

# 끝단질량을 갖는 송수관의 고유치 분기와 플러터 모드

## Eigenvalue Branches and Flutter Modes of Pipes with a Tip Mass Conveying Fluid

류봉조\* · 류시웅\*\* · 杉山吉彦\*\*\* · 임경빈\*\*\*\*

B. J. Ryu, S. U. Ryu, Y. Sugiyama and K. B. Yim

**Key Words :** Follower Force(종동력), Tip Mass(끝단질량), Pipe Conveying Fluid (유체 이송 송수관), Branch(분기), Flutter (플러터), Quasi Mode(준 모드)

### ABSTRACT

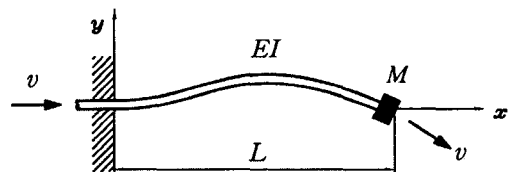
The paper deals with the relationship between the eigenvalue branches and the corresponding flutter modes of cantilevered pipes with a tip mass conveying fluid. Governing equations of motion are derived by extended Hamilton's principle, and the numerical scheme using finite element method is applied to obtain the discretized equations. The order of branches and unstable modes associated with flutter are defined in the stability maps of mass ratios of the pipe and the critical flow velocity. As a result, the relationship between the flutter related to the eigenvalue branches and the flutter modes are investigated thoroughly.

### 1. 서 론

외팔 송수관은 자유단으로부터 분출되는 유체 모멘텀의 반작용으로서의 추력을 받는다. 이 추력은 작용력의 방향이 송수관의 변형방향에 접선방향이고, 구조계의 변화에 따라 변화하는 것으로서 종동력으로 일컬어진다. 이 종동력은 역학적으로 비 보존력이며 이러한 비 보존력이 작용하는 계는 비 보존력의 크기가 어떤 임계하중을 넘어서게 되면 플러터(동적 불안정)에 의해 안정성을 잃게 될 수 있다. 이러한 비 보존력이 작용하는 계의 동적 안정성에 관한 연구는 지금까지 많이 이루어져 왔다<sup>(1)</sup>. 특히, 외팔 송수관의 동적 안정성에 관한 문제는 실험실 규모에서도 간단한 실험이 가능하므로 실험적 연구도 많이 행하여져 왔다<sup>(2)</sup>. 그러나 지금까지의 대부분의 연구들은 이론적인 연구만이 아니라 실험적 연구에 있어서도 안정과 불안정을 경계짓는 임계유속 값의 산출에만 국한되어 왔다. 실제로 불안정일 때의 송수관의 모드 형상은 불안정 메커니즘을 상세히 이해하기 위해서 뿐만 아니라 불안정 진동을 제어하기 위해서라도 보다 세밀히 조사할 필요가 있다. 본 연구에서는 끝단질량을 갖는 외팔송수

관의 고유치 분기와 불안정 모드에 대해 저자들의 이전의 연구<sup>(3)</sup>를 확장하여 연구하였다.

### 2. 이론해석



**Fig. 1** Mathematical model of a cantilevered pipe with a tip mass conveying fluid.

관 끝단질량을 갖고 내부 유동유체를 갖는 송수관의 수학적 모델은 Fig. 1과 같다. Fig. 1에서  $L$ 은 보의 길이,  $EI$ 는 송수관의 굽힘강성,  $M$ 은 끝단질량,  $v$ 는 유속을 나타낸다.

#### 2.1 확장된 해밀톤 원리에 의한 정식화

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식을 얻기위해 확장된 해밀톤 원리를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{id} + \delta W_{nc}) dt = 0. \quad (1)$$

\* 정희원, 한밭대학교 기계공학부

E-mail : [bjryu701@hanbat.ac.kr](mailto:bjryu701@hanbat.ac.kr)

Tel : (042)821-1159, Fax: (042)821-1587

\*\* 대관부립대학 대학원

\*\*\* 대관부립대학

\*\*\*\* 동양공업대학 기계과

여기서,  $T$ 는 운동에너지,  $W_c$ 는 유체력의 보존 성분에 의한 일,  $U$ 는 탄성포텐셜 에너지,  $\delta W_{id}$ 는 내부감쇠에 의한 가상 일, 그리고  $\delta W_{nc}$ 는 비 보존성분에 의한 가상일을 나타낸다.

$$T = \int_0^L \left[ \frac{m_p}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{m_p}{2} \left\{ v^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] dx + \left[ \frac{M}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]_{x=L} \quad (2)$$

$$W_c = \int_0^L \frac{m_f}{2} v^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

$$\delta W_{id} = - \int_0^L E^* I \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = - m_f v \left( \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L} \delta y \quad (6)$$

식 (2)에서 (6)을 식 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ (m_p + m_f) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + m_f v \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - E^* I \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m_f v \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) + m_f v^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) - EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ M \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - m_f v \left( \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + v \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right)_{x=L} \delta y \right] dt = 0 \quad (7)$$

이제 계산상의 편의를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌표와 파라미터들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}, \quad \mu = \frac{M}{(m_f + m_p)L}, \quad \beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}, \quad \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}, \quad u = vL \sqrt{\frac{m_f}{EI}} \quad (8)$$

식 (8)의 무차원 파라미터를 식 (7)에 대입하면

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \left[ \eta_\tau \delta \eta_\tau + \beta \frac{1}{2} u (\eta_\tau \delta \eta_\xi + \eta_\xi \delta \eta_\tau) + u^2 \eta_\xi \delta \eta_\xi - \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} - \gamma \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} \right] d\xi d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \mu \eta_\tau \delta \eta_\tau - \beta \frac{1}{2} u \eta_\tau \delta \eta - u^2 \eta_\xi \delta \eta \right]_{\xi=1} d\tau = 0 \quad (9)$$

## 2.2 유한요소법의 적용

식 (8)의 수치 해를 얻기 위해 유한요소법을 이용하며, 의

팔 송수관을  $N$ 개의 균일한 요소로 분할한 그림은 Fig. 2와 같다.

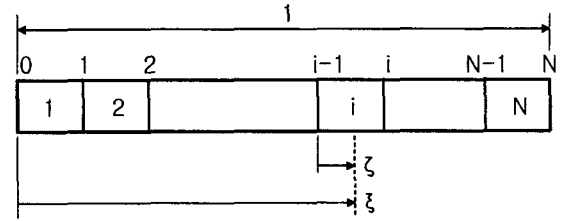


Fig. 2 Finite element model of the pipe.

Fig. 2의 국부좌표 ( $\zeta = N\xi - i + 1$ ;  $0 \leq \zeta \leq 1$ )를 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻게 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^1 \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} + \beta \frac{1}{2} u N (\eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} + u^2 N^2 \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} - N^4 \eta_{\xi\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)} - \gamma N^4 \eta_{\xi\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)}) d\zeta + \{\mu \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} - \beta \frac{1}{2} u n \eta_\tau^{(N)} \delta \eta^{(N)} - u^2 N^2 \eta_\xi^{(N)} \delta \eta^{(N)}\}_{\xi=1} \right\} d\tau = 0 \quad (10)$$

이제 변위함수  $\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \{e^{i(\zeta)}\} \cdot \{v^{(i)}(\tau)\}$ 를 도입하여 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 특성 방정식을 얻는다.

$$[M]\{v_\tau\} + [C]\{v_\tau\} + [K]\{v\} = \{0\} \quad (11)$$

## 2.3 고유치 문제

식 (11)에 있어서 변위벡터  $\{v(\tau)\}$ 를 다음과 같이

$$\{v(\tau)\} = \{X\} \exp(\lambda \tau) \quad (12)$$

가정하면 식 (11)은 식 (13)의 표준 고유치문제로 귀착된다.

$$\lambda [I]\{Z\} = [A]\{Z\} \quad (13)$$

여기서,  $\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{W\} \end{Bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} \{0\} & \{I\} \\ \{-M^{-1}K\} & \{-M^{-1}C\} \end{bmatrix}$ .

계의 안정성은 특성근 ( $\lambda = \sigma \pm i\omega$ )의 실수부분인  $\sigma$ 의 부호에 의해 판별된다. 즉,  $\sigma > 0$ 일 때, 계는 불안정하게 되고,  $\sigma < 0$ 일 때 계는 안정하게 된다. 따라서,  $\sigma = 0$ 일 때 계의 안정과 불안정의 경계가 되는 임계조건으로 이 때의 유속이 임계 유속 ( $u_{cr}$ )이 된다.

## 2.4 불안정 모드형상

플러터가 발생하는 임계유속 ( $u_{cr} = u_*$ )에서 고유벡터  $\{X\}$

에 의해서 다음 식의 횡방향의 변위  $\{V(t)\}$  를 계산하면 각 모드에 대한 모드형상을 얻을 수 있다.

$$\{V(t)\} = \{X_i\} \cos(\omega_* t + \phi_i), \quad (14)$$

여기서, 위상각  $\phi_i$  는 다음과 같다.

$$\tan \phi_i = \text{Im}\{X_i\} / \text{Re}\{X_i\}. \quad (15)$$

### 3. 해석결과 및 고찰

#### 3.1 고유치 분기

Fig. 3은 질량 파라미터  $\beta$ 가 0.366일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 2차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수축을 가로질러 플러터가 발생한다. 이 때의 임계유속 값은  $u_{cr}$ 은 6.35이다.

Fig. 4는  $\beta$ 가 0.367일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 이 그룹에서 3차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수축을 가로질러 플러터가 발생하고 임계유속은 7.22로 급격히 증가하는 것을 알 수 있다. Fig. 5는  $\beta$ 가 0.830일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 4차 고유치 분기에서 플러터가 발생하며,  $\beta$ 값을 조금 증가시킨 고유치 곡선 Fig. 6에서는 3차 고유치 분기에서 플러터가 발생한다. 이제 불안정에 관계하는 고유치 분기에 대해 상세히 관찰하기 위해 Fig. 7에서는  $\beta$ 가 0.830인 Fig. 5의 점선부분과  $\beta$ 가 0.832, 0.835, 0.836일 때의 분기계적을 확대하여 나타내었다. 4차 분기와 3차 분기가 유착하고 전환이 발생하여  $\beta$ 가 0.836에서는 3차 분기에서 플러터가 발생하는 것을 알 수 있다.

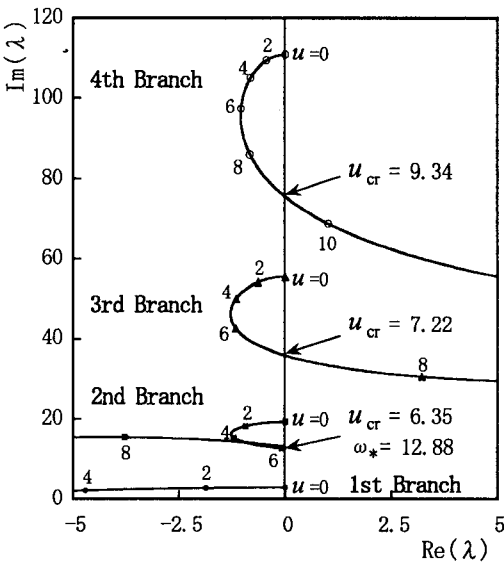


Fig. 3 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta = 0.366$ .

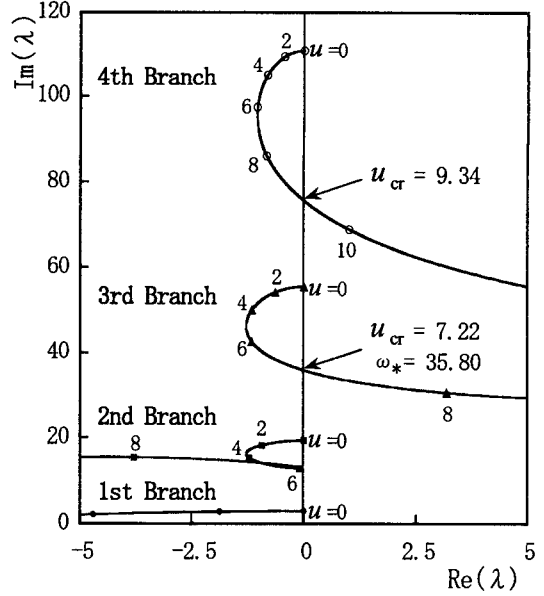


Fig. 4 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta = 0.367$ .

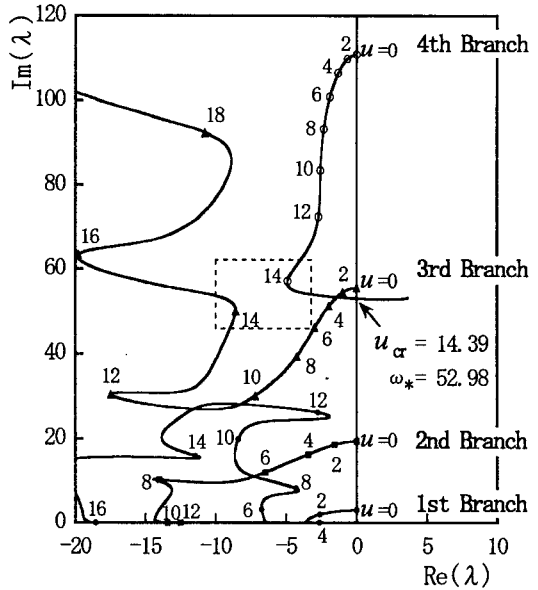


Fig. 5 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta = 0.830$ .

#### 3.2 불안정 모드형상

Fig. 8은 불안정에 관계하는 진동 모드 형상을 나타낸 그림으로 각각 1/12의 주기로 최대 진폭이 파이프 전체길이의 1/10

에 해당된다. Fig. 8(a)는  $\beta$ 가 0.366일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 하나의 이동절점(moving node)을 가지며 준(quasi) 2차 모드 형이다. Fig. 3에서 플러터에 관계하는 고유치 분기도 2차 분기로 일치한다. Fig. 8(b)는  $\beta$ 가 0.367일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 두개의 이동절점을 가진 준 3차 모드 형이고 플러터에 관계하는 고유치 분기도 Fig. 4에서 알 수 있듯이 3차 분기로 일치한다. Fig. 8(c)는  $\beta$ 가 0.830일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 3개의 이동절점을 가진 준 4차 모드형이다. Fig. 5에서 플러터에 관계하는 고유치 분기도 4차 분기로 일치한다. Fig. 8(d)는  $\beta$ 가 0.836일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 Fig. 8(c)와 마찬가지로 3개의 이동절점을 가진 준 4차 모드 형임을 알 수 있다.

그러나 플러터에 관계하는 고유치 분기는 Fig. 6과 Fig. 7에서 고찰해 본 것처럼 두개의 고유치 분기가 유착과 전환에 의해 3차 분기에서 플러터가 발생한다.

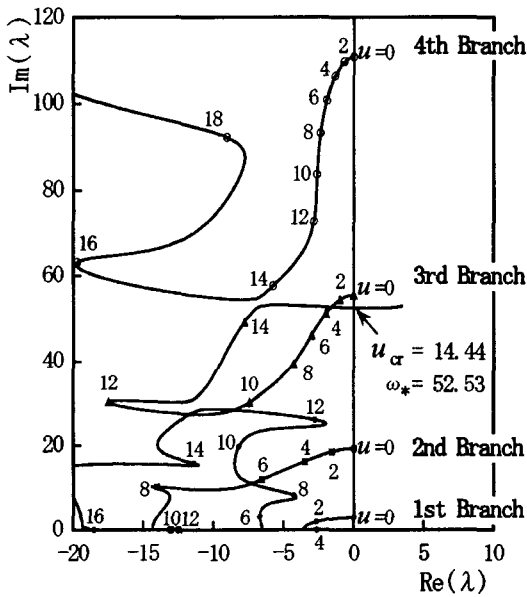


Fig. 6 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta = 0.836$ .

### 3.3 질량비와 임계유속

Fig. 9의 끝단질량비  $\mu = 0.1$ 에서는 무차원 임계유속과 질량비 곡선에 있어서 플러터에 관계하는 고유치 분기의 차수와 불안정일 때의 진동 모드와의 관계를 상세히 나타내었다.  $0 < \beta \leq 0.366$ 에서는 2차 분기에서 플러터가 발생하고,  $0.367 < \beta \leq 0.704$ 에서는 3차 분기에서 플러터가 발생한다. 또한,  $0.705 < \beta \leq 0.835$ 에서는 4차 분기에서 플러터가 발생하고, 4차 분기에서 3차 분기로 전환되어  $0.836 < \beta \leq 0.839$ 에서는 3차 분기에서 플러터가 발생한다.

한편, 3차 분기에서 1차 분기로 전환되어  $0.840 \leq \beta < 1$ 에서는 1차 분기에서 플러터가 발생한다. 그러나 Fig. 10의  $\mu=0.2$ 에서는 불안정이 발생하는 분기와 진동모드의 차수가 질량비  $\beta$ 의 변화영역 내에서 일치함을 알 수 있다.

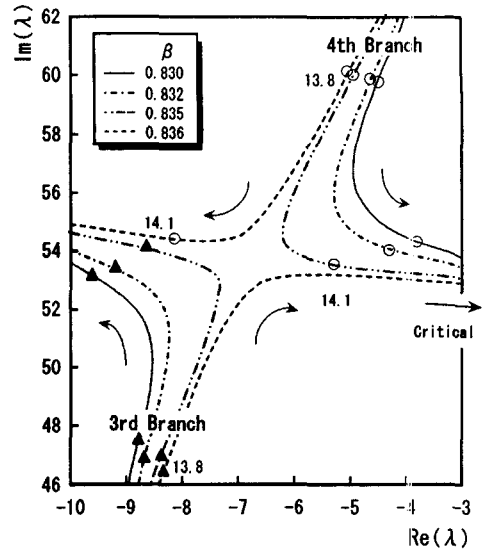
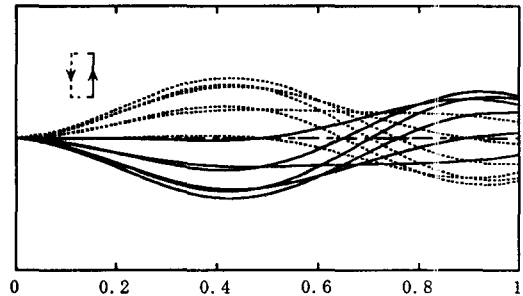
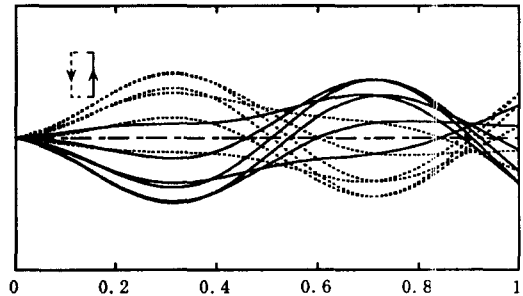


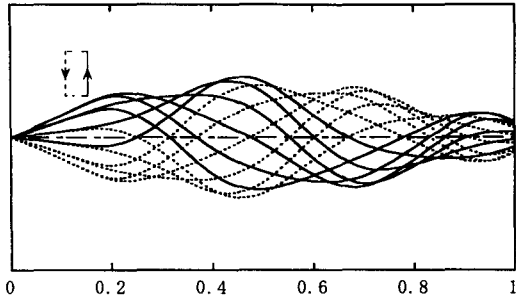
Fig. 7 Transfer of instability branch from the fourth to the third branch.



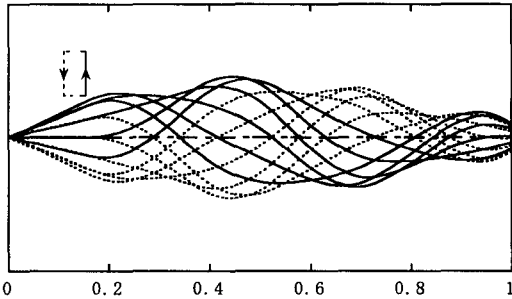
(a)  $\beta = 0.366$



(b)  $\beta = 0.367$



(c)  $\beta = 0.830$



(d)  $\beta = 0.836$

Fig. 8 Unstable mode configurations

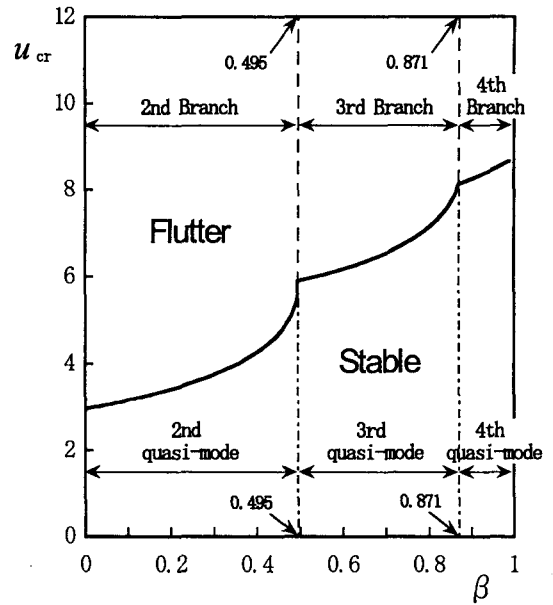


Fig.10 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu = 0.2$ .

#### 4. 결론

본 연구에서는 끝단질량을 갖고 내부 유동유체에 의한 외팔 송수관의 플러터에 관계하는 고유치 분기와 불안정 모드에 대하여 상세하게 고찰하였다. 집중질량이 없는 이전의 연구<sup>(3)</sup>와 끝단 질량비  $\mu$ 가  $\mu=0.1$ 인 경우는 플러터가 발생하는 고유치 분기와 불안정 모드의 차수와의 관계가 일치하지 않는 경우도 있으나, 끝단질량비  $\mu$ 가 0.1보다 큰 Fig. 10에서는 플러터에 관계하는 고유치 분기가 유착과 전환이 발생하지 않기 때문에 플러터가 발생하는 고유치 분기와 불안정 모드의 차수가 일치한다.

#### 참고문헌

- (1) M. A. Langthjem and Y. Sugiyama, 2000, "Dynamic stability of columns subjected to follower loads: A survey", Journal of Sound and Vibration, Vol. 238, pp.809~851.
- (2) M. P. Padoussis, 1998, "Fluid-Structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow", Vol. 1, Academic Press.
- (3) S. U. Ryu, Y. Sugiyama and B. J. Ryu, 2002, "Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Computers and Structures, Vol. 80, pp.1231~1241.

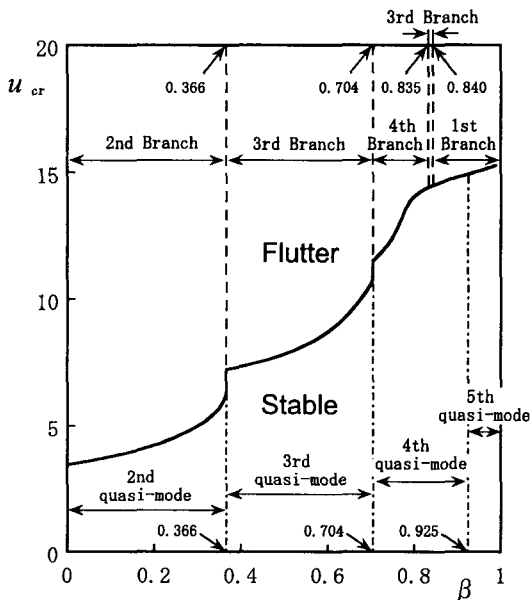


Fig.9 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu = 0.1$ .