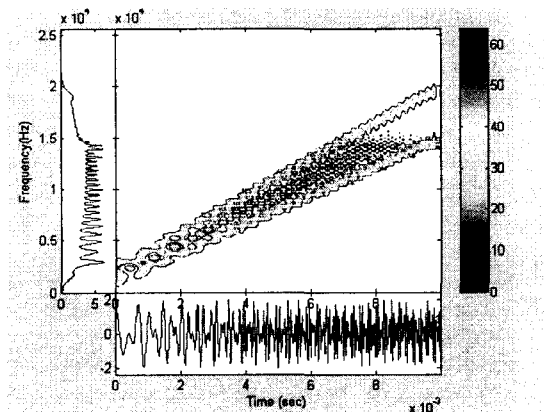


Fig. 6 Wigner Distribution smoothed by an exponential kernel for two chips signals

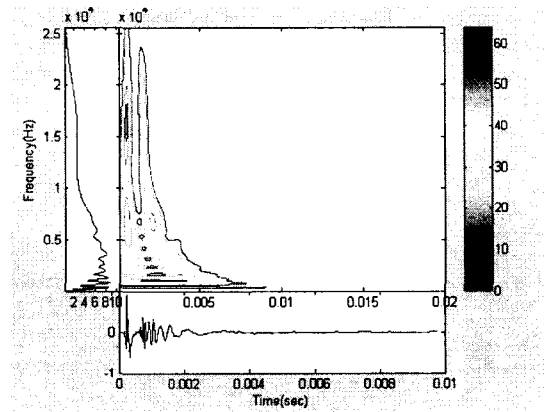


Fig. 9 Wavelet Transform for the wave propagation of a semi finite beam

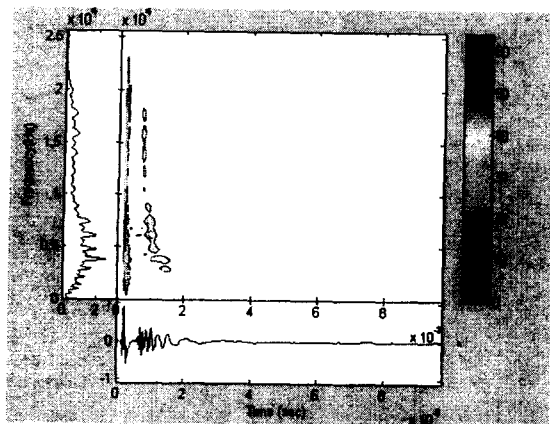


Fig. 10 Wigner Distribution smoothed by an exponential kernel for the wave propagation of a semi finite beam

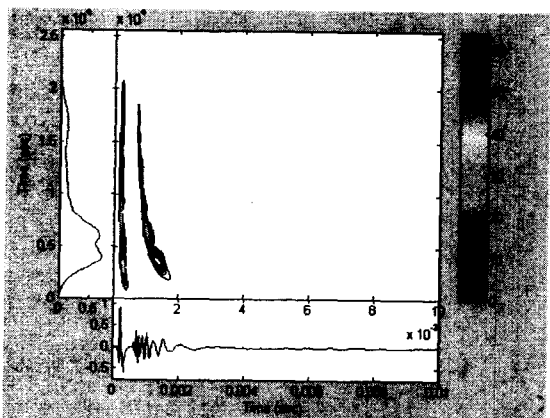


Fig. 11 Combined Wigner fourth order distribution smoothed by a new kernel for the wave propagation of a semi finite beam

7. 보 (beam)에 대한 탄성과 추적

보에 대한 탄성과 진행을 이해하기 위해서 간단한 보에 대해서 한쪽은 모래를 이용하여 반사파의 영향을 제거하고 다른 한 쪽에서는 가진 하여 일정한 가속도를 측정하여 굽힘파의 진동을 측정하여 굽힘파의 파동을 측정하였다 [8]. 측정된 가속도 신호는 굽힘파 임으로 굽힘파는 일반적으로 주파수에 따라서 전파 속도가 다르므로 일반적으로 비선형으로 진행된다. 이러한 탄성파에 대하여 여러 가지 시간 주파수를 측정 한 결과는 Fig.9 ~ Fig.11에 나타나 있다. 이 결과에서 보면 STFT의

경우는 충격파가 발생하는 시점은 시간 주파수 분해능의 불확실성 원리로 발생시점을 정확히 탐지하기가 어렵다. 웨이브렛의 경우는 고주파에서는 시간 분해능이 우수하지만 저주파에서는 시간 분해능이 불리하여 두개의 충격파에 대한 분리가 어렵다. 지수함수의 커널을 가진 위그너 분포는 두 가지 방법 보다 유리하다. 동일 신호에 대한 고차 위그너 분포는 커널의 다른 방법보다 시간-주파수 분해능이 우수함을 알 수가 있다.

8. 결론

- (1) 본 연구는 STFT, Wigner Distribution, Wavelet Transform 및 Higher Order Wigner Distribution 에 대하여 연구하였다.
- (2) 시뮬레이션 신호에 대하여 분석 결과 Higher Order Wigner Distribution 이 시간-주파수 분해능을 향상 시키는 장점이 있다.
- (3) 보에 대한 탄성파 전파를 분석하기 위해서도 Higher Order Wigner Distribution 이 시간-주파수 기법이 유리하다. 그러나 계산 시간이 많이 소요된다.
- (4) 웨이브렛의 경우는 시간-주파수 분해능을 고려해서 적용해야 한다.

후 기

본 연구는 과학기술부의 원자력연구개발사업비의 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

- [1] Gabor, D. Theory of communication , Journal of IEE, Vol.93, p429-457, 1946
- [2] Kodera, K. Analysis of time-varying signals with small BT value , IEEE Tran., ASSP, Vol.26, No.1, p64-76, 1978
- [3] Koenig, R. The sound spectrogram , J. Acoust. Soc. Am., Vol.18, p19-46, 1946
- [4] Ville, J. Theori et application dela notion de signal and analytique , Cables et Transmissions, Vol. 2A, No.1, p61-74, 1948
- [5] Hammond, J. K. and White, P. R. The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods , Journal of Sound and Vibration, Vol.190, No.3, p419-447, 1996
- [6] Cohen, L. , L.Time-frequency analysis , Prentice Hall, 1995
- [7] Kronland. R. and Morlet, J., Analysis of Sound Through Wavelet Transforms , International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Vol.1, pp.273-302, 1987.
- [8] T Onsays ans A. G. Haddow, Wavelet transform analysis of transient wave propagation in a dispersive medium, 1994.